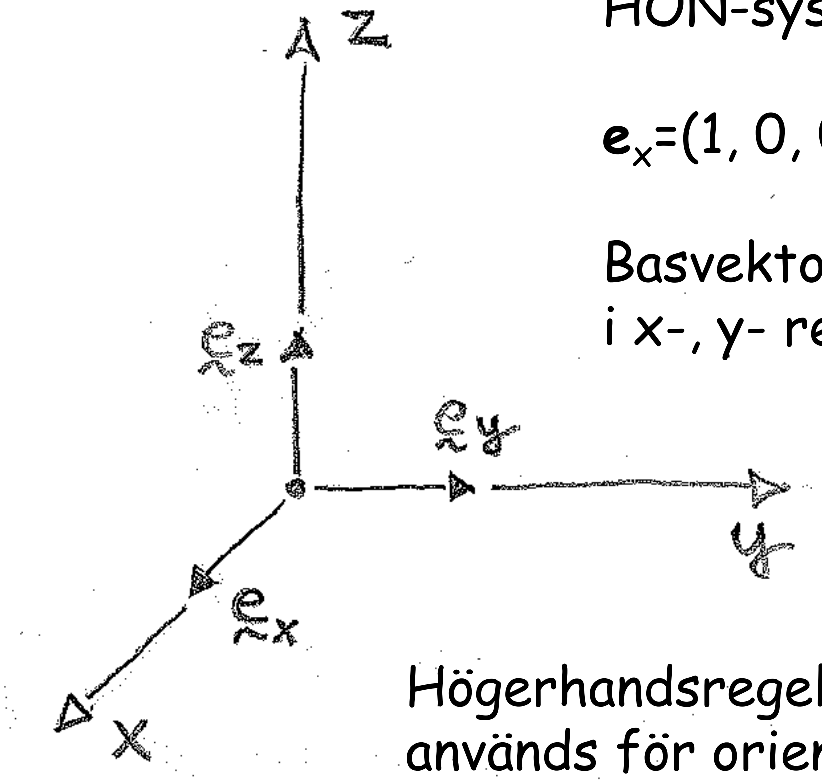
Föreläsningspass 6:

- **Rep. Linj. algebra**
- **Krafter 3D**
- **Moment 3D**

Avsnitt i kursboken: 1.3(ej e)

KOORDINATSYSTEM 3D



HON-system* med basvektorer:

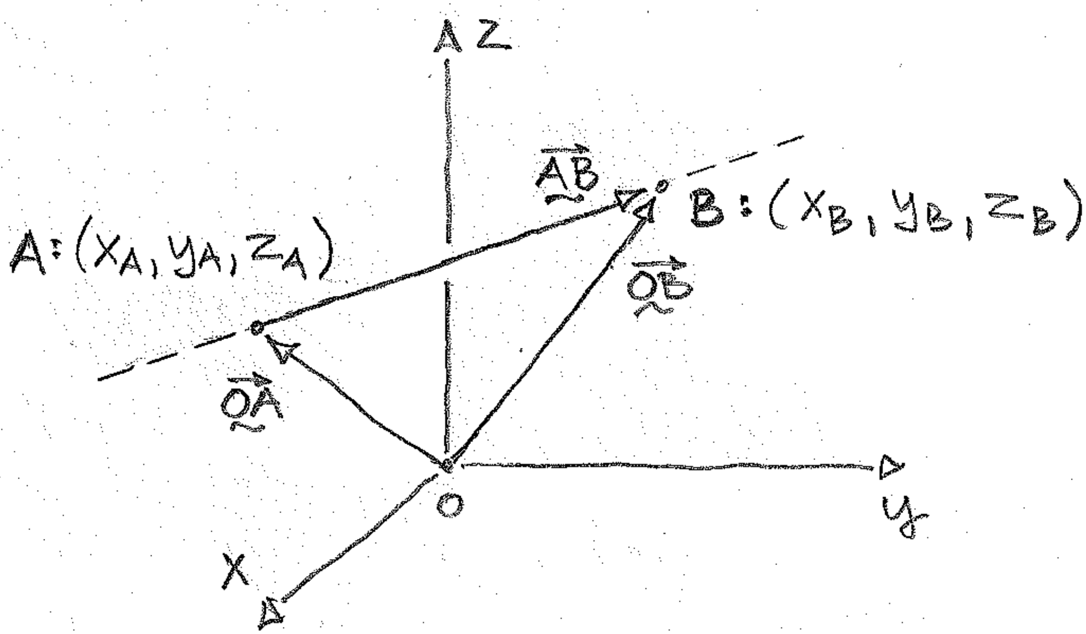
$\mathbf{e}_x=(1, 0, 0)$ $\mathbf{e}_y=(0, 1, 0)$ och $\mathbf{e}_z=(0, 0, 1)$

