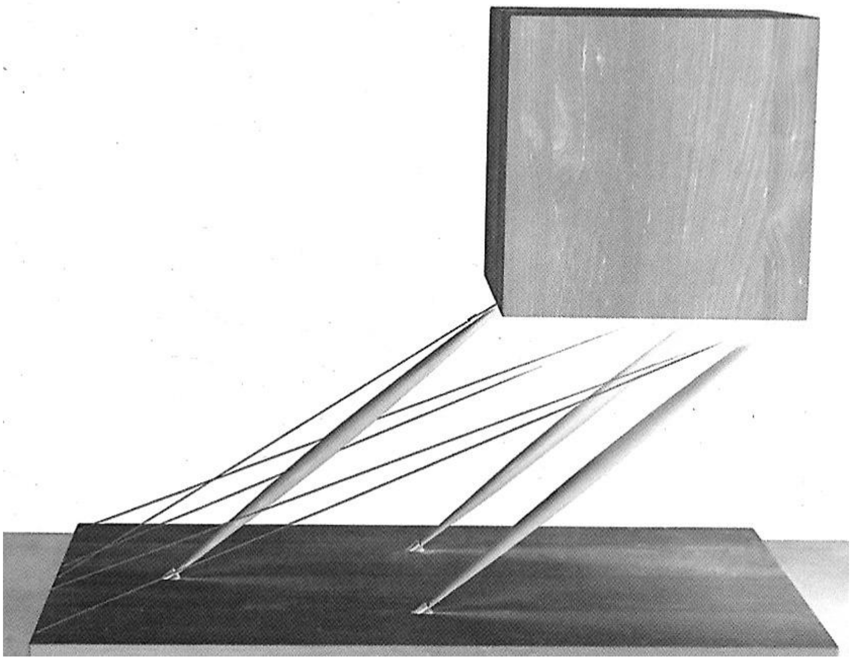
KRAFTER



Peter Gustavsson
Per-Erik Austrell

Förord

Denna skrift har tagits fram för att utgöra kurslitteratur i kursen Mekanik för Industri Design vid Lunds Tekniska Högskola.

Skriften börjar med en introduktion till statik och fortsätter med en noggrannare genomgång av de olika begreppen, kraft, moment och jämvikt. Texten utgår från exempel ur vardagslivet för att på så sätt förklara grundläggande begrepp inom statiken på ett enkelt sätt. Skriften är begränsad till plana, tvådimensionella problem.

Peter Gustavsson
Per-Erik Austrell
Lund i januari 2003

Innehåll

1. Introduktion till statik

Vad är statik?

Klassisk mekanik är grundläggande för allt ingenjörsarbete och ger nödvändiga baskunskaper för bl.a. hållfasthetsläran. Den ger teknisk allmänbildning och tränar matematiskt modelltänkande och problemlösning.

Klassisk mekanik brukar delas upp i statik och dynamik. Dynamiken behandlar krafter som påverkar kroppar i rörelse. Statiken behandlar kroppar i vila under inverkan av krafter. I denna skrift kommer endast statik att beröras.

Ett viktigt begrepp i statiken är jämvikt, som innebär att de krafter som verkar på en kropp ska balanserar varandra. Summan av alla krafter är noll och kroppen befinner sig därför i vila. En jämviktsberäkning inleds alltid med att kroppen friläggs och de verkande krafterna sätts ut. Krafterna kan antingen vara kända pålagda krafter eller okända kontaktkrafter. För att kunna beräkna okända krafter krävs bl.a. kännedom om hur man räknar med krafter, hur moment beräknas, hur kraftpar hanteras.

Förutom tyngdkraft behandlar statiken endast yttre krafter. Alla kroppar betraktas dessutom som stela och odeformerbara. Inre krafter och deformationer behandlas i hållfasthetsläran.

Frågor att besvara

När du läser detta avsnitt ska du bl.a. söka svar på följande frågor:

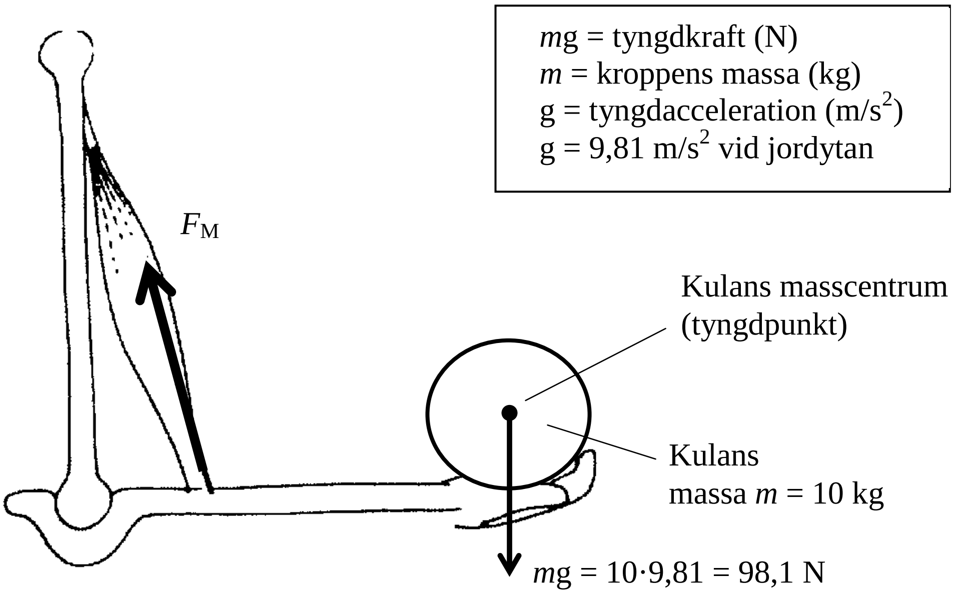
- Hur beräknas tyngdkraft? Genom vilken punkt verkar den?
- Kan du förklara Newtons lagar?
- Vad menas med idealiseringen punktkraft?
- Vilka villkor gäller för jämvikt av två parallella krafter?
- Vilka villkor gäller för jämvikt vid krafter i godtycklig riktning?
- Vad menas med begreppet partikel?
- När används momentjämvikt?
- Vad menas med begreppet stel kropp?

Vad är kraft?

Den vanligaste kraften som vi alla ständigt känner av här på jordytan är tyngdkraften, mg. Tyngdkraften upplever vi tydligt när vi t.ex. lyfter ett tungt föremål som har en massa m.

Tyngdkraften verkar alltid nedåt mot jordytan och verkar genom kroppens masscentrum, se t.ex. kulan i figur 1. Vid jordytan är tyngdaccelerationen $g = 9{,}81\ m/s^2$. Ett föremål som väger 10 kg påverkas av tyngdkraften $mg = 10 \cdot 9{,}81 = 98{,}1$ N.

mg = tyngdkraft (N)
m = kroppens massa (kg)
g = tyngdacceleration (m/s^2)
g = 9,81 m/s^2 vid jordytan

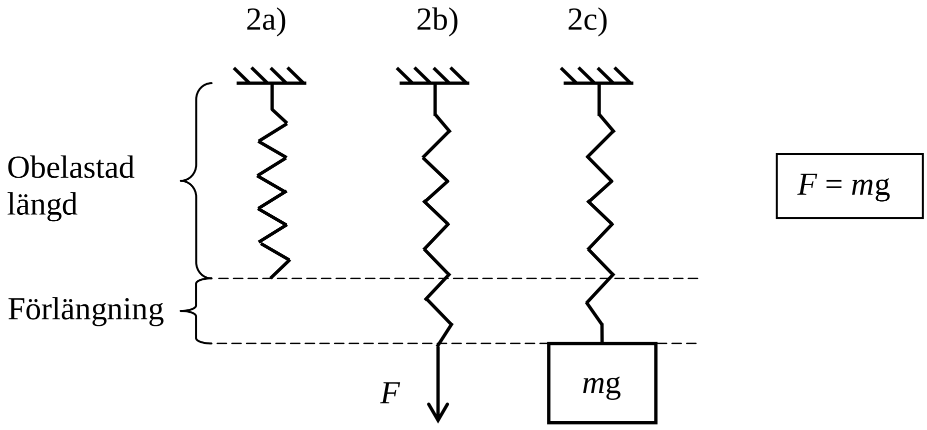


Figur 1. Med hjälp av t.ex. armens muskler balanseras tyngdkraften *m*g.

På grund av tyngdkraften uppstår oftast andra krafter. För att t.ex. hålla kvar kulan så att den inte faller krävs att muskelkraften F_M är tillräckligt stor för att balansera den tyngdkraft som verkar nedåt på kulan, se figur 1.

För att mäta kraft kan vi använda oss av en dynamometer. En sådan består av en fjäder vars förlängning är ett mått på kraftens storlek. När vi drar i fjädern känner vi av ett visst motstånd. Fjädern vill hålla emot och återta sin ursprungliga längd.

