

# Föreläsningsspass 17

- Svängningar - odämpade
- Fria svängningar
- Påtvingade svängningar

Avsnitt i kursboken: 6.4 a) och c)  
(ej dämpad svängning i 6.4c)

# ALLMÄNT OM SVÄNGNING

Svängningar och vibrationer förekommer i många olika sammanhang i system som har massa och fjädrande egenskaper.

Ex.

Bjälklag, stämgaffel, höga hus (vind, jordbävning), tvättmaskin (roterande obalans), pendel mm.

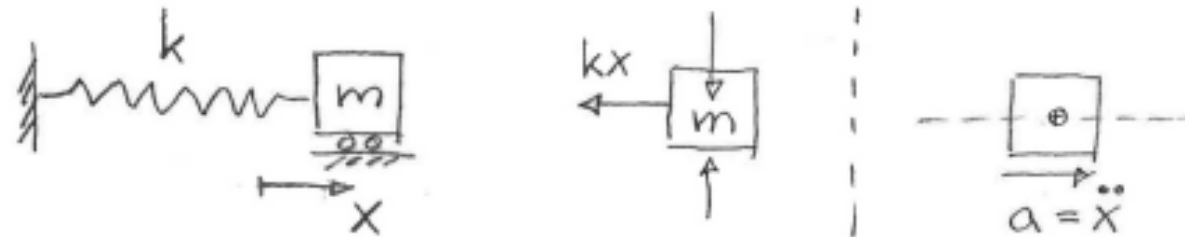
#

Liten ordlista:

- Fri och påtvingad svängning/vibration
- Naturlig frekvens alt. egenfrekvens: svängningar per sekund
- Amplitud: utslaget vid svängning
- Periodtid: tiden för en svängning
- Harmonisk funktion: sinus eller cosinus funktion

# MASSA-FJÄDER SYSTEM

Modellsystem "harmonisk oscillator" i fri odämpad rörelse:



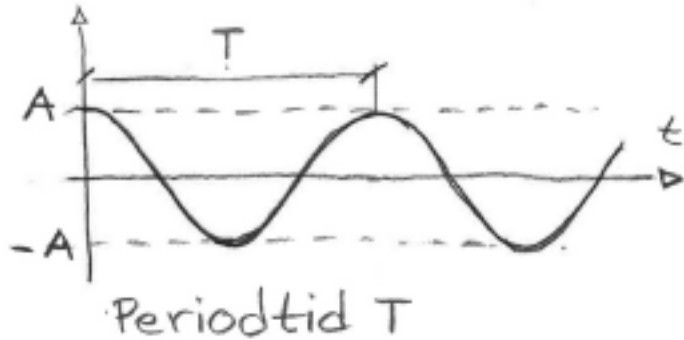
$$NII (\rightarrow): -kx = m\ddot{x} ; m\ddot{x} + kx = 0 ;$$

Rörelseekvationen  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Lösningen av differentialekvationen ger förskjutningen  $x(t)$ .

# LÖSNING AV EKVATIONEN FÖR FRI SVÄNGNING

Testa om  $x = A \cos ct$  är en lösning



Periodisk funktion:

$$\cos(0)=1 \text{ och } \cos(2\pi)=1 \Rightarrow$$

$$cT=2\pi \text{ dvs } c=2\pi/T$$

$A$  och  $c$  är godtyckliga konstanter

$$\dot{x} = -Ac \sin ct ; \ddot{x} = -Ac^2 \cos ct$$

$$\text{Insatt i rörelseekvationen } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow A(-c^2 + \frac{k}{m}) \cos ct = 0$$

Skall gälla alla tider  $t \Rightarrow$  Ansatsen är en lösning om  $c^2 = k/m$

## LÖSNING AV ... forts.

Men  $c=2\pi/T$  där  $T$  är periodtiden.

Det finns alltså en specifik periodtid  $T_n$  som kopplar till  $k$  och  $m$  enligt:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_n}$$

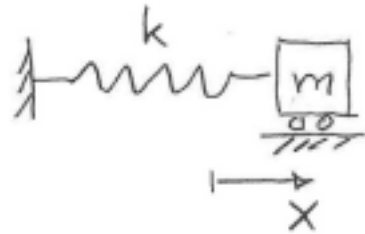
- $T_n$  kallas systemets naturliga periodtid (enhet s)
- $f_n$  är dess naturliga frekvens (Hz=1/s)
- $\omega_n=2\pi f_n$  är dess naturliga vinkelfrekvens (rad/s)

Detta är systemets periodtid och frekvens (oberoende av amplituden).