Basvektorerna är enhetsvektorer
i x-, y- resp. z-riktningarna

Högerhandsregeln alt. skruvregeln
används för orienteringen av x, y och z

*) Anm.
Högerorienterat Ortogonalt och Normerat

ORTSVEKTORER



Geometriska vektorer från origo O till en punkt (A eller B):

$\overrightarrow{OA}=(x_A, y_A, z_A)$

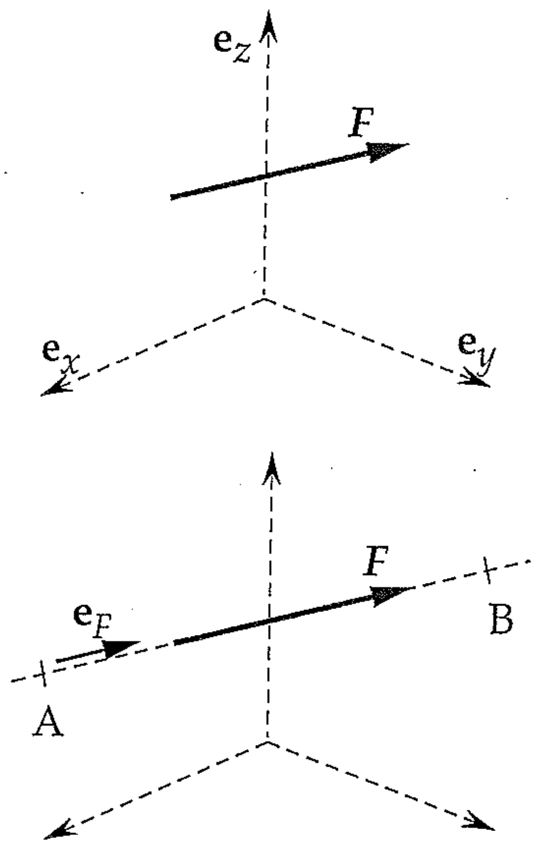
$\overrightarrow{OB}=(x_B, y_B, z_B)$

Alternativ beteckning: $\overrightarrow{OA} = x_A\,\mathbf{e}_x + y_A\,\mathbf{e}_y + z_A\,\mathbf{e}_z$

Belopp (längd/avstånd) $|\overrightarrow{OA}|^2 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2$ (Pythagoras sats i 3D)

Vektorn från A till B: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

KRAFTVEKTORER 3D



Figur 1.3.1

(Boken s. 45)

En kraftvektor $\boldsymbol{F}$ kan representeras med sina komponenter F_x, F_y och F_z. Detta innebär att

$$\boldsymbol{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y + F_z\mathbf{e}_z \tag{1.3.1}$$