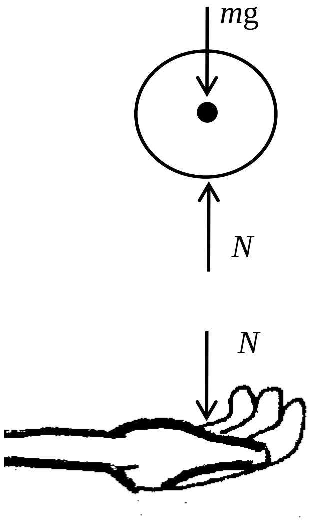
En obelastad fjäder har en viss längd, se figur 2a. Ju mer fjädern belastas desto mer förlängs den, se figur 2b. Om du drar i fjädern med en viss kraft F kan kraftens storlek mätas genom att belasta fjädern med en vikt som ger samma förlängning, se figur 2c. Viktens massa m multiplicerat med tyngdaccelerationen g ger kraftens storlek, dvs $F = mg$. Därigenom kan vi bestämma storleken på kraften i fjädern vid en viss förlängning.



Figur 2. Med hjälp av en fjäder kan en krafts storlek mätas.

Andra vanliga krafter är kontaktkrafter som verkar i kontaktytan mellan olika kroppar.

Kulan hindras från att falla p.g.a. kontaktkraften som finns mellan handen och kulan, se figur 3. Tas handen bort faller kulan nedåt. För att den ska hållas kvar i samma läge krävs att kontaktkraften verkar uppåt och är lika stor som den nedåtriktade tyngdkraften mg dvs. kraftbalans ska gälla.



Handen påverkar kulan med en uppåtriktad kraft N. Kraften N krävs för att kraftbalans ska gälla.

Kraftbalans $\Rightarrow$ $N = mg$

Handen känner av samma kraft fast motriktad. Du känner att kulan påverkar handen nedåt.

Figur 3. I kontaktytan mellan handen och kulan finns en kontaktkraft *N*.

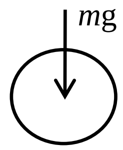
Newtons lagar

Den engelske fysikern Isaac Newton formulerade i slutet av 1600-talet tre lagar. Med hjälp av figur 3 kan dessa lagar förklaras.

Lag II: **Sambandet mellan kraft och acceleration:**

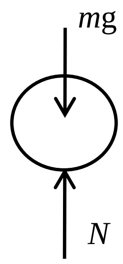
$$\Sigma F = m\,a$$

Om vi inte håller kulan med handen utan låter denna falla fritt kommer endast tyngdkraften *m*g att verka på den. Summa krafter dvs tyngdkraften *m*g ger vikten en acceleration nedåt.



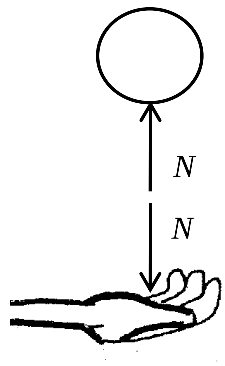
Lag I **Tröghetslagen:** $\Sigma F = 0$

Genom att hålla kulan med handen tillfogas en kontaktkraft *N* som förhindrar denna ifrån att falla. När kulan befinner sig i vila utan att accelerera råder kraftbalans, dvs *N* = *m*g. Krafterna tar ut varandra, dvs summa krafter är noll.



Lag III **Lagen om aktion och reaktion.**

Handen påverkar kulan med kontaktkraften *N* och handen känner av samma kraft fast motriktad.

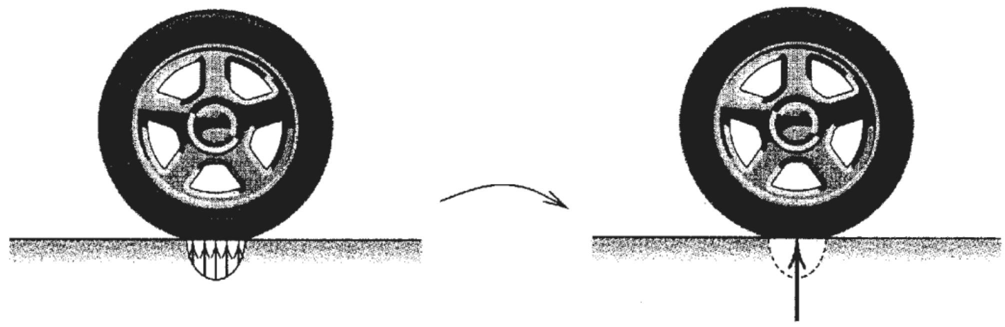


Punktkrafter

Inom mekaniken ingår en rad idealiseringar. Den kanske viktigaste är den som leder till begreppet punktkraft. I exemplen innan har t.ex. tyngdkraft och kontaktkraft betraktats som punktkrafter. Dessa är egentligen fördelade laster som har ersatts av koncentrerade laster.

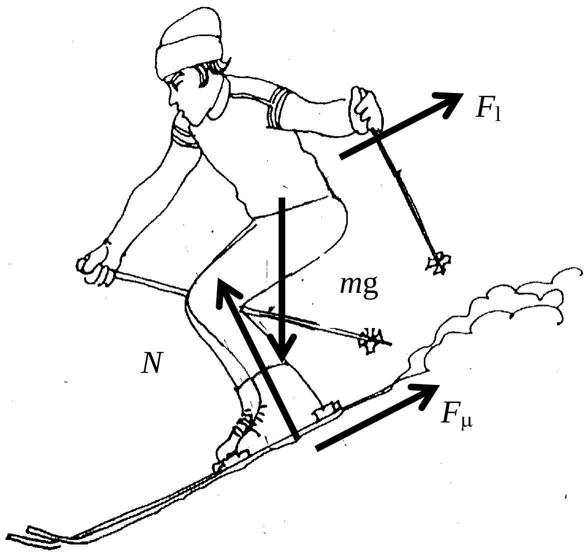
Tyngdkraften är en volymskraft men ersätts med en punktkraft som verkar genom tyngdpunkten.

I figur 4 visas ett exempel med ett bilhjul där en fördelad kontaktkraft ersätts med en koncentrerad punktkraft.



Figur 4. Fördelad kontaktkraft ersätts med koncentrerad punktkraft.

Skidåkaren i figur 5 påverkas av ett antal krafter. Samtliga krafter är i verkligheten fördelade krafter som är ersatta med koncentrerade punktkrafter. Det luftmotstånd som skidåkaren känner av är t.ex. en fördelad ytkraft som är ersatt med en punktkraft.



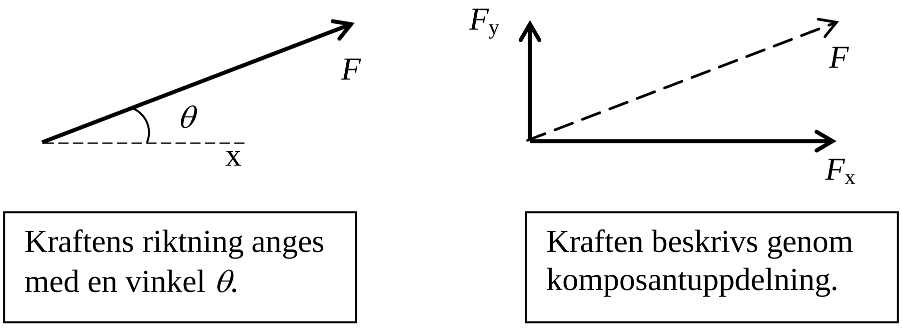
N = normalkraft
F_μ = friktionskraft
F_l = luftmotstånd
mg = tyngdkraft

Figur 5. En skidåkare utsätts för ett antal krafter. Samtliga krafter är i verkligheten fördelade krafter som är ersatta med koncentrerade punktkrafter.

Krafters storlek och riktning

Lägg märke till att krafterna som påverka skidåkaren har olika riktningar! Friktionskraften och luftmotståndet verkar motsatt rörelseriktningen. Normalkraften verkar vinkelrätt mot underlaget.

För att en kraft ska var bestämd i ett visst sammanhang krävs att denna är känd till storlek och riktning. Ett sätt att bestämma riktningen är att ange vinkeln till x-axeln, se figur 6. Ett annat sätt att beskriva en kraft är att dela upp denna i en andel som verkar i x-riktning och en som verkar i y-riktning. Denna uppdelning kallas för komposantuppdelning och behandlas i kapitel 2.