Anm. Ibland används *egenfrekvens* som är en synonym till naturlig frekvens

# ALLMÄNN LÖSNING - FRI ODÄMPAD SVÄNGNING

Amplituden i svängningen bestäms av begynnelsedata:



$$\begin{cases} X(0) = X_0 \\ \dot{X}(0) = v_0 \end{cases}$$

Både  $\cos \omega_n t$  och  $\sin \omega_n t$  är lösningar till rörelseekvationen  $\Rightarrow$

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

är också en lösning. A och B kan bestämmas med hjälp av begynnelsedata:

$$\begin{cases} X(0) = A \cos \omega_n \cdot 0 + B \sin \omega_n \cdot 0 = A ; \quad A = X_0 \\ \dot{X}(0) = -A \omega_n \sin \omega_n \cdot 0 + B \omega_n \cos \omega_n \cdot 0 = B \omega_n \end{cases}$$

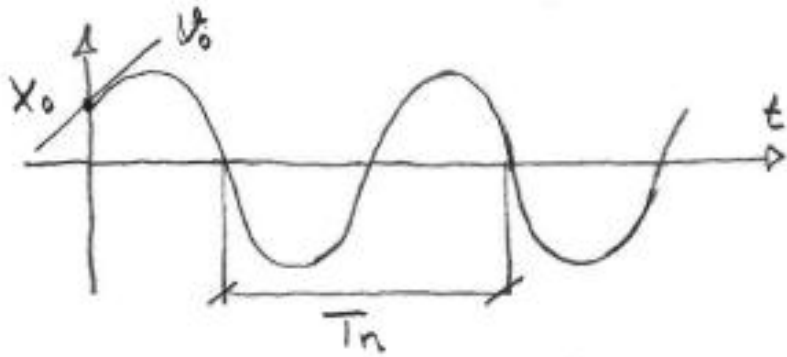
$$\text{dvs. } A = X_0 \text{ och } B = \frac{v_0}{\omega_n}$$

## ALLMÄNN LÖSNING ... forts.

A och B ges av begynnelsedata.

Den allmänna lösningen med hänsyn till begynnelsedata ges då av:

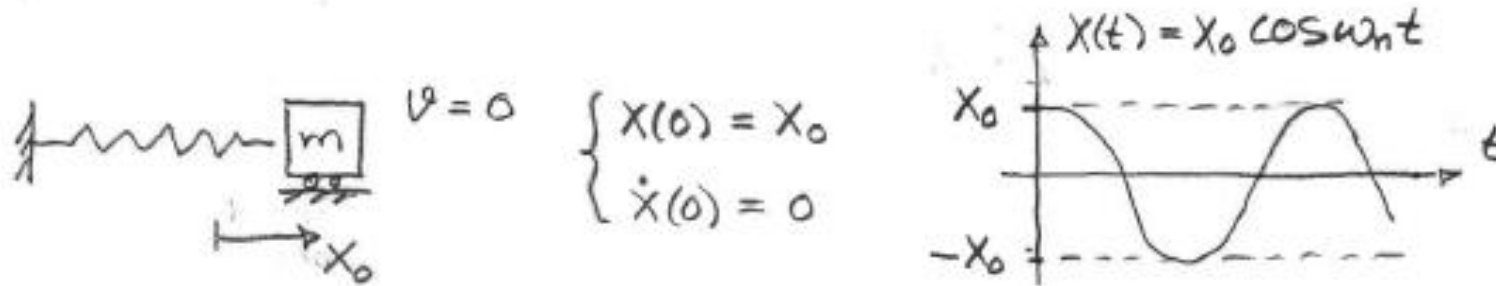
$$X(t) = X_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$



