

## **Föreläsningsspass 9:**

\* Tyngdpunktsberäkning

**Avsnitt i kursboken: 3.1, 3.2**

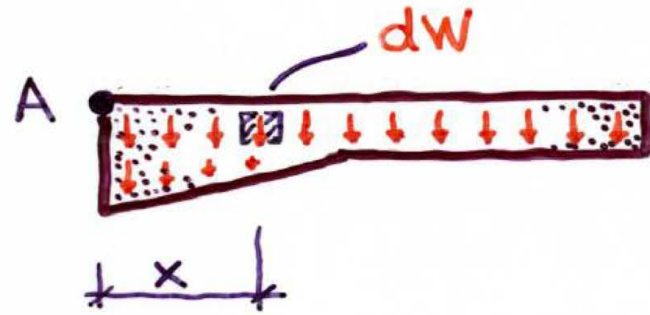
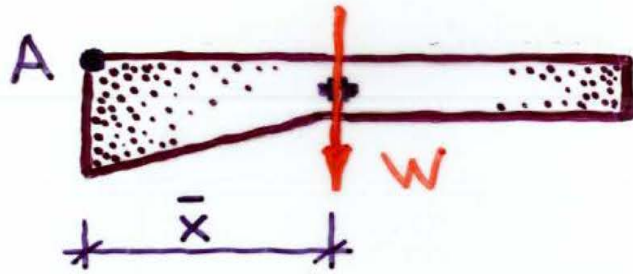
# TYNGDPUNKTSBERÄKNING

Att bestämma tyngdpunktens läge är likvärdigt med att reducera en fördelad last till en resulterande kraft.

Verkningslinjen för resultanten går genom tyngdpunkten.

Tyngdpunksberäkning kan göras på två olika sätt; genom *integration* eller med kända *delkroppar*

# TP GENOM INTEGRATION



$$(\downarrow) \quad W = \int dW$$

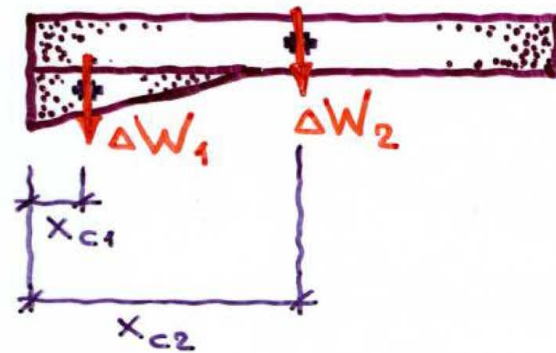
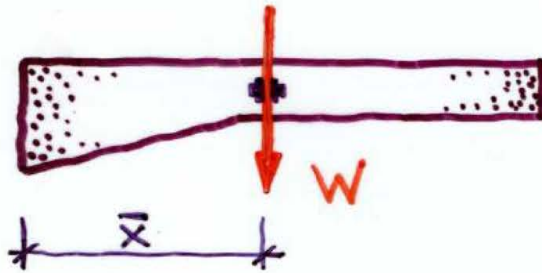
$$(\curvearrowright) \quad \bar{x} W = \int x dW$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{W}$$

Tyngdpunktens läge i x-led

$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

# TP MED DELKROPPAR



$$(\downarrow) \quad W = \sum \Delta W$$

$$(\curvearrowright) \quad \bar{x} W = \sum x_c \Delta W$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_c \Delta W}{W}$$

$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

# MASSCENTRUM

Antag  $g$  konstant inom kroppen

$$dW = g \, dm$$

$$W = \int dW = \int g \, dm = g \int dm$$

$$\int x \, dW = \int x \, g \, dm = g \int x \, dm$$

$$\bar{x} = \frac{g \int x \, dm}{g \int dm} = \frac{\int x \, dm}{m} = \frac{\sum (x_c \Delta m)}{m}$$

masscentrums läge i x-led

$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

# GEOMETRISK TYNGDPUNKT

Antag densiteten  $\rho$  konstant inom kroppen  
(homogent material.)

$$dm = \rho dV$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V} = \frac{\sum(x_c \Delta V)}{V}$$

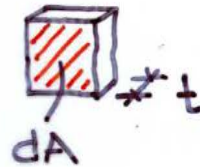
geometriska tyngpunktens läge

$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

# TP FÖR EN YTA

Antag kroppens tjocklek  $t$  konstant.