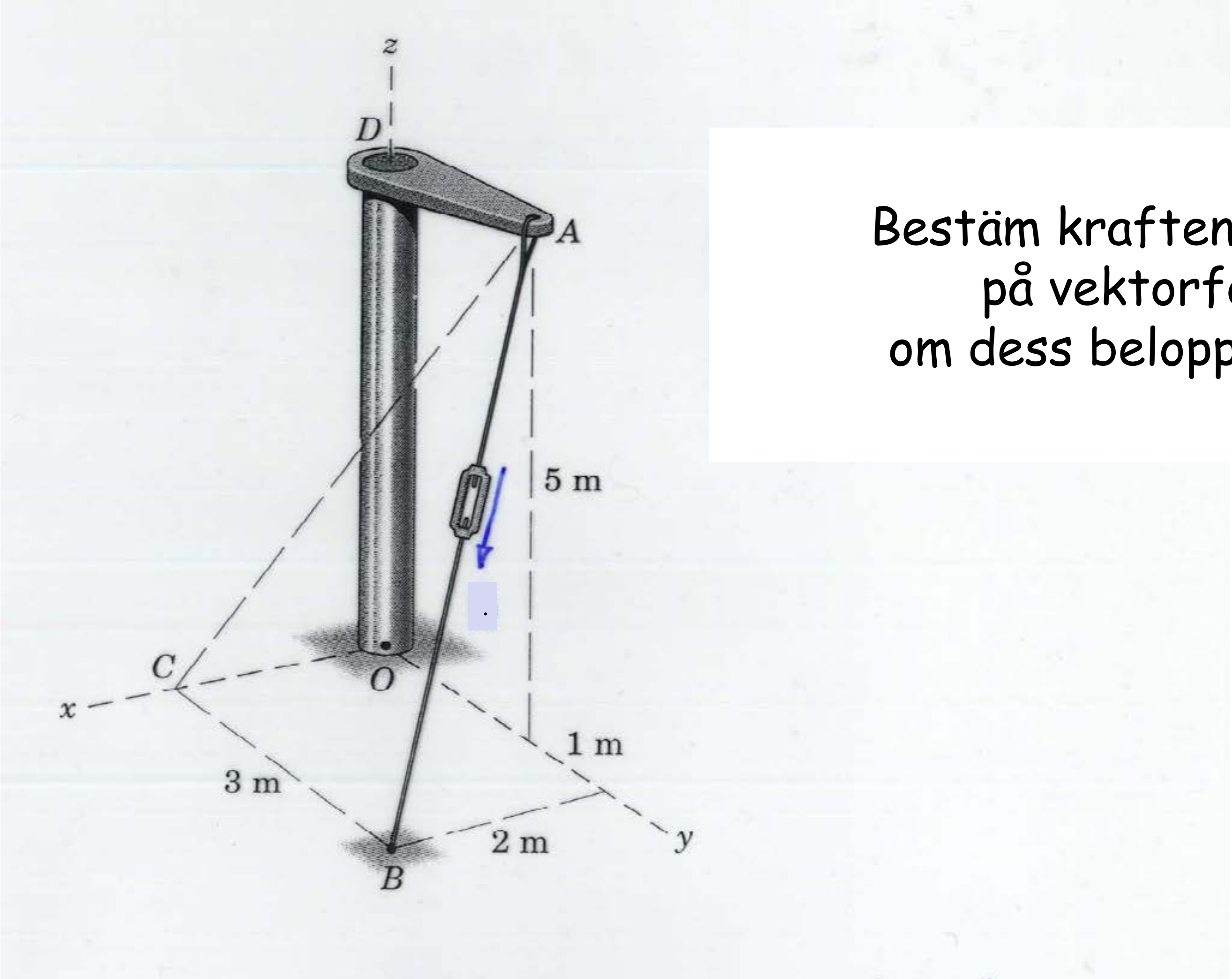
Om kraftens komponenter är okända från början men däremot dess belopp F och verkningslinje är givna så kan man börja med att skriva vektorn som $\boldsymbol{F} = F\mathbf{e}_F$. Här är $\mathbf{e}_F$ en enhetsvektor längs verkningslinjen och riktad åt samma håll som kraften själv. Om A och B är två punkter på linjen så belägna att vektorn $\overrightarrow{AB}$ har samma riktning som $\boldsymbol{F}$ så fås $\mathbf{e}_F$ ur

$$\mathbf{e}_F = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \tag{1.3.2}$$