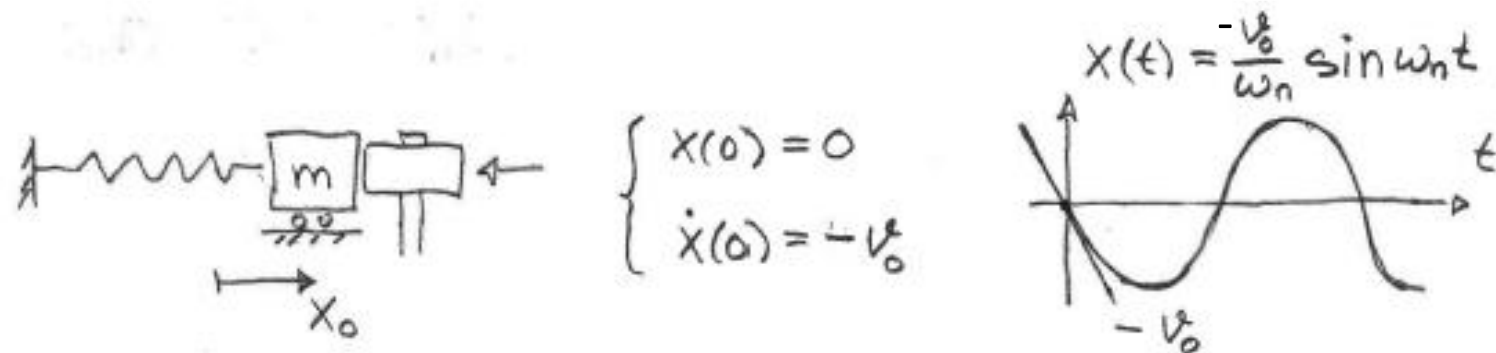
$$\omega_n = 2\pi f_n \quad , \quad f_n = \frac{1}{T_n}$$

## Ex. Inverkan av begynnelsedata i den allmänna lösningen

### 1) Systemet släpps från vila



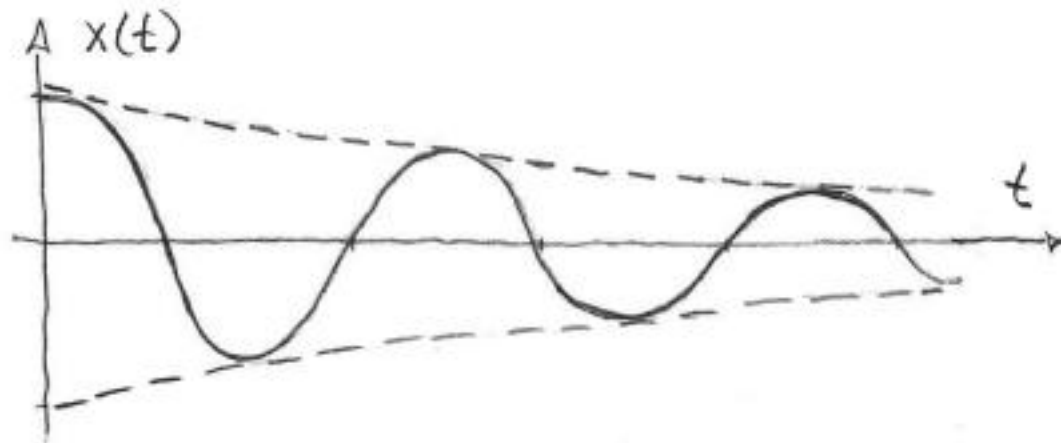
### 2) Hammarslag mot massan





## DÄMPNING VID FRI SVÄNGNING

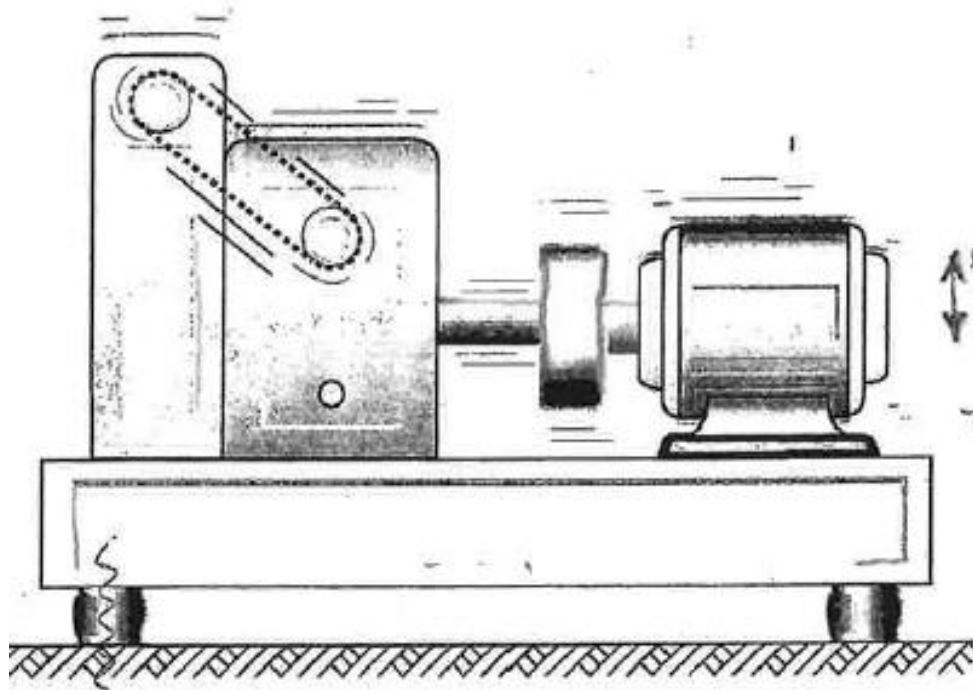
I strikt mening finns inga odämpade system. Det finns alltid förluster i form av friktion eller annat rörelsemotstånd =>