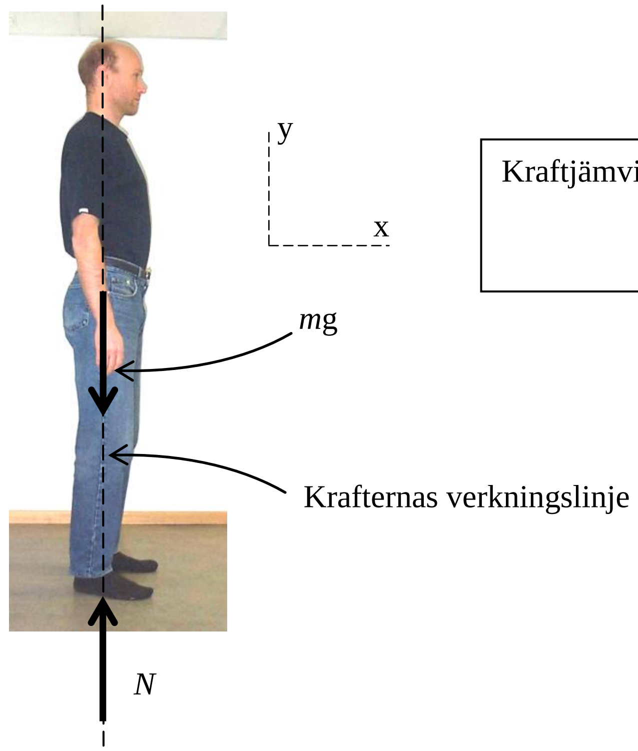
Figur 6. Olika sätt att beskriva en kraft till storlek och riktning.

Jämvikt vid två parallella krafter

För att en kropp ska befinna sig i vila eller förflytta sig med konstant hastighet krävs att alla krafter är i balans med varandra (Newtons 1:a lag). Inom statiken kallas detta för jämvikt. Jämvikt är ett viktigt begrepp och kommer att beröras systematiskt i kapitel 4.

När vi t.ex. står stilla rakt upp på ett plant underlag påverkas vi av tyngdkraften mg nedåt samt av en kontaktkraft N som verkar uppåt. Kontaktkraften N verkar i kontaktytan mellan fötterna och underlaget. Den uppåtriktade kontaktkraften N verkar vinkelrätt mot underlaget och kallas därför för normalkraft N.

För att kraftjämvikt ska råda krävs att normalkraften N är motriktad och lika stor som tyngdkraften mg samt att dessa verkar längs samma verkningslinje, se figur 7. Där endast två krafter verkar är detta är ett krav för att jämvikt ska råda. Begreppet verkningslinje förklaras i kapitel 2.



Kraftjämvikt $\Rightarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow$
$N - mg = 0 \Rightarrow$
$N = mg$

Figur 7. Normalkraften *N* och tyngdkraften *mg* är lika stora och verkar längs samma verkningslinje.

Sammanfattning:

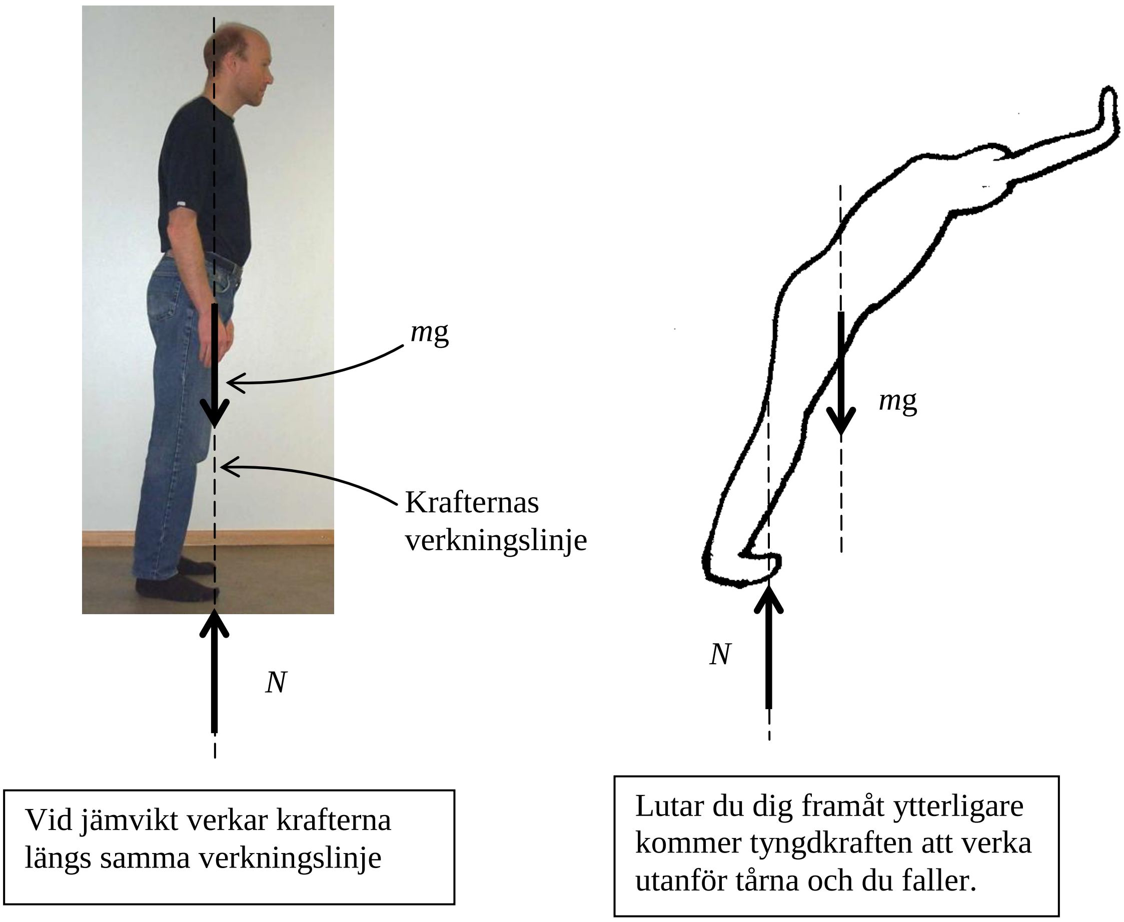
Vid endast två krafter gäller vid kraftjämvikt att:

- krafterna är lika stora och motriktade
- krafterna verkar längs samma verkningslinje
- det räcker med en balansekvation t.ex. $\Sigma F_y = 0$

Att två krafter måste verkar längs samma verkningslinje för att jämvikt ska gälla visas tydligt i nästa exempel.

Om du nu lutar dig sakta framåt kommer tyngdpunkten att förflyttas framåt. Eftersom krafterna ska verka längs samma verkningslinje kommer även normalkraftens läge att flyttas ut mot tårna, se figur 8. När du har lutat dig så långt det går framåt är normalkraften placerad längs ute vid tårna. Lutar du dig lite ytterligare faller du och det råder inte jämvikt längre.

Orsaken till att du faller är att krafterna inte längre verkar längs samma verkningslinje. Krafterna ger en vridande verkan i förhållande till varandra som gör att du stjälper, se figur 8.

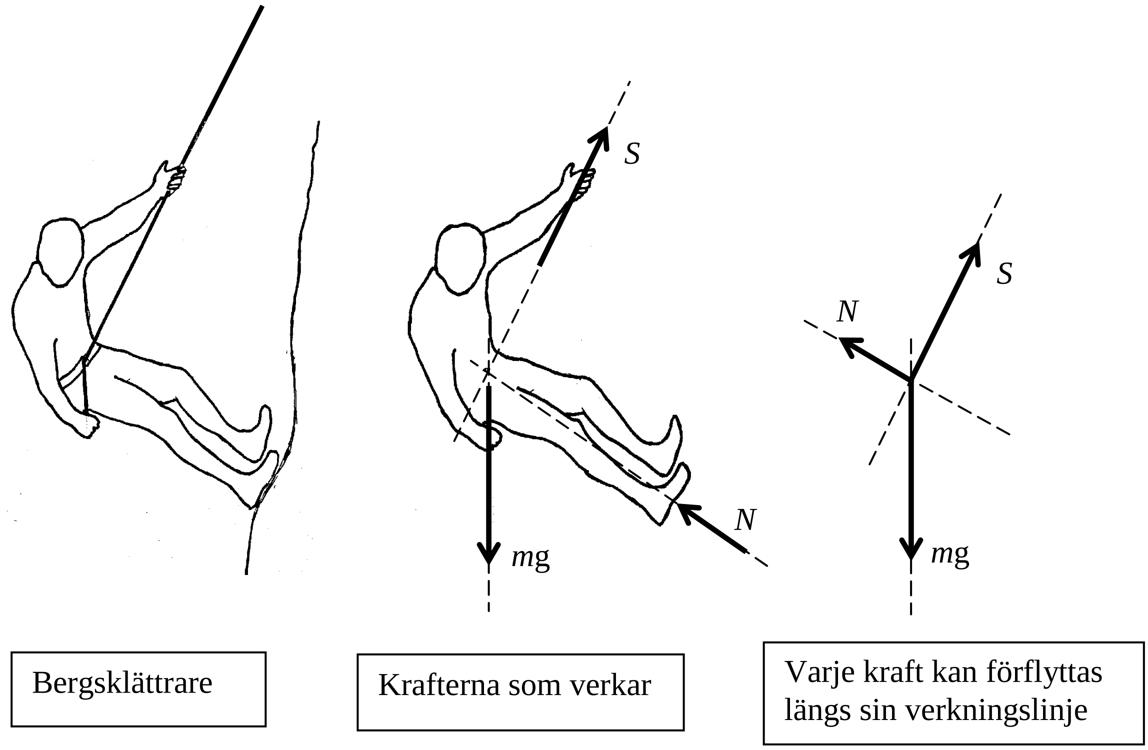


Figur 8. När du lutar dig framåt så mycket som möjligt är normalkraften *N* placerad ute vid tårna. Lutar du dig ytterligare faller du.