Med kända koordinater för punkterna A och B kan lätt vektorn skrivas uttryckt i sina komponenter i basvektorsystemet $\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ varefter

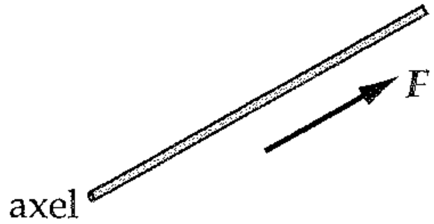
$$\boldsymbol{F} = F\mathbf{e}_F = F\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \tag{1.3.3}$$

Ex. Kraft med riktning

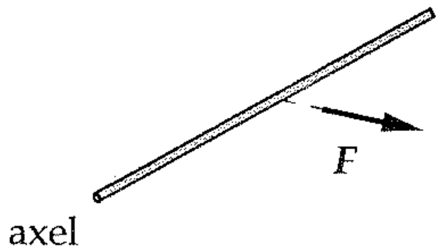


Bestäm kraften i vajern
på vektorform
om dess belopp är 1kN

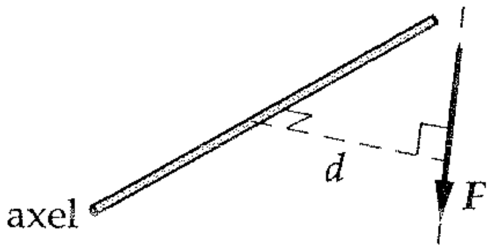
MOMENT - EGENSKAPER



En kraft *parallell* med en axel har inget moment map denna axel.



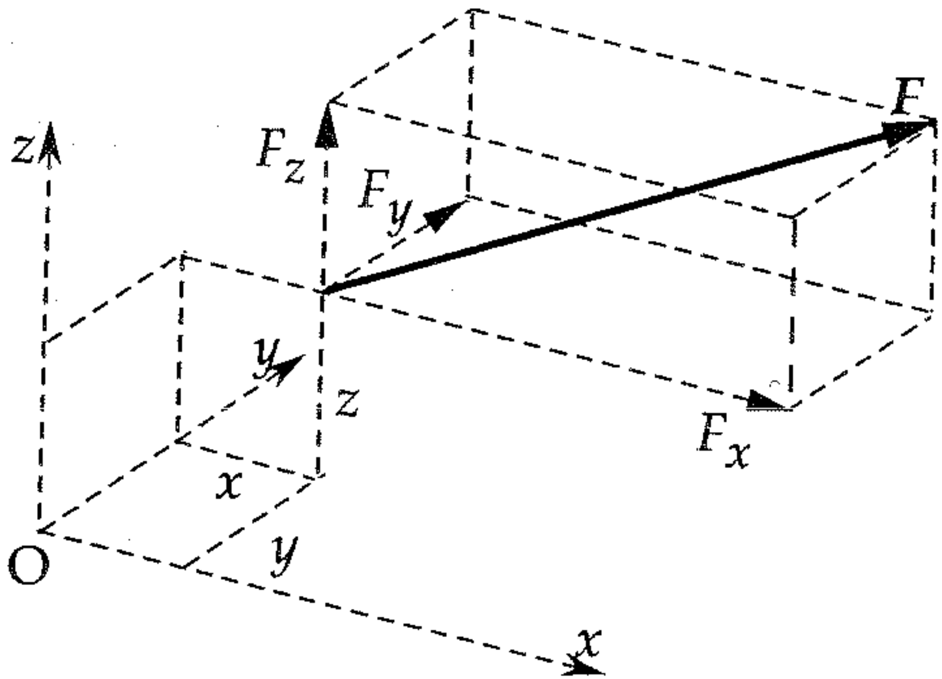
En kraft som *skär* en axel har inget moment map axeln.



En kraft *F* *vinkelrät* mot en axel på avståndet *d* har momentet *Fd* map axeln.

