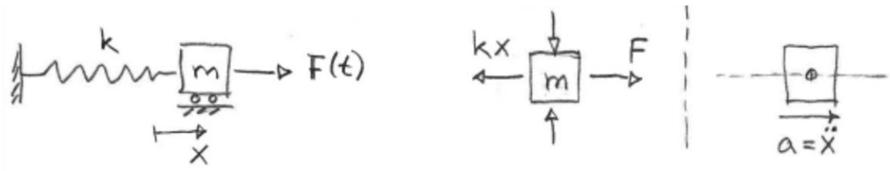
BEGREPP: *Odämpade svängningar*

Om man rubbar ett mekaniskt system ur sitt jämviktsläge uppkommer svängningar om systemet kan ge en återförande kraft. Svängningar kan vara fria eller påtvingade. En fri svängning sker i en bestämd frekvens – den s.k. egenfrekvensen eller naturliga frekvensen. Om systemet är odämpat avklingar inte amplituden i den fria svängningen. En påtvingad svängning uppkommer då systemet utsätts för en periodisk kraftverkan.

Introduktion:

Vi betraktar bara odämpade system med endast en massa i rörelse enligt figuren till vänster nedan. Systemet består av en linjär elastisk fjäder och en massa.

Betrakta först fallet med den yttre kraften *F*=0. Vi kan få en fri svängning genom att förskjuta massan en sträcka *x* och sedan släppa. Då uppkommer en svängning kring jämviktsläget som ges av *x*=0 då fjädern antas vara ospänd.



En ideal linjärelastisk fjäder ger inga förluster och svängningen fortsätter med konstant amplitud så länge vi inte påverkar systemet. Svängningen sker med en bestämd frekvens - egenfrekvensen - som ges av storleken på fjäderkonstanten *k* och massan *m*.

Antag nu att vi lägger på en yttre kraft *F* som är periodisk av typen harmonisk funktion d.v.s. en sinus- eller cosinusfunktion. Den växlande kraften kommer då att sätta systemet i rörelse med kraftens frekvens. Ett viktigt fall är då när den växlande kraftens frekvens sammanfaller med systemets egenfrekvens. Då växer svängningens amplitud *x* obegränsat och vi får s.k. resonans. Detta är något man i regel försöker undvika i tekniska system.

Om vi betraktar friläggningen av massan i figuren till höger kan vi genom Newtons andra lag bestämma den s.k. rörelseekvationen för massa-fjädersystemet enligt nedan:

$\text{NII}\ (\rightarrow):\ -kx + F = m\ddot{x}$ eller $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}$

Detta är en differentialekvation med tiden som variabel. Prickarna anger tidsderivata och accelerationen är andra tidsderivatan av sträckan. I kursen tittar vi på två lösningar till rörelseekvationen. Det är de två fallen beskrivna ovan, d.v.s. fri svängning (med *F*=0) och påtvingad svängning då kraften *F* är harmonisk. Vi betraktar bara den s.k. stationära lösningen som anger svängningens amplitud vid olika frekvenser på den harmoniska kraften.

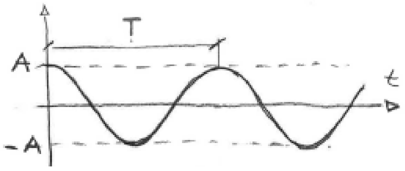
Sammanhang: *Svängningar* förekommer i många tekniska system. Några exempel: En stämgaffel ger ifrån sig en ton som bestäms av dess egenfrekvens. En byggnad svajar i vinden, en gångbro vibrerar om man springer eller hoppar på den och en tvättmaskin kan skapa påtvingade svängningar i ett bjälklag.

I matematiken kallas den fria svängningen för homogen lösning och den påtvingade stationära svängningen för partikulärlösning.

Uppgift: Hur räknar man med *svängningar*?

Metod: Vi begränsar oss till att lösa rörelseekvationen för fri svängning och för påtvingad harmonisk svängning.

Fri svängning: Det visar sig att både $\cos\omega_n t$ och $\sin\omega_n t$ är lösningar till rörelseekvationen om $\omega_n^2=k/m$ d.v.s. kvoten mellan styvhet och massa. Då är ω_n systemets egenvinkelfrekvens som kopplar till periodtiden T i svängningen som $\omega_n=2\pi/T$. Se figuren nedan illustrerat med en cosinuslösning med amplitud A.