Jämvikt vid krafter i godtycklig riktning

Betrakta bergsklättraren i figur 9. Bergklättraren hänger i en lina som lutar snett uppåt samtidigt som han tar spjärn med fötterna mot bergsväggen. Bergsklättraren utsätts för tyngdkraften mg, linkraften S och kontaktkraften N mot bergsväggen. Vi antar att krafternas verkningslinje skär varandra i tyngdpunkten.

Krafterna verkar inte längs samma verkningslinje utan var och en av krafterna har sin egen verkningslinje.



Figur 9. De tre krafternas verkningslinje skär varandra i en och samma punkt.

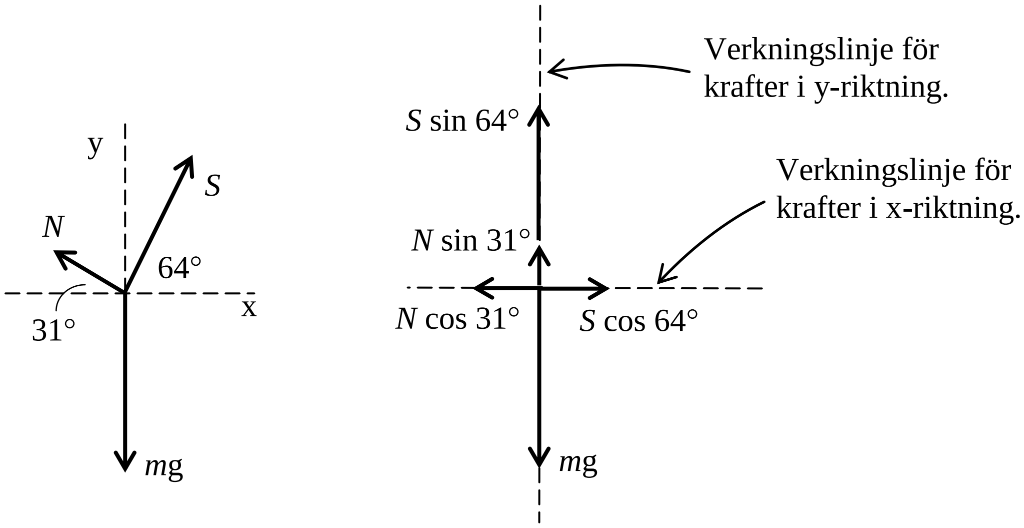
En kraft kan alltid förflyttas längs sin verkningslinje, varför förklaras i kapitel 2. Krafterna som påverka bergsklättraren kan därmed förflyttas till den gemensamma skärningspunkten.

För att bergklättraren inte skall falla nedåt p.g.a. tyngdkraften krävs att linkraften S och normalkraften N tillsammans ger en tillräckligt stor kraftverkan uppåt för att hålla emot tyngdkraftens verkan nedåt. Eftersom linkraften S och normalkraften N även verkar i horisontalled måste dessa balansera varandra i denna riktning, dvs deras horisontella verkan måste vara lika stora och motsatt riktade.

När två krafter verkar längs samma verkningslinje är det enkelt att utföra en jämviktsberäkning. Hur gör vi då om samtliga krafter verkar längs olika verkningslinjer?

Om krafterna verkar i olika riktningar, dvs inte är parallella är komposantuppdelning en metod som förenklar denna typ av problem. Vid komposantuppdelning delas varje kraft upp i två vinkelräta riktningar. Vanligtvis delas krafter upp i en x-riktning och en y-riktning. Efter att komposantuppdelningen är utförd verkar samtliga krafter längs samma verkningslinje, antingen i x- eller y-riktningen, se figur 10.

För att kunna dela upp i komposanter krävs t.ex. att kraftens lutning är känd. I detta fall antar vi att normalkraften *N* lutar 31° och linkraften *S* lutar 64°, se figur 10.



Krafterna verkar i godtycklig riktning.

Efter komposantuppdelning verkar krafterna i två vinkelräta riktningar.

Figur 10. Komposantuppdelning.

När samtliga krafter är uppdelade i komposanter kan sedan en jämviktsberäkning utföras i respektive riktning. Här räcker det inte med en jämviktekvation utan här krävs två stycken jämviktsekvationer, en i x-riktning och en i y-riktning.

Jämvikt i x-riktning:

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow$
$S \cos 64° - N \cos 31° = 0$

Jämvikt i y-riktning:

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow$
$N \sin 31° + S \sin 64° - mg = 0$

I exemplet visas tydligt att ett antal krafter måste samverka för att jämvikt skall råda. Ju mer vertikalt linan lutar, se figur 9, desto mindre behöver normalkraften *N* vara för att jämvikt ska råda.

Komposantuppdelning är oftast en nödvändighet för att kunna beräkna olika krafters storlek. När denna är gjord kan t.ex. okända krafter enkelt beräknas med hjälp av jämviktsekvationer.

Ett viktigt begrepp som du därför ska känna till är komposantuppdelning som behandlas i kapitel 2.

Sammanfattning:

Där

- fler än två krafter finns
- krafterna är inte parallella
- krafternas verkningslinjer korsar varandra i en och samma punkt

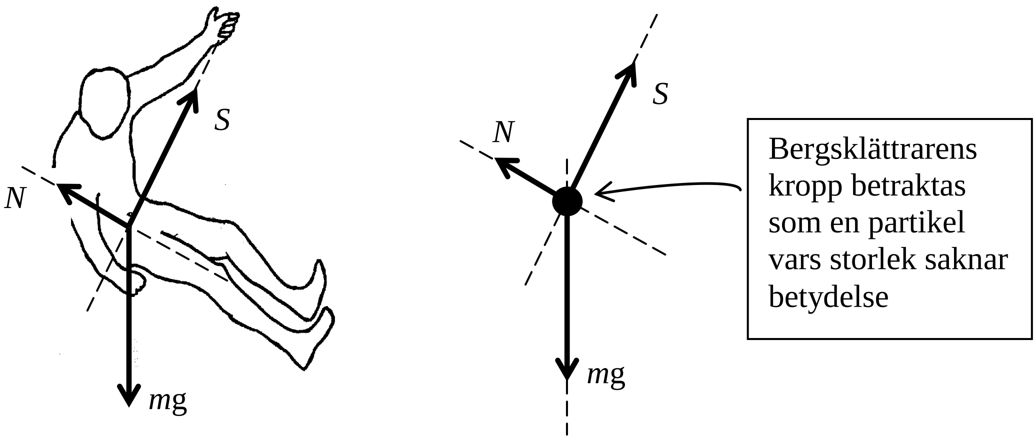
krävs

- två jämviktsekvationer:
  - kraftjämvikt i x-riktning, $\Sigma F_x = 0$
  - kraftjämvikt i y-riktning, $\Sigma F_y = 0$

Partikel

Mekanik handlar mycket om att behärska modelltänkande. Det innebär att verkligheten ersätts med en enkel modell som beräkningsmässigt kan hanteras och som beskriver verklighetens fysikaliska fenomen tillräckligt noga. En viktig modell är partikelmodellen. Denna används för kroppar vars storlek saknar betydelse.

Bergsklättraren ifrån figur 9 visas återigen här, se figur 11. Av figuren framgår att krafterna korsar varandra i en och samma punkt. Därför saknar bergsklättrarens storlek betydelse. Endast den punkt där krafternas verkningslinje skär varandra är av intresse. Bergsklättraren kan därför betraktas som en partikel som är placerad i skärningspunkten.



Figur 11. Partikelmodellen används för kroppar vars storlek saknar betydelse.

Moment och momentjämvikt

I figur 8 visades ett exempel på hur långt fram man kan luta sig utan att falla. Om vi nu lutar oss ytterligare framåt är vi tvungna att ta stöd mot något för att inte falla framåt t.ex. en vägg, se figur 12. I figuren visas hur krafterna N_A och F verkar i kontaktytan mellan fötterna och golvet och kraften N_B som verkar i kontaktytan mellan väggen och händerna. Friktionskraften F förhindrar att fötterna glider mot underlaget. Tänk dig t.ex. att underlaget du står på är halt t.ex. is. Då kommer fötterna att glida åt vänster. Friktionskraften F motverkar detta genom att verka åt höger.

Tyngdkraften mg och normalkraften N_A är parallella men verkar inte längs samma verkningslinje. Friktionskraften F och normalkraften N_B är också parallella men verkar inte heller längs samma verkningslinje, se figur 12.