MOMENT 3D

Beräkning av 3D-moment med hjälp kraftkomposanterna:



Figur 1.3.4

$$M_x = F_z y - F_y z$$
$$M_y = F_x z - F_z x$$
$$M_z = F_y x - F_x y$$

(Boken s. 48)

Kraftmomentet som vektor

Betrakta formlerna (1.3.4). Uttrycken för M_x, M_y och M_z har en anmärkningsvärd egenskap; de utgör alla komponenter av en och samma vektor, nämligen $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Vi ger denna vektor beteckningen $\boldsymbol{M}_\mathrm{O}$. Om dess komponenter betecknas $(\boldsymbol{M}_\mathrm{O})_x$, $(\boldsymbol{M}_\mathrm{O})_y$ och $(\boldsymbol{M}_\mathrm{O})_z$ så gäller alltså för de framräknade momenten med avseende på koordinataxlarna:

$$
\begin{aligned}
M_x &= (\boldsymbol{M}_\mathrm{O})_x \\
M_y &= (\boldsymbol{M}_\mathrm{O})_y \\
M_z &= (\boldsymbol{M}_\mathrm{O})_z
\end{aligned}
\tag{1.3.5}
$$

Indexbokstaven O i symbolen $\boldsymbol{M}_\mathrm{O}$ står för *origo* dvs skärningspunkten mellan de tre aktuella axlarna. – I vektorn $\boldsymbol{M}_\mathrm{O}$ har vi således funnit *en enda* matematisk storhet som i sig innehåller all information om *tre* fysikaliska storheter (kraftmomenten M_x, M_y och M_z) vilka har en fast experimentell förankring.

MOMENT – KRYSSPRODUKT

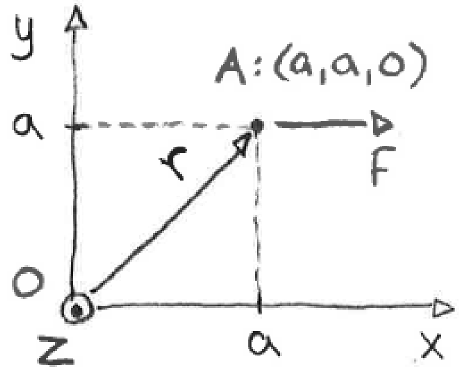
$\underset{\sim}{r} = (x, y, z)$ och $\underset{\sim}{F} = (F_x, F_y, F_z)$

"Sarrus regel":

$$
\begin{array}{cccccc}
+ & + & + & - & - & - \\
\underset{\sim}{e}_x & \underset{\sim}{e}_y & \underset{\sim}{e}_z & \underset{\sim}{e}_x & \underset{\sim}{e}_y & \underset{\sim}{e}_z \\
x & y & z & x & y & z \\
F_x & F_y & F_z & F_x & F_y & F_z
\end{array}
\quad \Rightarrow
$$

$$
\boxed{\begin{gathered}
\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} = \\
\underset{\sim}{e}_x (y F_z - z F_y) + \underset{\sim}{e}_y (z F_x - x F_z) + \underset{\sim}{e}_z (x F_y - y F_x)
\end{gathered}}
$$

Ex. Moment genom kryssprodukt jmf. 2D



Enl. tidigare 2D:

$\circlearrowleft O$: $M_O = -F \cdot a$

Med kryssprodukt : $\begin{cases} \underset{\sim}{r} = (a, a, 0) \\ \underset{\sim}{F} = (F, 0, 0) \end{cases}$