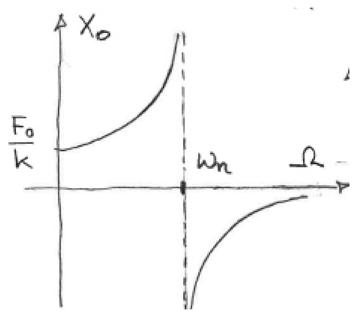
Den fria svängningen egenfrekvens eller som den också kallas – naturliga frekvensen - ges av $f_n=1/T$ och räknas i Hz som har dimensionen s^{-1}. Vi får alltså sambandet

$$2\pi f_n=\sqrt{k/m}$$

som ger den fria svängningens frekvens bestämd genom styvhet och massa. Större styvhet ger alltså högre frekvens och motsvarande ger större massa lägre frekvens.

Påtvingad svängning: Med kraftstyrning enligt $F(t)=F_0 \sin\Omega t$ följer förskjutningen kraften med samma frekvens i det stationära läget. Man kan visa att förskjutningsamplituden x_0 hos massan ges av

$$x_0=\frac{F_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$



där F_0 är kraftens amplitud. Diagrammet visar grafiskt hur massans amplitud beror av den påtvingade vinkelfrekvensen Ω. Man kan speciellt notera att då kraftens vinkelfrekvens sammanfaller med egenvinkelfrekvensen så går massans amplitud mot oändligheten. Detta kallas resonans och begränsas i verkliga system av dämpning men kan ändå innebära stora risker. Man ser också att om man lyckas passera resonansen och höjer frekvensen så börjar kraften och massans förskjutning att motverka varandra så att massans amplitud går mot noll.

Resultat: Rörelseekvationen och dess lösningar ger besked om systemets egenfrekvens som bestämmer den fria svängningen frekvens och är samtidigt den frekvens som ger resonans vid påtvingad svängning.

Exempel: En stor motor som har en roterande obalans placeras på ett bjälklag. Systemet kan betraktas som ett massa-fjädersystem med styvheten k=3MN/m och (den rörliga) massan m=1200kg. Obalansen i motorn påverkar den rörliga massan med en kraftamplitud F_0=6kN och en frekvens som bestäms av motorns varvtal.

a) Bestäm systemets egenvinkelfrekvens ω_n och även egenfrekvensen f_n samt den naturliga periodtiden T.

b) Bestäm även svängningsamplituden för påtvingade svängningar med kraftamplituden enligt ovan. Undersök tre olika vinkelfrekvenser på kraftstörningen i förhållande till systemets resonansfrekvens: $\Omega = 0.1\omega_n$, $0.9\omega_n$ och $2\omega_n$

Lösning:

a) Sambandet $\omega_n^2=k/m$ ger att egenvinkelfrekvensen ω_n=50rad/s. Naturliga svängnings-frekvensen fås ur $\omega_n=2\pi f_n$ som f_n=8.0Hz och periodtiden ges av $f_n=1/T$ till T=0.13s.

b) Amplituden x_0 för vibrationen vid de olika frekvenserna för kraftamplituden 6kN ges av uttrycket bredvid diagrammet ovan. Resultat:

Ω	$0.1\omega_n$ = 5rad/s	$0.9\omega_n$ = 45rad/s	$2\omega_n$= 100rad/s
x_0	2.0mm	10.5mm	- 0.67mm

Det första värdet motsvarar s.k. kvasi-statisk belastning och svängningsamplituden styrs nästan helt av fjädern genom termen F_0/k. Nära resonans som det mellersta värdet representerar, får vi stor amplitud. Det sista värdet är det minsta och negativt eftersom kraft och förskjutning går i motsatt riktning då kraftens frekvens är högre än resonansfrekvensen. Man säger att kraft och förskjutning är ur fas och ju högre frekvensen är desto mer påverkar massan amplituden på ett bromsande sätt.

#

Relaterade begrepp: Energisatsen visar att odämpade fria svängningar är en ren omvandling av energi från energi i fjädern i vändläget till rörelseenergi i det ospända läget. I en dämpad svängning sker det energiomvandling till värme på grund av t.ex. friktion eller visköst motstånd och svängningen klingar av för att till slut avstanna.