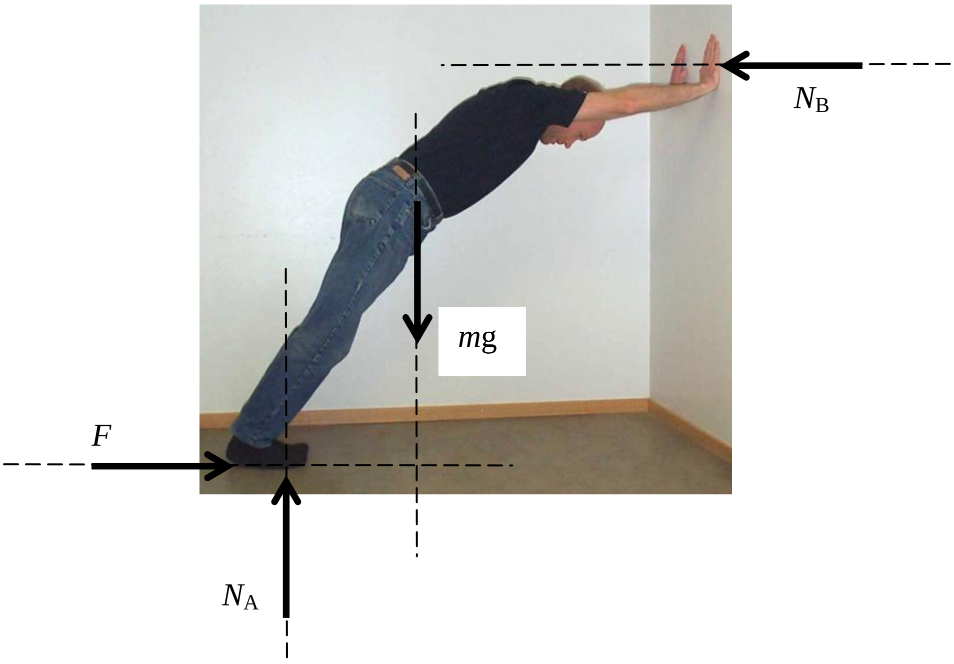
Fortfarande gäller att krafterna ska balansera varandra, dvs kraftjämvikt gäller i x- och y-riktning.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F - N_B = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A - m\mathrm{g} = 0$$

Är personens tyngd given kan normalkraften N_A enkelt räknas ut. Om personen t.ex. väger 60 kg gäller:

$$N_A - 60\mathrm{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = 588{,}6 \text{ N}$$



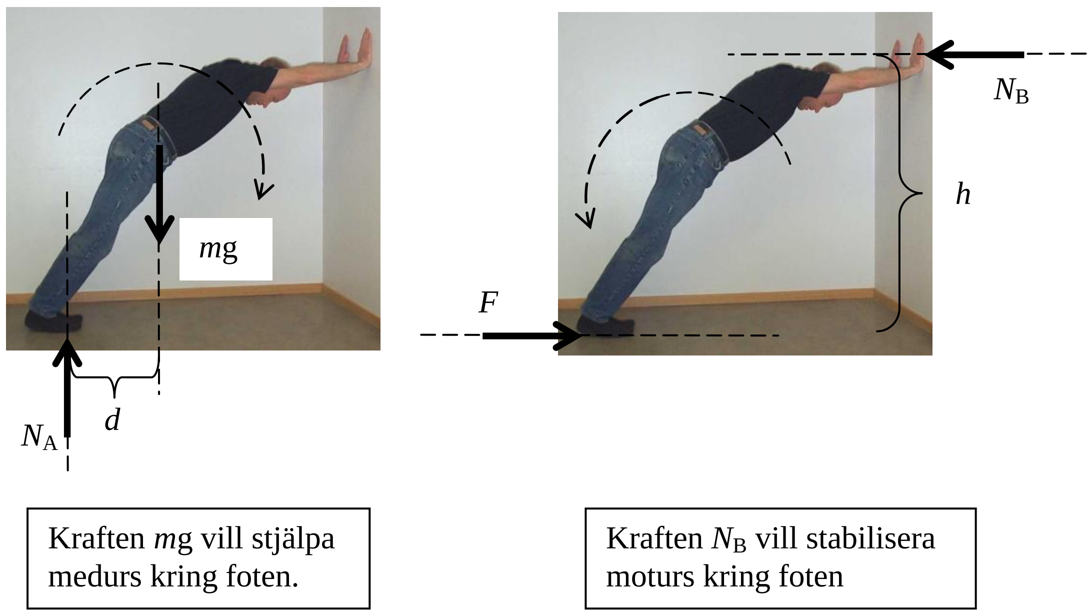
Figur 12. Krafterna verkar inte längs samma verkningslinje.

För att jämvikt ska gälla i x-riktning vet vi att friktionskraften F ska vara lika stor som normalkraften N_B, men vi vet inte hur stora dessa krafter blir. Vi vet bara att dessa är lika stora.

När ett antal krafter med olika verkningslinje inte skär varandra i en och samma punkt räcker det inte med två jämviktsekvationer utan ytterligare något samband behöver utnyttjas. Hur gör vi då?

I figur 13 ser vi att eftersom krafterna inte verkar längs samma verkningslinje kommer krafterna att vrida i förhållande till varandra. Orsaken till att vi faller när vi t.ex. böjer oss framåt är att tyngdkraften mg ger en vridande verkan medurs kring foten, dvs kring den punkt där normalkraften N_A verkar, se figur 13.

På samma sätt ger normalkraften N_B en vridande verkan moturs kring foten.



Figur 13. En stjälpande vridning motverkas av ett mothållande.

Vid jämvikt ska dessa vridningar vara lika stora och verka åt olika håll.

När en kraft ger en vridande verkan kring en viss punkt säger man att kraften utövar ett moment kring denna punkt. Moment beräknas genom att multiplicera kraft med avstånd. Begreppet moment kommer grundligt att förklaras i kapitel 3.

Av figur 13 framgår att den vridande verkan, dvs momentet, beror av avståndet d respektive h.

$$\text{Stjälpande moment} = mg \cdot d$$

$$\text{Mothållande moment} = N_B \cdot h$$

Förutom kraftjämvikt ska således momentjämvikt också gälla, dvs i detta fall blir $mg \cdot d = N_B \cdot h$.

Sammanfattning:

Där

- fler än två krafter finns
- krafterna verkar inte längs samma verkningslinje
- verkningslinjerna korsar inte varandra i en och samma punkt

krävs

- tre jämviktsekvationer:
  - kraftjämvikt i x-riktning, $\Sigma F_x = 0$
  - kraftjämvikt i y-riktning, $\Sigma F_y = 0$
  - momentjämvikt, $\Sigma M = 0$

Stel kropp

När personen i figur 12 lutar sig mot väggen påverkas han av ett antal krafter som inte skär varandra i en och samma punkt. Personen kan därför i detta fall inte betraktas som en partikel. Avståndet mellan krafternas verkningslinje har stor betydelse. Om t.ex. personen flytta fötterna längre ut ifrån väggen samtidigt som händerna flyttas nedåt förändras avstånden och därmed krafternas storlek.

För att personens kropp ska kunna hålla emot de krafter som uppstår krävs att den är stel och odeformerbar. Detta innebär t.ex. att personen som lutar sig mot väggen orkar hålla emot med armarna så att dessa inte viker sig. Vid belastning bibehålls kroppens form utan att den deformeras. Där momentjämvikt ingår måste vi därför använda oss av en stelkroppsmodell. Med stel kropp menas en odeformerbar kropp vars storlek eller utbredning är av betydelse.

Inom mekaniken betraktas alla kroppar som stela vilket är en god approximation i många tekniska sammanhang. Deformerbara kroppar behandlas i hållfasthetsläran.

2 Att räkna med krafter

Frågor att besvara

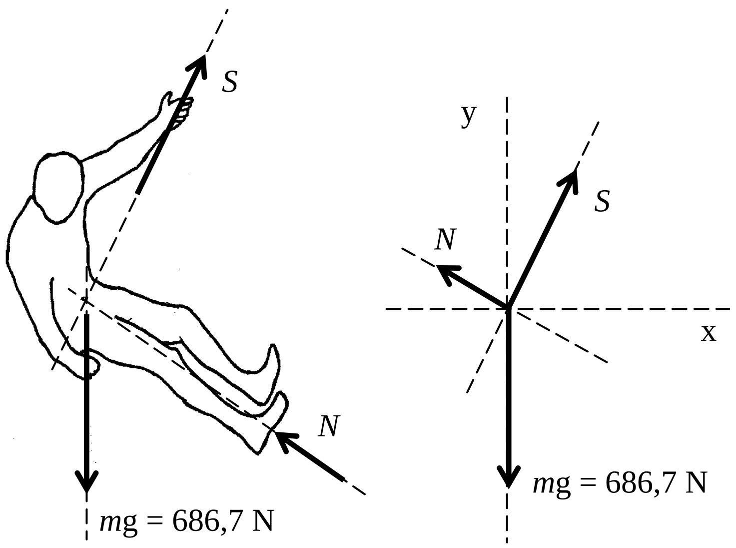
När du läser detta avsnitt ska du bl.a. söka svar på följande frågor:

- Hur uppdelas en kraft i komposanter?
- Vad menas med en krafts verkningslinje?
- Hur kan en kraft uttryckas som en vektor?
- Hur beräknas resultanten?
- Hur används parallellogramlagen?