Den fria svängningens amplitud minskar för att slutligen dö ut.

## PÅTVINGADE SVÄNGNINGAR

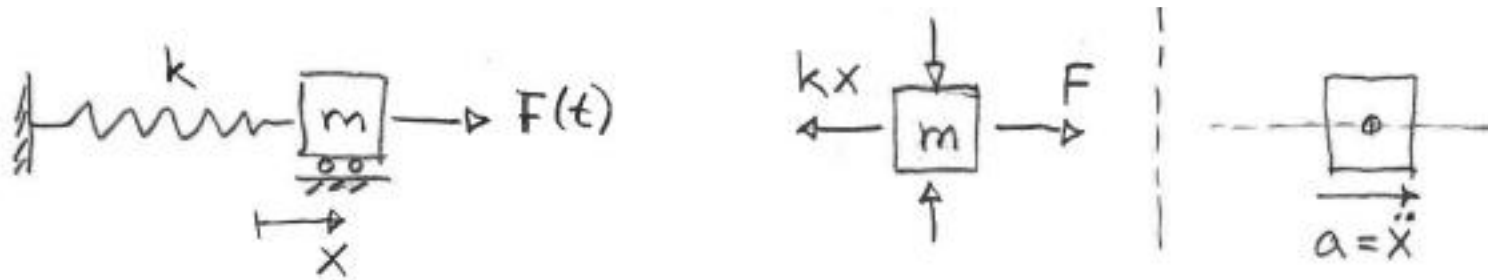
Forcerade vibrationer förekommer i olika sammanhang, speciellt i form av harmoniska laster i samband med olika maskiner/motorer med roterande delar.



Vi studerar bara harmonisk last dvs  $F(t) = F_0 \sin \Omega t$  (vid kraftstyrning).

## MODELLSYSTEMET MED HARMONISK LAST

Kraftstyrning med harmonisk last dvs  $F(t) = F_0 \sin \Omega t$



$$NII (\rightarrow): -kx + F = m\ddot{x}; \quad m\ddot{x} + kx = F;$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m} \quad \text{Rörelse ekv. (med högerled)}$$

Det är troligt att systemet följer den pålagda kraftens vinkelfrekvens  $\Rightarrow$

Testa lösningar på formen  $x(t) = x_0 \sin \Omega t$

MODELLSYSTEMET ... forts.

$$X(t) = X_0 \sin \Omega t \Rightarrow \dot{X}(t) = X_0 \Omega \cos \Omega t ; \ddot{X} = -X_0 \Omega^2 \sin \Omega t$$

Insatt i  $\ddot{X} + \frac{k}{m} X = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t \Rightarrow$

$$(-X_0 \Omega^2 + \frac{k}{m} X_0) \sin \Omega t = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t ;$$