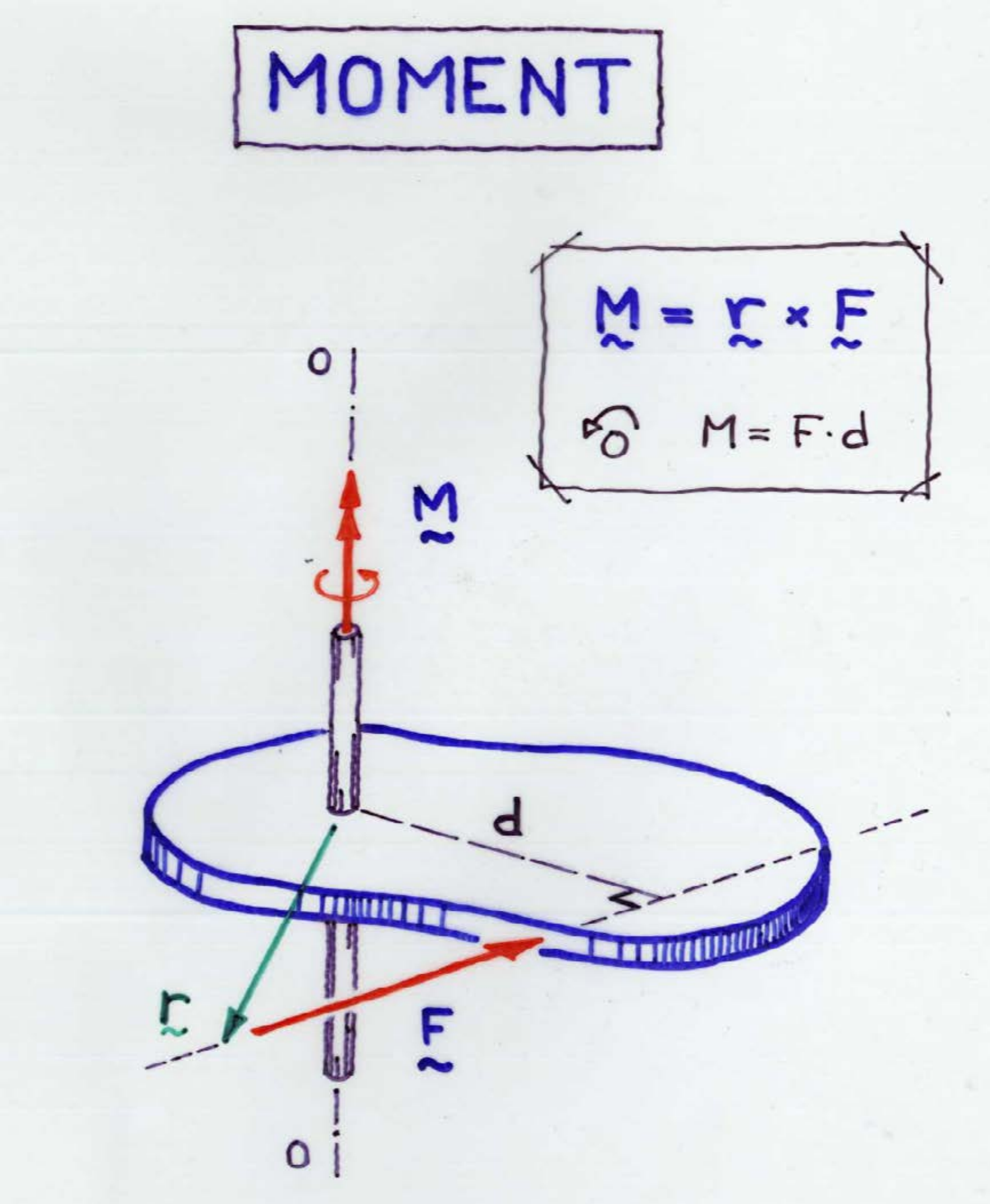
$\underset{\sim}{M}_O = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} \Rightarrow$

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ e_x & e_y & e_z & e_x & e_y & e_z \\ a & a & 0 & a & a & 0 \\ F & 0 & 0 & F & 0 & 0 \end{array} \quad \neq 0$$

$\underset{\sim}{M}_O = -F \cdot a \, \underset{\sim}{e}_z =$

$= (0, 0, -Fa)$

Dvs samma som ovan.