Uppdelning i komposanter

Vi påverkas av en mängd olika krafter i olika situationer t.ex. tyngdkraft och kontaktkrafterna normalkraft och friktionskraft. I de allra flesta fall verkar krafterna inte längs samma verkningslinje utan de har godtycklig riktning.

Bergsklättraren ifrån kapitel 1 visas här igen, se figur 1. Han påverkas av tre krafter där samtliga krafter har olika riktningar.



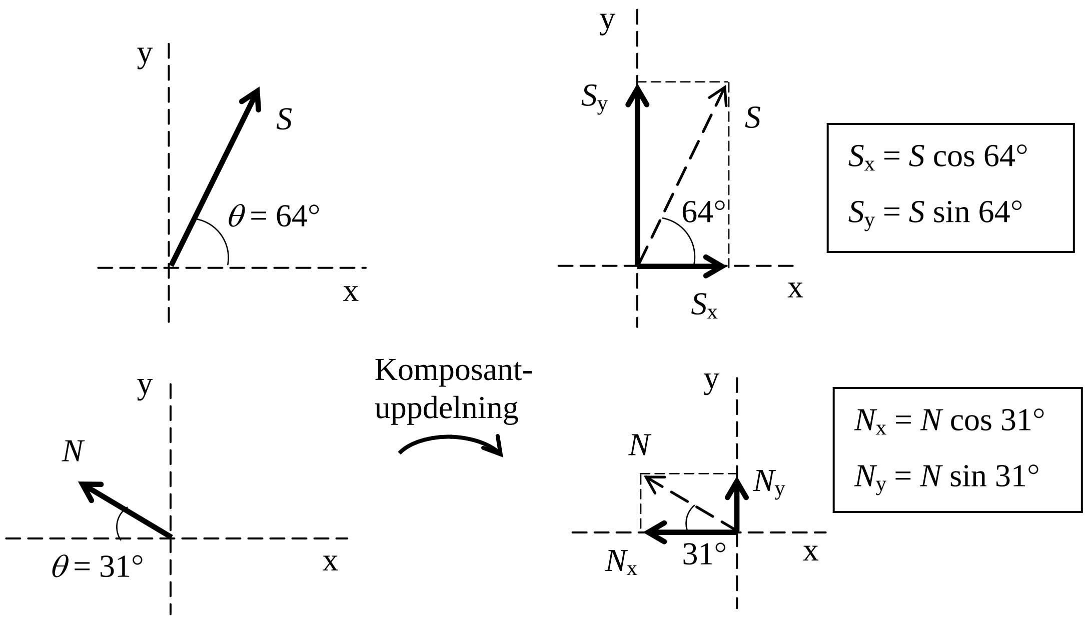
Figur 1. Bergsklättraren påverkas av tyngdkraften *m*g, linkraften *S* och normalkraften *N*.

Vi antar att bergsklättraren väger 70 kg. Tyngdkraften *m*g är därför känd. De övriga krafterna är okända. Vi antar att bergväggen är glatt. Hur kan linkraften *S* och normalkraften *N* beräknas?

För att kunna beräkna de okända krafterna *S* och *N* krävs att riktningen för dessa är känd. Ett sätt är att riktningen är bestämd genom att vinkeln till t.ex. x-axeln är given. Genom att vinkeln är känd kan kraften delas upp i en andel som verkar i x-riktning och en som verkar i y-riktning. Denna uppdelning kallas för komposantuppdelning. Linkraftens komposanter i x- respektive y-riktningen benämns S_x och S_y. Normalkraftens komposanter benämns N_x och N_y.

Komposanterna ersätter den ursprungliga kraften och har samma verkan på kroppen.

I figur 2 visas hur krafterna *S* och *N* kan delas upp i komposanter. I detta fall antar vi att linkraften *S* lutar 64° och normalkraften *N* lutar 31° till x-axeln.

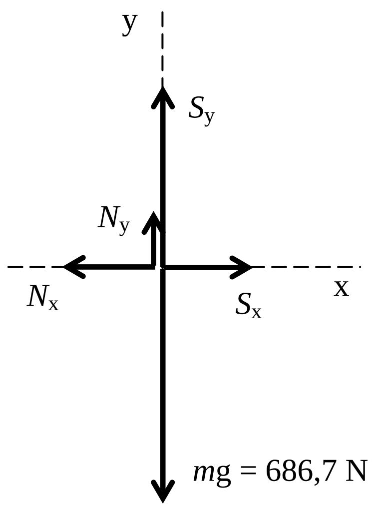


Figur 2. Linkraften *S* och normalkraften *N* delas upp i komposanter.

I kapitel 1 nämndes begreppet kraftjämvikt. Med jämvikt menas att samtliga krafter ska vara i balans med varandra.

Tyngdkraften *m*g verkar nedåt och för att inte bergsklättraren ska falla nedåt krävs att komposanterna N_y och S_y verkar uppåt och tillsammans är lika stora som tyngdkraften *m*g , se figur 3. I horisontalled (x-riktning) verkar komposanterna N_x och S_x och dessa måste vara lika stora och motriktade för att balans ska råda i denna riktning.

Genom att tyngdkraften *m*g är känd kan de två övriga krafterna beräknas med en jämviktsberäkning i respektive riktning.



Jämvikt i x-riktning:

$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow$
$S \cos 64° - N \cos 31° = 0$

Jämvikt i y-riktning:

$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow$
$N \sin 31° + S \sin 64° - 686{,}7 = 0$

De två ekvationerna ger

$S = 590{,}8$ N
$N = 302{,}8$ N

Figur 3. Genom en jämviktsberäkning i x- och y-riktning beräknas de obekanta krafterna *S* och *N*.

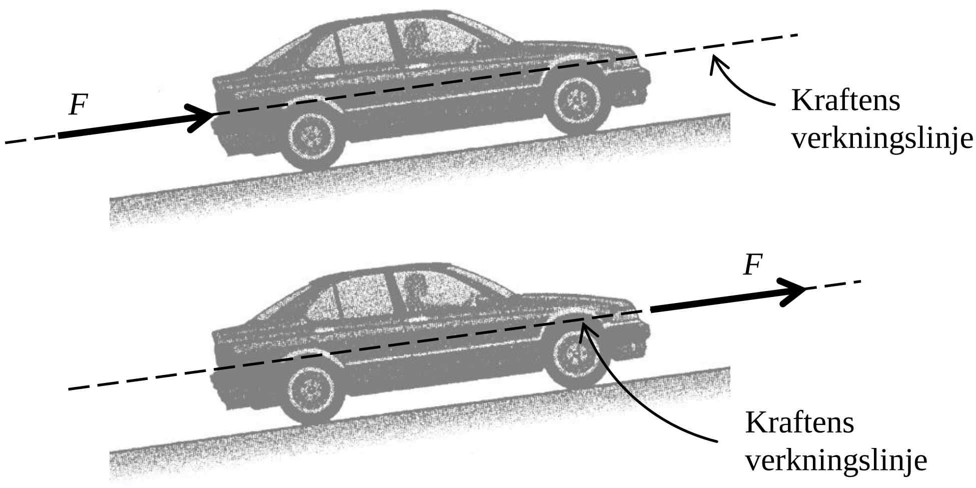
Kraftens verkningslinje

Ett viktigt begrepp, som har nämnts i kapitel 1, är kraftens verkningslinje.

En bil står parkerad i ett motlut, se figur 4. Vad händer om handbromsen inte fungerar? Bilen kommer naturligtvis att rulla bakåt. För att förhindra detta skulle du t.ex. kunna skjuta på baktill med en kraft *F*. Genom detta är bilen i balans, dvs står stilla. Du skulle också kunna hålla emot genom att dra med en lina som ger en kraft framför bilen.