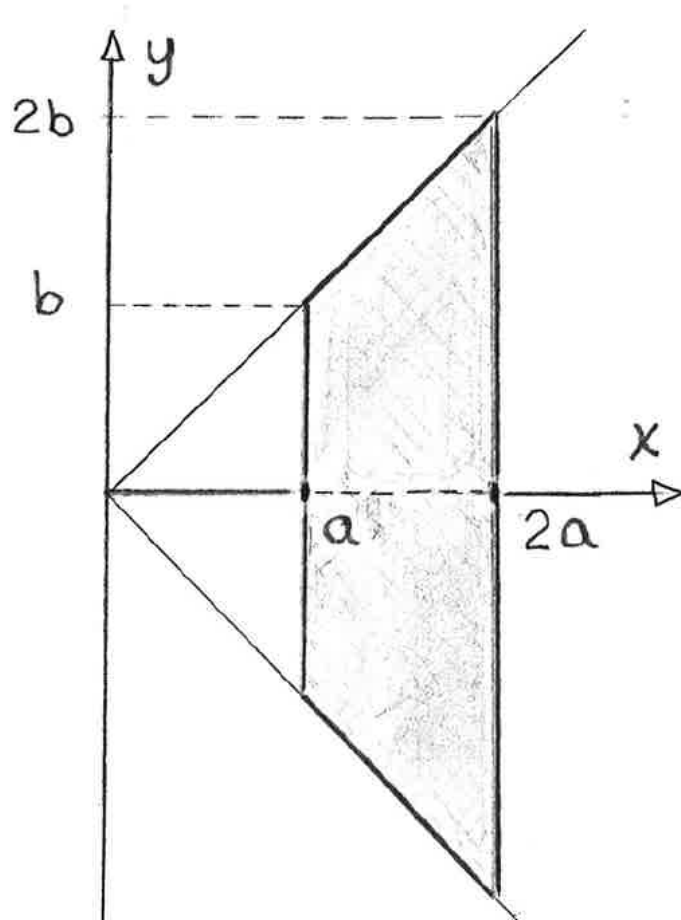
$$dV = t dA$$



$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} = \frac{\sum(x_c \Delta A)}{A}$$

$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

# Ex. Tyngdpunkt för en yta genom integration



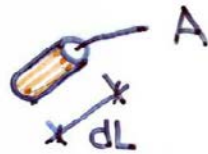
Välj ett lämpligt ytelement  $dA$



# TP FÖR ETT LINJEELEMENT

Antag kroppens tvärsnittsarea  $A$  konstant

$$dV = A dL$$



$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L} = \frac{\sum (x_c \Delta L)}{L}$$

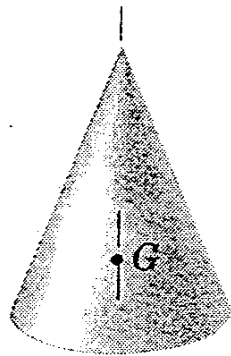
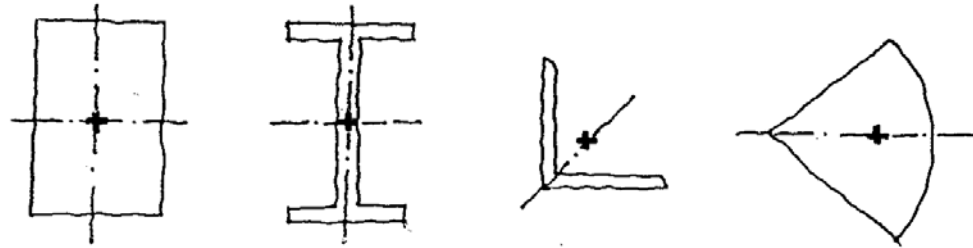
$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

# SYMMETRI - AXLAR/PLAN

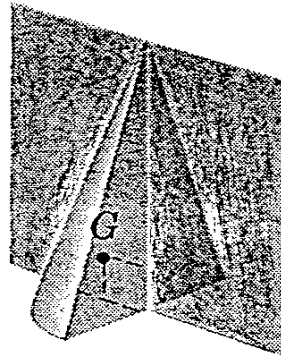
Geometrisk tyngdpunkt

och om homogent mtrl - masscentrum

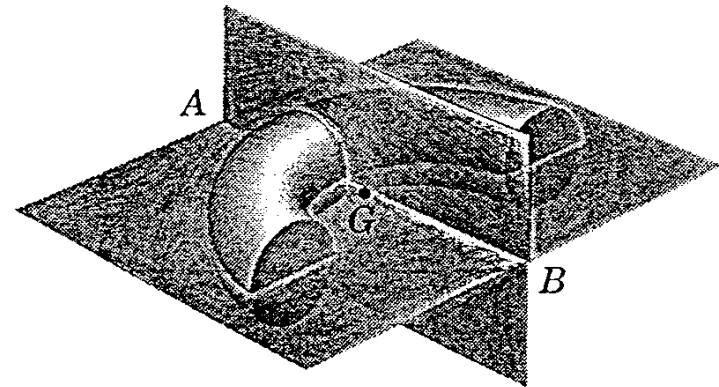
ligger längs symmetriaxlar/plan



(a)