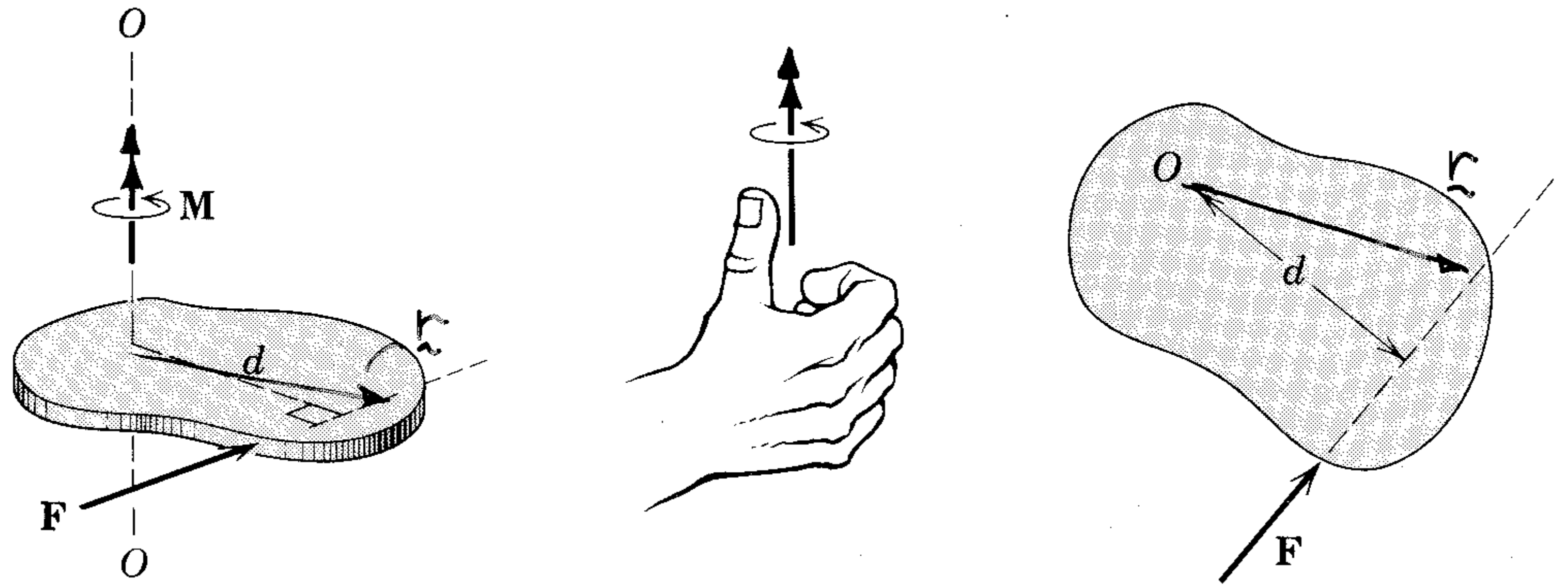
Momentvektorn ges av en kryssprodukt:

Beloppet är *Fd* och riktningen är vinkelrät mot ***r*** och ***F***

Obs!
Det räcker att ***r*** pekar på någon punkt på verkningslinjen till ***F***

Momentpunkten kan vara en godtycklig punkt *A*

MOMENT SOM KRYSSPRODUKT

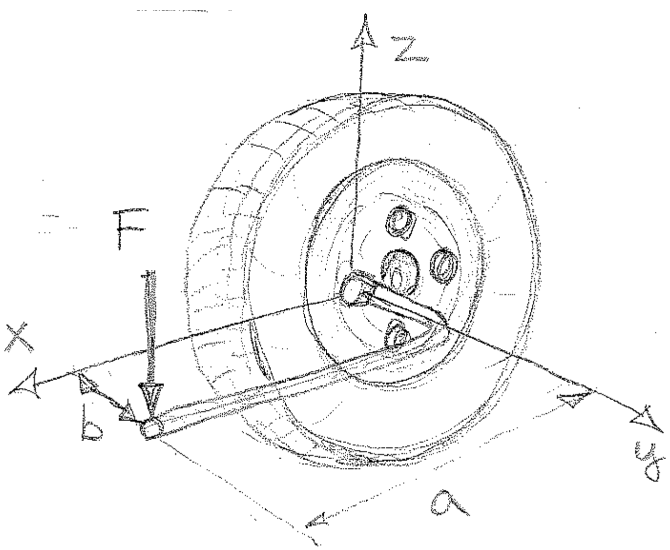


(a) (b) (c)