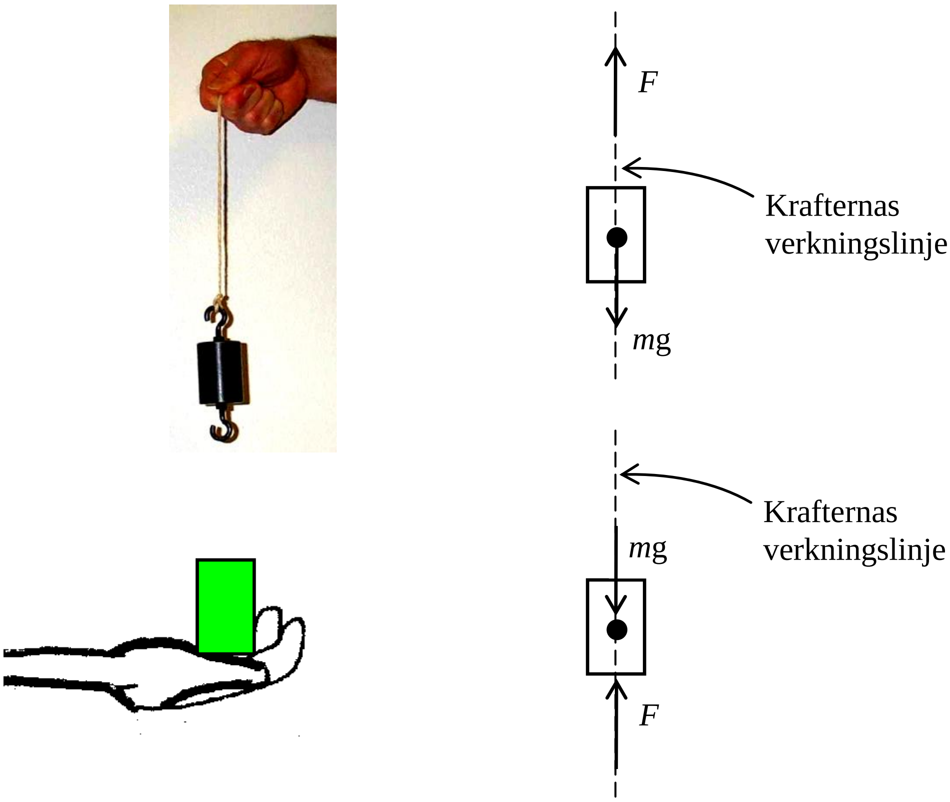
För att en stel kropp, i detta fall bilen, ska vara i kraftjämvikt, dvs stå stilla utan att rulla, spelar det ingen roll var kraften är placerad längs verkningslinjen. Kraften kan placeras var som helst längs sin verkningslinje.

I den klassiska mekaniken betraktas alla kroppar som stela. Kropparna är odeformerbara och endast yttre krafter behandlas. Hur en kropp påverkas av inre krafter behandlas i hållfasthetsläran.



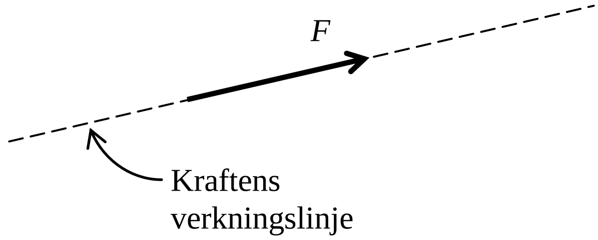
Figur 4. En kraft kan alltid förflyttas längs sin verkningslinje.

Vikten i figur 5 har massan *m*. För att vikten ska befinna sig i jämvikt kan den t.ex. hänga i en lina. I linan verkar en kraft *F*. Linans längd har ingen betydelse utan kraften kan verka var som helst längs linan. Jämvikt kan också uppnås genom att hålla vikten i handen. Den påverkas då av en kontaktkraft *F*. För att beräkna den kraft som krävs för att hålla vikten i jämvikt spelar det ingen roll var den är placerad längs verkningslinjen. Kraften $F = mg$ i båda fallen.



Figur 5. En kraft kan alltid förflyttas längs sin verkningslinje.

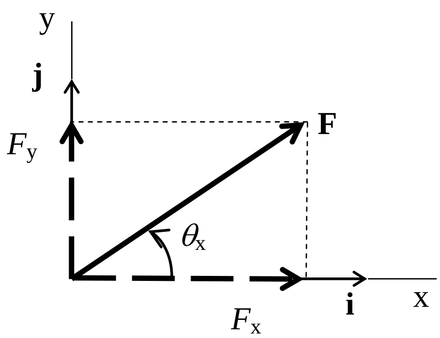
Verkningslinjen är en förlängning i kraftens riktning både framåt och bakåt.



En kraft som verkar på en stel kropp kan alltid förflyttas längs sin verkningslinje. Inom mekaniken betraktas alla kroppar som stela.

Kraft som vektor

Storheter som t.ex. tid, temperatur och massa kan anges med ett enda tal. För att beskriva t.ex. kraft måste man förutom ett tal, storlek, även ange en riktning. Kraft kan därför beskrivas som en vektor, vilken är bestämd till storlek och riktning. I skrift anges en vektor med fetstil.



$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{F} = (F_x, F_y) \\ \text{eller} \\ \mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j}\end{array}\right.$$

i = riktningsvektor i x-riktning.
j = riktningsvektor i y-riktning.

F_x och F_y är kraftens komposanter i x-riktning respektive y-riktning.

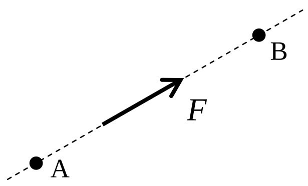
$F_x = F \cos\,\theta_x$

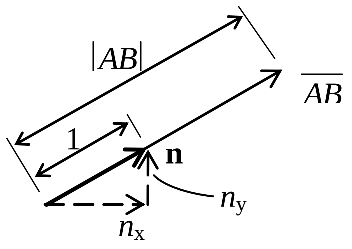
$F_y = F \sin\,\theta_x$

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$$

Riktningsvektorn

Om en krafts verkningslinje passerar genom två kända punkter t.ex. A och B kan kraftens komposanter beräknas med hjälp av en s.k. riktningsvektor **n**. Riktningsvektorn bestäms genom att först beräkna den geometriska vektorn mellan punkterna A och B. Denna vektor benämns $\overline{AB}$ och beräknas genom att ta koordinaterna för B minus koordinaterna för A.





Riktingsvektorn **n** ges av $\frac{\overline{AB}}{|AB|}$ där $|AB|$ är längden av vektorn $\overline{AB}$.

Genom att multiplicera kraftens storlek med riktningsvektorn **n** erhålls kraftvektorn, dvs

$$\mathbf{F} = F \cdot \mathbf{n}$$

Riktningsvektorn **n** har längden 1. Riktningsvektorn anger hur stor förflyttningen är i x-riktning respektive y-riktning då förflyttning längs $\overline{AB}$ är sträckan 1.

Sammanfattning:

En kraft F kan delas upp i två vinkelräta komposanter F_x och F_y

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

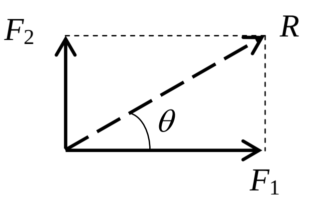
En kraft kan uttryckas som en vektor dvs

$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j}$$

En kraft kan alltid förflyttas längs sin verkningslinje.

Resultant

En kraft kan alltid delas upp i två vinkelräta komposanter. På samma sätt kan två krafter F_1 och F_2 adderas och ersättas med en kraft resultanten R. Resultanten R är ersätter krafterna F_1 och F_2 och har samma verkan. Vinkeln θ anger resultantens riktning. Resultantens verkningslinje går igenom skärningspunkten för de två krafternas verkningslinjer. Är krafterna F_1 och F_2 vinkelräta mot varandra gäller att

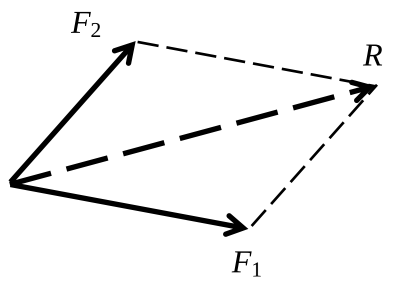


$$R = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}}$$

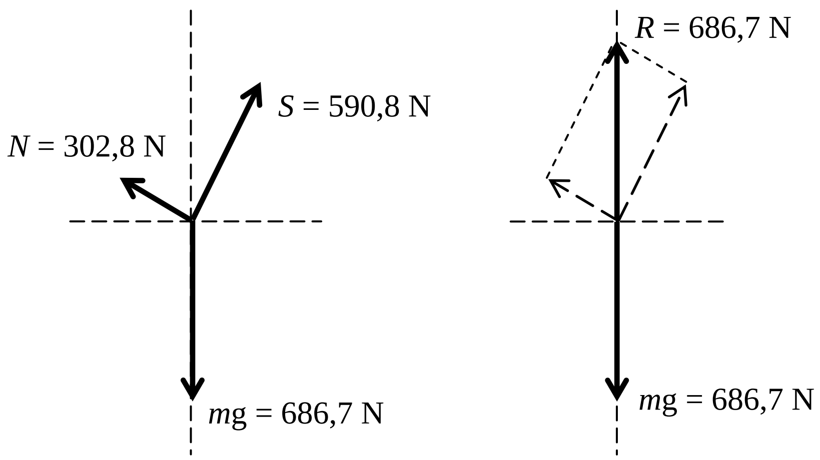
$$\tan\theta = \left(\frac{F_2}{F_1}\right)$$

Parallellogramlagen

Två krafter F_1 och F_2 som inte är vinkelräta mot varandra kan adderas genom att utnyttja parallellogramlagen. Enligt denna lag bildar krafterna F_1 och F_2 sidor i en parallellogram där diagonalen är resultanten R.