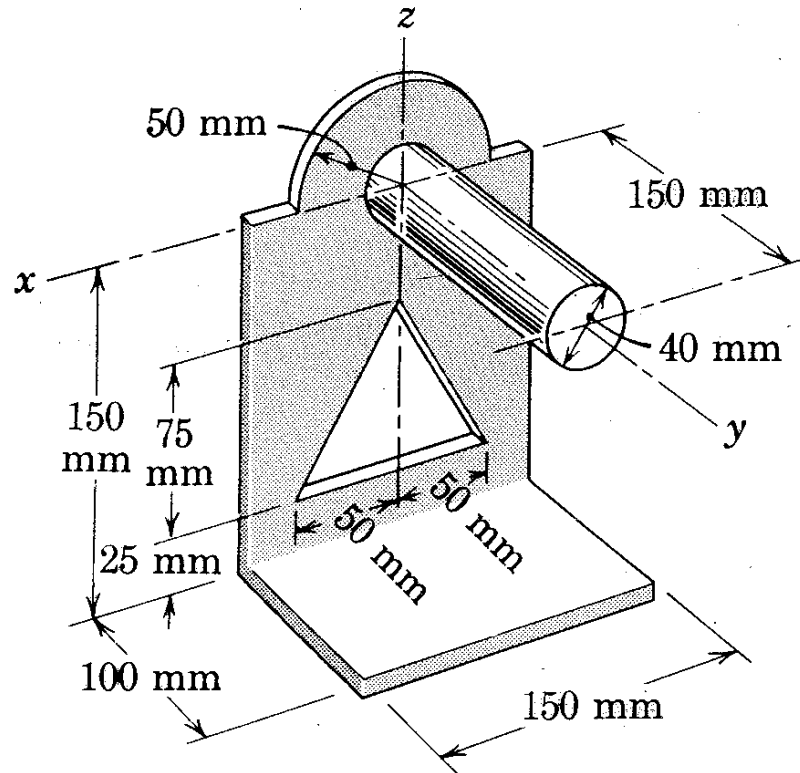


(b)

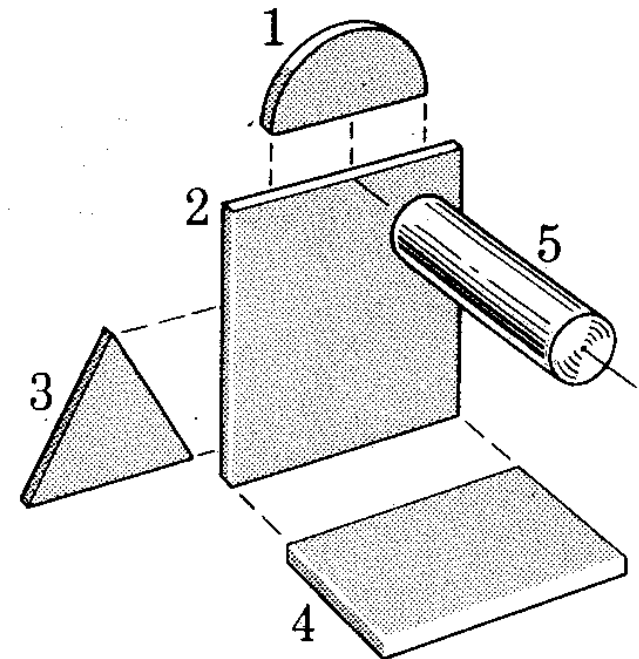


(c)

