BEGREPP: *rätlinjig rörelse (kinematik)*

Du skall kunna beskriva en rätlinjig rörelse med storheterna sträcka, hastighet och acceleration och kunna hantera sambanden mellan dem.

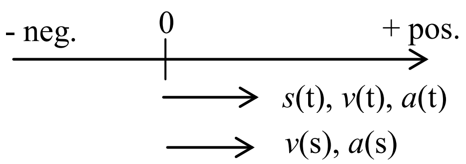
Introduktion: Om hastigheten v är konstant gäller $v=s/t$ (m/s), dvs hastigheten = sträckan / tiden. På liknande sätt; om accelerationen a är konstant gäller $a=v/t$ (m/s^2), dvs accelerationen = hastigheten / tiden. Sambanden känner du igen från gymnasiefysiken och är lätta att använda. För det generella fallet skriver vi $v(t)$ och $a(t)$ som betyder att hastigheten respektive accelerationen beror av tiden t. När hastigheten eller accelerationen varierar med tiden kan man inte använda de enkla sambanden. Då krävs att differential- eller integralsamband används.

Sammanhang: Använd begreppet *rätlinjig rörelse* för att bestämma hastighet eller acceleration som funktion av tiden vid rörelse längs en rät linje. Begreppet används också i samband med *accelerationslagen*.

Uppgift: Hur hanteras samband mellan sträcka (läge), hastighet och acceleration när hastigheten eller accelerationen i det generella fallet inte är konstant?

Metod: Genom att utgå från definitionen på hastighet och acceleration kan ett antal differential- och integralsamband härledas.

Vid rätlinjig rörelse sker förflyttningen i samma riktning antingen rakt fram i positiv riktning eller bakåt i negativ riktning (man backar).



s(t) = sträckan, läget, som funktion av tiden t
v(t) = hastigheten som funktion av tiden t
a(t) = accelerationen som funktion av tiden t
v(s) = hastigheten som funktion av sträckan s
a(s) = accelerationen som funktion av sträckan s

Hastigheten v och accelerationen a som medelvärde över ett tidsintervall Δt kan uttryckas som

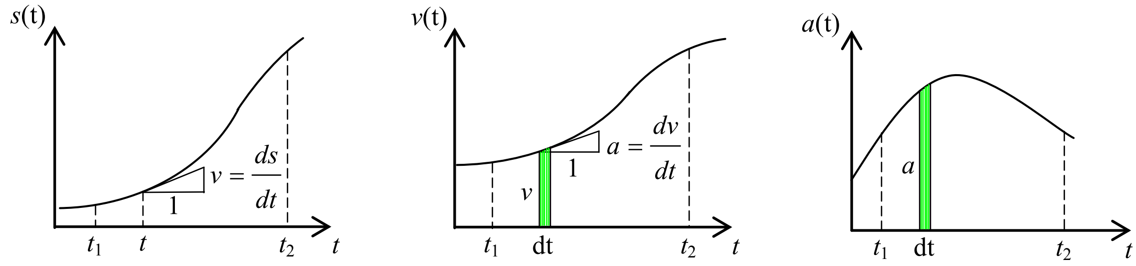
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{respektive} \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

När tidintervallet krymper ger uttrycken den momentana hastigheten och accelerationen. Via definitionen på derivata leder det till samband (1) och (2) nedan.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \ \ldots (1) \qquad\qquad a(t) = \frac{dv}{dt} \ \ldots (2)$$

Sambanden (1) och (2) är definitioner av hastighet respektive acceleration. Ur dessa två differentialsamband kan några olika integralsamband tas fram enligt följande sida.

I nedanstående grafer visas *s(t), v(t)* och *a(t)* som är storheter som varierar med tiden *t*.



Vad visar graferna?

s(t): ju brantare lutning desto längre sträcka tillryggaläggs på en viss tid. Lutningen - derivatan, anger alltså hastigheten *v(t)* vid en viss tidpunkt. När t.ex. lutningen är noll sker ingen ändring i förflyttning över tid. Hastigheten är då noll och läget oförändrat.

v(t): ju brantare lutning desto mer ökar hastigheten under en viss tid. Lutningen anger alltså accelerationen *a(t)* vid en viss tidpunkt. Vid negativ lutning minskar hastigheten dvs negativ acceleration (inbromsning).

v(t)-grafen visar dessutom följande:

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = vdt \Rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_1}^{t_2} vdt \Rightarrow s = s_0 + \overbrace{\int_{t_1}^{t_2} vdt}^{\Delta s}$$

Δs = tillskott av sträcka.

s_0 = begynnelsesträcka, dvs sträcka, läge, vid tiden t_1.

s = total sträcka, dvs sträcka vid tiden t_2.

Arean under *v*(t)-grafen är alltså tillskott av sträcka mellan tiden t_1 och t_2.

a(t): grafen visar följande:

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_1}^{t_2} adt \Rightarrow v = v_0 + \overbrace{\int_{t_1}^{t_2} adt}^{\Delta v}$$

Δv = tillskott av hastighet

v_0 = begynnelsehastighet, dvs hastighet vid tiden t_1.

v = total hastighet, dvs hastighet vid tiden t_2.

Arean under *a*(t)-grafen är alltså tillskott av hastighet mellan tiden t_1 och t_2.

Vid det viktiga specialfallet att accelerationen *a(t)* är <u>konstant</u> gäller följande:

$$v = v_0 + a\int_{t_1}^{t_2} dt \qquad \Rightarrow \qquad v = v_0 + at$$

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_{s_0}^{s} ds = \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + at)dt \quad \Rightarrow \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Obs! gäller endast då acc. *a* är konstant

Resultat: Genom att utnyttja definitionen på hastighet och acceleration kan generell rätlinjig rörelse analyseras. Kopplingen mellan derivata och integral är också användbar för att grafiskt och analytiskt bestämma samband mellan sträcka, hastighet och acceleration.

Exempel:

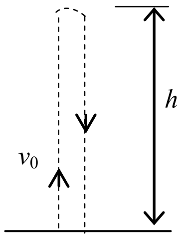
1) Läget hos en partikel kan beskrivas med $s(t) = 2t^3 - 24t + 6$ där t är tiden i sekunder. Beräkna den tid det tar för partikeln att nå hastigheten $v = 72$ m/s.

Lösning:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \qquad v(t) = 6t^2 - 24 \;\Rightarrow\; 72 = 6t^2 - 24 \;\Rightarrow\; t = 4$$

#

2) En sten kastas rakt upp med utgångshastigheten $v_0 = 10$ m/s den påverkas av tyngd-accelerationen g = 9,81 m/s^2 och luftmotståndet försummas. Hur lång tid t_1 tar det att nå vändlaget och hur högt h når stenen?



Lösning:

Sambanden för konstant acceleration $a=g$ används => $v=v_0 - g{\cdot}t=0$ i vändläget.

Dvs $t_1= v_0/g$ = 10/9.81 = 1.01s. Samband för sträckan => $h=v_0 - g{\cdot}t_1^2/2$=4.90m

#

Relaterade begrepp: Begreppet *rätlinjig rörelse* utnyttjas i samband med *accelerationslagen* och ibland vid *stelkroppsrörelse* och *stelkroppskinetik.* Vid partikelkinematik i en krökt bana generaliseras begreppet till *kroklinjig rörelse*.