Alt. högerskruvregeln

Ex. Moment vid däckbyte

Bestäm momentet map origo; $\boldsymbol{M}_O$.
Speciellt komponenten i y-riktningen



F=900N och a=0.3m

Lösning:

$$\underset{\sim}{M}_o = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{r} = (a, b, 0) \\ \underset{\sim}{F} = (0, 0, -F) \end{cases}$$

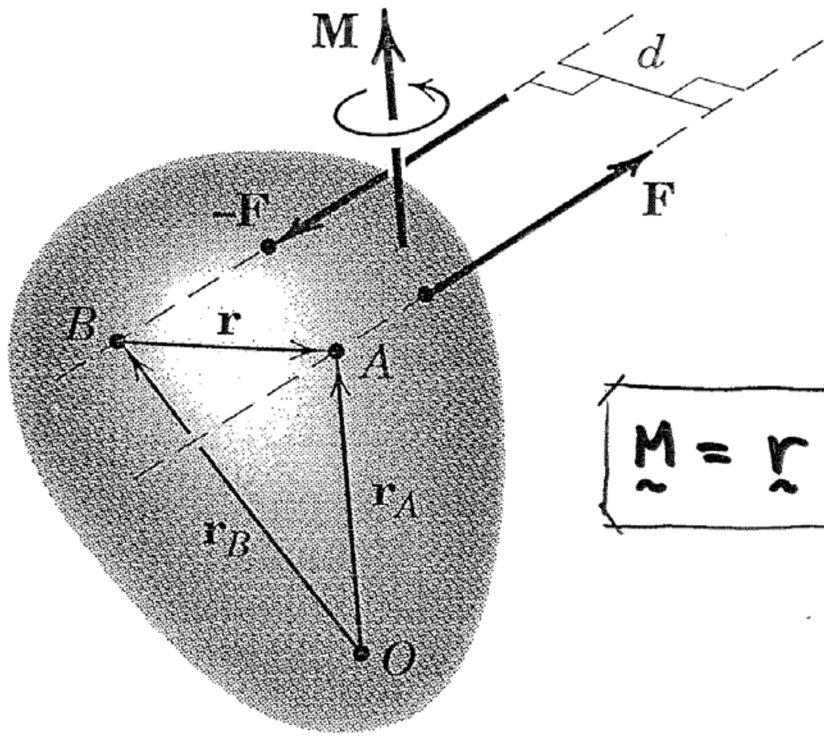
$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ \underset{\sim}{e}_x & \underset{\sim}{e}_y & \underset{\sim}{e}_z & \underset{\sim}{e}_x & \underset{\sim}{e}_y & \underset{\sim}{e}_z \\ a & b & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & -F & 0 & 0 & -F \end{array} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{M}_o = (-Fb, Fa, 0) = (M_{ox}, M_{oy}, M_{oz})$$

Komponenten i y-riktningen:

$$M_{oy} = F \cdot a = \underline{\underline{270\ Nm}}$$

KRAFTPAR 3D



$$\boxed{\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}}$$

Visas enligt:

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{r}_A \times \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{r}_B \times (-\underset{\sim}{F}) =$$

$$= (\underset{\sim}{r}_A - \underset{\sim}{r}_B) \times \underset{\sim}{F} =$$

$$= \underbrace{\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}}_{?}$$

Beloppet: $|\underset{\sim}{M}| = Fd$