# SAMMANSATTA KROPPAR

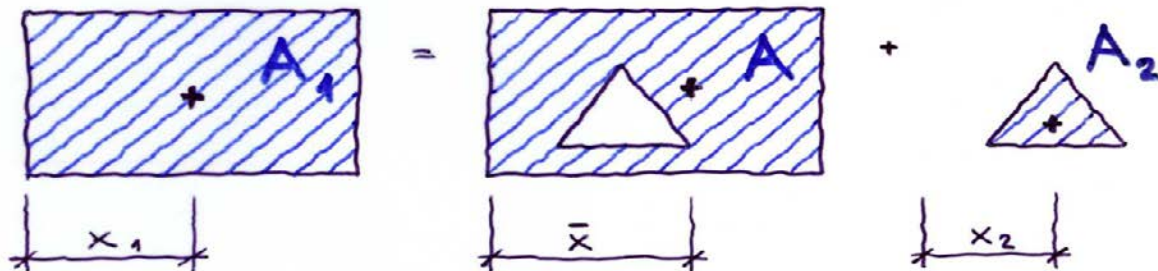
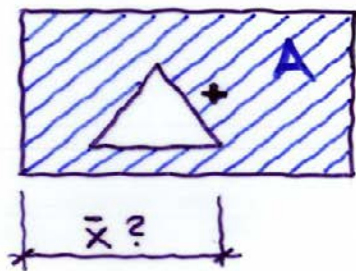


Delar med kända massor  
och masscentra:



(del 3 ger ett negativt bidrag)

# KROPP MED HÅL



$$A_1 = A + A_2$$

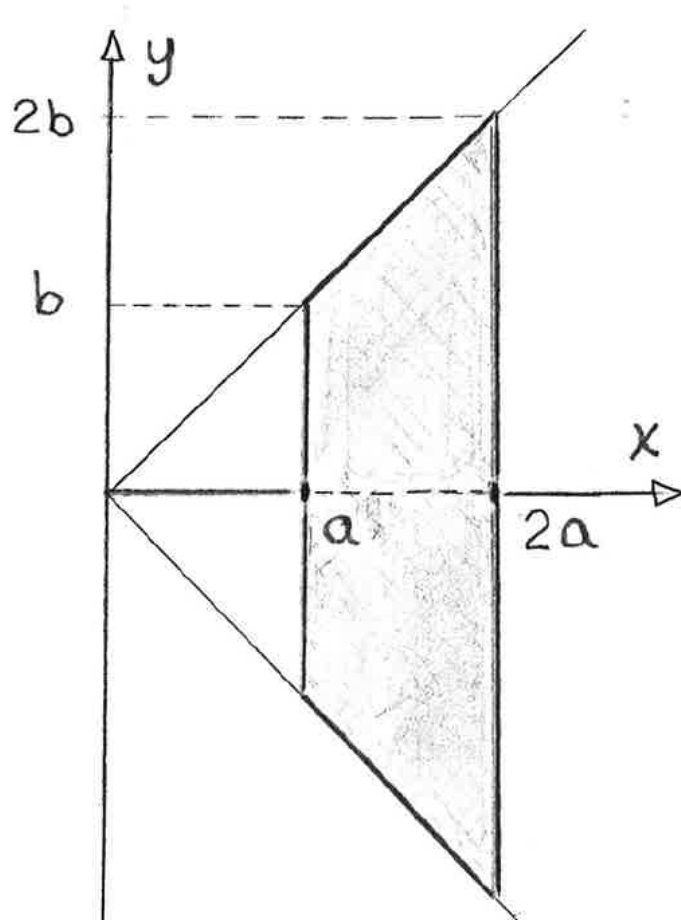
$$(\Leftrightarrow) x_1 A_1 = \bar{x} A + x_2 A_2 \quad (\text{samma kropp})$$

$$\Rightarrow \bar{x} A = x_1 A_1 - x_2 A_2$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A}$$

Dvs. hålet ger ett negativt bidrag till det statiska momentet!

# Ex. Tyngdpunkt för en yta - sammansatt kropp



Välj lämpliga delytor

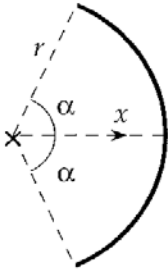
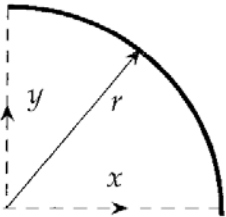
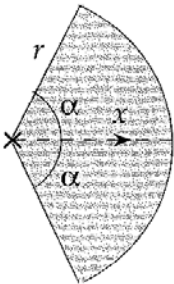
# TP FÖR OLIKA GIVNA GEOMETRIER

Appendix II  
Boken s. 477:

## (b) Tyngdpunkter och tröghetsmoment hos homogena kroppar

Tabell AII.1

(Bokstaven  $m$  står för massan hos aktuell kropp)

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn tråd, cirkelbåge 	$\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	
Tunn tråd, kvartscirkelbåge 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2$
Tunn skiva, cirkelsektor 	$\bar{x} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	