$$X_0 \left( \frac{k}{m} - \Omega^2 \right) = \frac{F_0}{m}$$

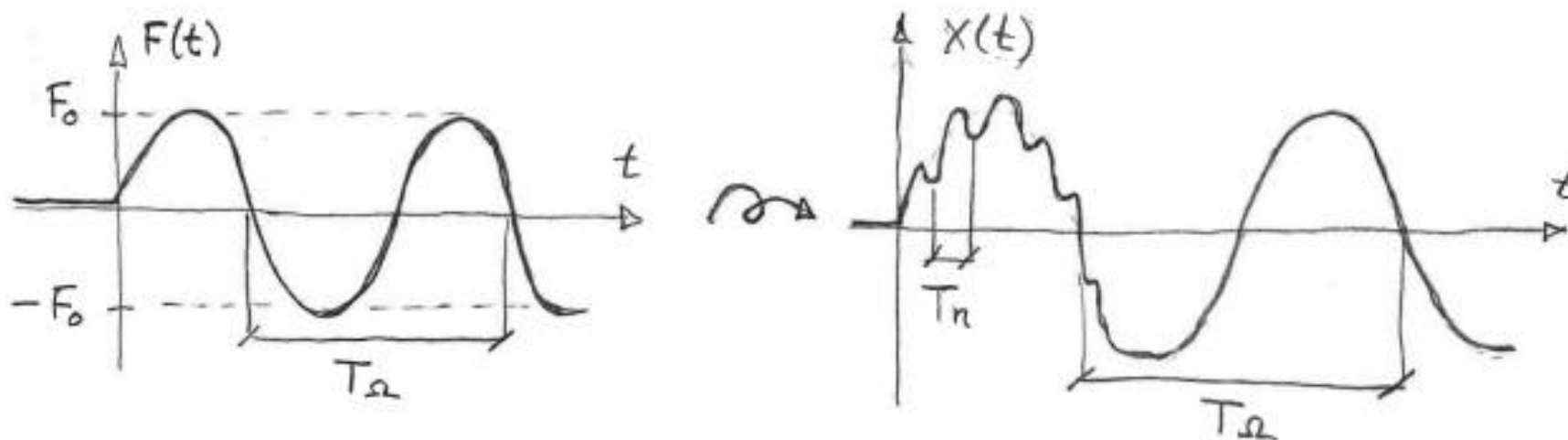
dvs ett samband för amplituderna:

$$X_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\frac{k}{m} - \Omega^2} = \frac{F_0}{m} \frac{m}{k} \frac{1}{1 - \frac{m}{k} \Omega^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$

**Obs!**  $\omega_n^2$  Amplituden blir obegränsad då  $\Omega = \omega_n \Rightarrow$  Resonans!

## STATIONÄR LÖSNING - KRAFTSTYRNING

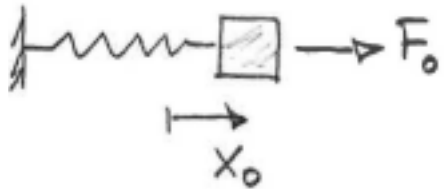
När den harmoniska kraften läggs på exciteras även den fria svängningen. Men den dör ut på grund av en alltid närvarande dämpning.



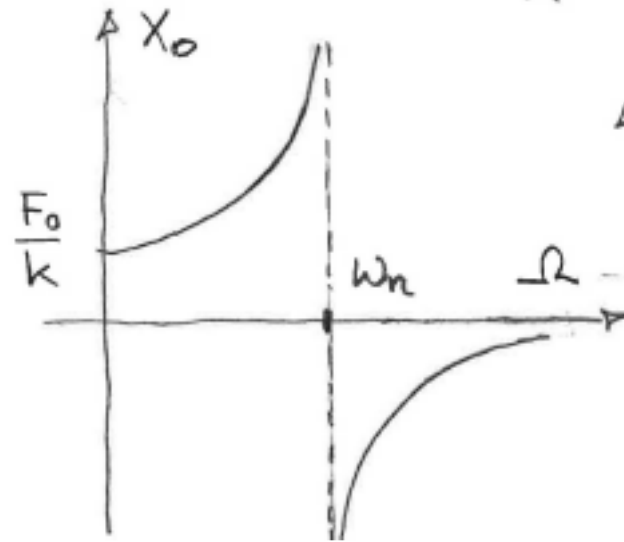
Kvar blir bara den stationära lösningen med samma frekvens som lasten och med en amplitud enligt föregående sida.

# EGENSKAPER FÖR DEN STATIONÄRA LÖSNINGEN

Amplituder



$$X_0 = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$



Tre intressanta frekvensområden:

- I) Låg frekvens :  $F_0$  och  $X_0$  följs åt - "kvasistatiskt"
- II) Resonans :  $X_0 \rightarrow \pm\infty$  då  $\Omega = \omega_n$
- III) Hög frekvens :  $X_0 \rightarrow 0$  då  $\Omega \rightarrow \infty$  - "mottfas"