BEGREPP: *Moment i tre dimensioner*

Du skall kunna beräkna den vridande verkan – momentet - för en kraft i tre dimensioner och förstå hur moment uttrycks som en vektor.

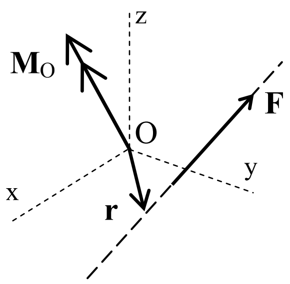
Introduktion:

Vid plana problem ger krafterna moment kring en axel och det är normalen till planet. Momentets vektorkaraktär tar man endast hänsyn till genom att hålla reda på om den vridande verkan är riktad medurs eller moturs. Vid tredimensionella problem har en kraft i det allmänna fallet vridande verkan kring tre olika axlar. Om man använder samma metodik som i det plana fallet måste man (allmänt sett) göra tre vinkelräta projektioner av problemet för att reda ut momentets komponenter. Men momentet kan definieras genom en vektorprodukt och det ger ett användbart hjälpmedel vid beräkning av moment i tre dimensioner.

Sammanhang: Vektorprodukt är användbart för att beräkna momentet då en godtycklig kraft i rummet ger vridverkan kring flera axlar. Det inträffar speciellt i samband med *jämvikts-beräkning i tre dimensioner*.

Uppgift: Hur beräknar man momentet för en kraft med avseende på en godtycklig punkt i rummet?

Metod: Momentvektorn kan beräknas med en vektorprodukt. För att göra det krävs en momentpunkt (O i figuren), en avståndsvektor ***r*** som går från momentpunkten O till någon godtycklig punkt på kraftens verkningslinje och så behövs kraften ***F*** uttryckt som vektor. Momentvektorn $\boldsymbol{M_o}$ kan då beräknas som kryssprodukten nedan. Momentvektorn ritas som en dubbelpil för att skilja den från krafterna.

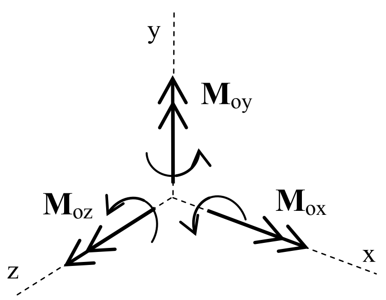


$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} \right\|$$

där $\boldsymbol{F} = F_x\,\mathbf{e_x} + F_y\,\mathbf{e_y} + F_z\,\mathbf{e_z}$ och $\boldsymbol{r} = r_x\,\mathbf{e_x} + r_y\,\mathbf{e_y} + r_z\,\mathbf{e_z}$

$$\mathbf{M}_O = \big((r_yF_z - r_zF_y),\ (r_zF_x - r_xF_z),\ (r_xF_y - r_yF_x)\big)$$

Resultatet $\boldsymbol{M_o}$ är en vektor vars komposanter ger kraftens moment kring alla tre koordinat-axlarna med positiv vridningsriktning definierad i figuren nedan.



Positiv vridningsriktning är den riktning en höger-gängad skruv skall vridas för att röra sig i positiv koordinatriktning.

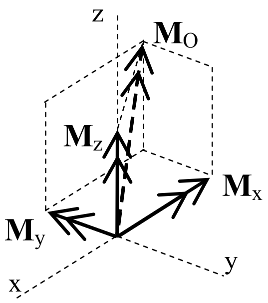
Alternativ: Höger hand kring en axel med tummen i positiv koordinatriktning då pekar fingrarna i positiv vridningsriktning för respektive komposant.

Resultat: Med vektorprodukt kan du beräkna momentkomposanter kring tre axlar samtidigt i en enda matematisk operation. Det är ibland effektivare än att göra projektioner på koordinatplanen och räkna tvådimensionellt genom att multiplicera en krafts komposant med det vinkelräta avståndet ifrån komposantens verkningslinje till aktuell koordinataxel.

Exempel: Beräkna momentet som kraften ***F*** nedan ger kring punkten O om en vektor till verkningslinjen ges av ***r*** nedan. Uttryck momentet som en vektor.

$$\boldsymbol{F} = -6.0\,\mathbf{e_x}+7.5\,\mathbf{e_y}+3.0\,\mathbf{e_z}\ \text{(kN)} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{r} = 3.0\,\mathbf{e_x}-1.0\,\mathbf{e_y}+1.0\,\mathbf{e_z}\ \text{(m)}$$

Användning av ”Sarrus regel” från kursen i linjär algebra ger resultatet



$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 3 & -1 & 1 \\ -6.0 & 7.5 & 3.0 \end{bmatrix} = (\text{-}10.5,\ \text{-}15,\ 16.5)\ \text{(kNm)}$$

Komposanternas riktningar ges i figuren. Kraften vrider kring x-axeln med -10.5 kNm, kring y-axeln med -15.0 kNm och kring z-axeln med 16.5 kNm.

Resulterande moment $\boldsymbol{M_0}$ har riktning enligt figuren och storleken är

$$M_O = \sqrt{(-10.5)^2 + (-15)^2 + 16.5^2} = 24.6\,\text{kNm}$$

Verkan av momentvektorn $\boldsymbol{M_0}$ kan ges en konkret tolkning om man tänker sig att man sätter en stor skruvmejsel i origo i $\boldsymbol{M_0}$ -riktningen och vrider enligt högerskruvregeln med momentet 24.6 kNm.

Relaterade begrepp: Eftersom man behöver uttrycka kraften som en vektor är *Kraft i tre dimensioner* ett relaterat begrepp. Momentberäkning enligt ovan kommer till användning i samband med *jämviktsberäkning i tre dimensioner*.