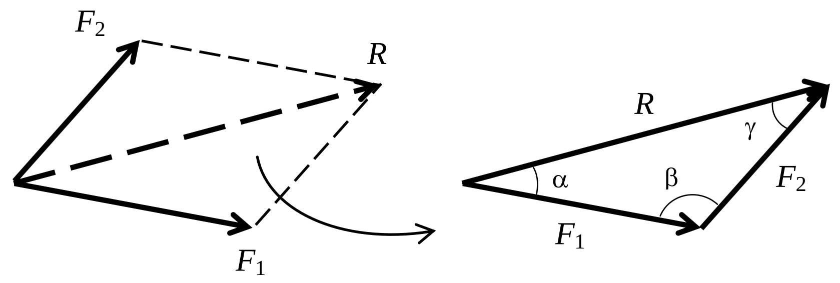


För att visa att parellollogramlagen gäller betraktar vi återigen bergsklättraren. Ersätts normalkraften N och linkraften S med en resulterande kraft R, borde denna vara lika stor som tyngdkraften mg och motriktad, se figur 6. Om endast två krafter finns, resultanten R och tyngdkraften mg, krävs att dessa är lika stora, motriktade och verkar längs samma verkningslinje. Ritas krafterna skalenligt framgår tydligt att parallellogramlagen gäller.



Figur 6. Parallellogramlagen kan utnyttjas vid beräkning av resultanten *R*.

Av parallellogrammet framgår att om krafterna F_1 och F_2 ritas efter varandra erhålls halva parallellogrammet, dvs en triangel. Denna triangel kallas för krafttriangel.

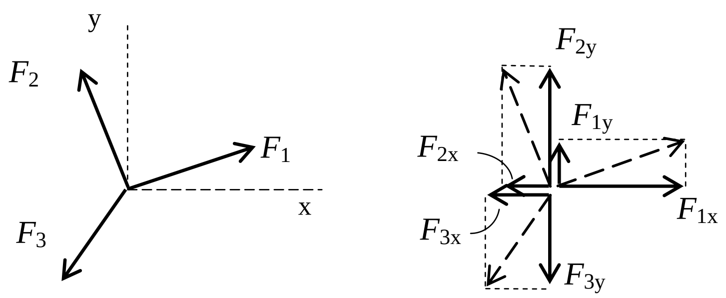


Resultantens storlek kan ur krafttriangeln beräknas med hjälp av trigonometriska funktioner t.ex. cosinussatsen och sinussatsen.

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \beta$$

$$\frac{\sin \beta}{R} = \frac{\sin \gamma}{F_1} = \frac{\sin \alpha}{F_2}$$

Det vanliga, framförallt vid fler än två krafter, är att utnyttja komposantuppdelning. De tre krafterna F_1, F_2 och F_3 komposantuppdelas i x-riktning och y-riktning. Genom komposantuppdelningen verkar alla krafter längs samma verkningslinje, antingen i x- eller y-riktningen.

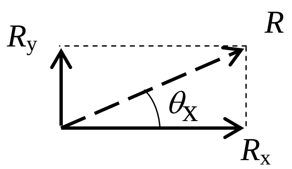


Krafterna kan nu summeras i respektive riktning. <u>Tänk på tecken</u>! I detta fall blir

$$(\rightarrow)\ R_x = \Sigma F_x = F_{1x} - F_{2x} - F_{3x}$$

$$(\uparrow)\ R_y = \Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

Resultantens storlek och riktning kan sedan bestämmas på samma sätt som ovan, dvs



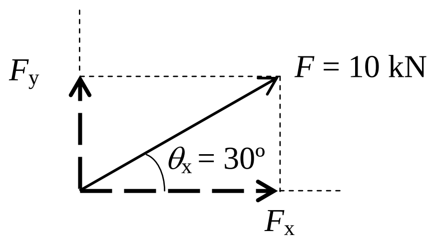
$$R = \sqrt{R_x^{\ 2} + R_y^{\ 2}}$$

$$\tan \theta_x = \left(\frac{R_y}{R_x} \right)$$

Exempel

Här följer tre exempel som illustrera olika sätt att komposantuppdela en kraft.

1. Kraftens storlek F = 10 kN och bildar vinkeln 30° med x-axeln. Komposantuppdela kraften och uttryck denna som en vektor.

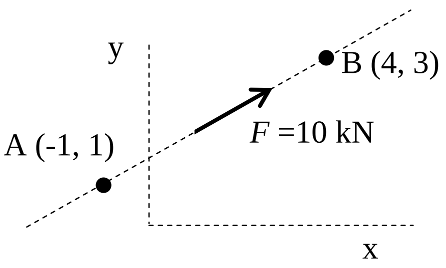


F_x = 10 cos 30° = 8,66 kN
F_y = 10 sin 30° = 5,0 kN

$\mathbf{F} = 8{,}66\,\mathbf{i} + 5{,}0\,\mathbf{j}$

$$\mathbf{F} = 10\cdot\underbrace{(0{,}87\,\mathbf{i} + 0{,}5\,\mathbf{j})}_{\text{Riktningsvektorn }\mathbf{n}}$$

2. Kraften F = 10 kN har en verkningslinje som passera igenom två punkter A och B. Komposantuppdela kraften och uttryck denna som en vektor.



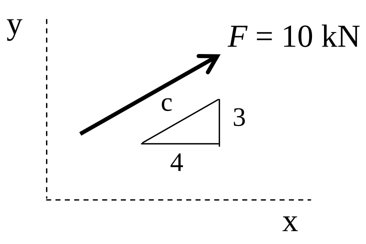
$$\overline{AB} = (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{n} = \frac{5\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = 0{,}93\mathbf{i} + 0{,}37\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = 10\cdot(0{,}93\mathbf{i} + 0{,}37\,\mathbf{j}) = 9{,}3\mathbf{i} + 3{,}7\,\mathbf{j}$$

F_x = 9,3 kN
F_y = 3,7 kN

3. Kraften F = 10 kN med lutning definierad av en triangel. Komposantuppdela kraften.



Likformiga trianglar ger

$$\frac{F_x}{4} = \frac{F}{c} \quad \text{och} \quad \frac{F_y}{3} = \frac{F}{c}$$

$$c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

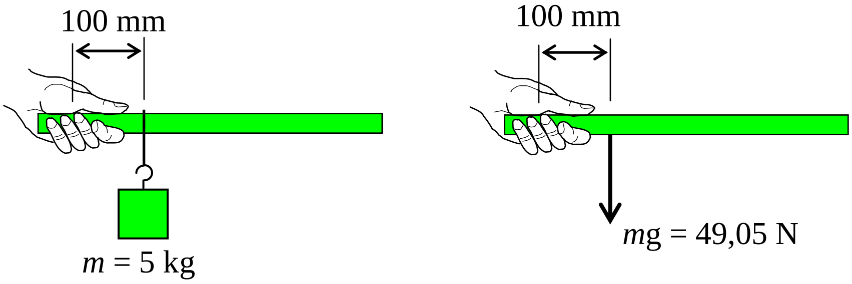
$$\mathbf{F} = 10\left(\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}\right) = 8\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j}$$

F_x = 8,0 kN
F_y = 6,0 kN

3. Moment

Vad är moment?

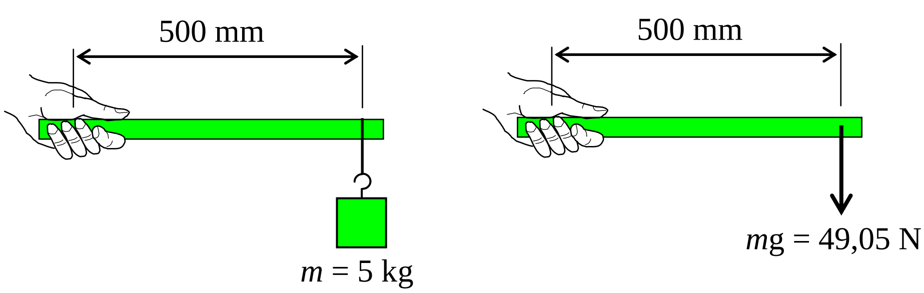
Du håller i ena änden av en stav, se figur 1. På ett litet avstånd ifrån en punkt mitt i handen, 100 mm, hänger en vikt med massan *m* = 5 kg. Vad känner du i handen? Det ena du känner är viktens tyngd som en tyngdkraft *m*g nedåt. Du känner också en liten vridning. Tyngdkraften *m*g vill vrida staven kring punkten i handen.



Figur 1. En vikt hänger på ett litet avstånd till en punkt i handen.

Om vikten istället placeras längst ut i den andra ändan, se figur 2, vad känner du då i handen? Fortfarande känner du viktens tyngd som en kraft nedåt. Kraftens storlek ändras inte. Skillnaden nu är att vridningen i handen känns mycket kraftigare. Det är betydligt jobbigare att hålla vikten i detta läget. Ju längre ut du hänger vikten desto större upplevs den vridande verkan.

Om dessutom viktens massa ökas kommer den vridande verkan att kännas ännu större.



Figur 2. En vikt hänger långt ut ifrån handen.

Det räcker alltså inte att enbart ta hänsyn till en krafts storlek. Utan du måste även ta hänsyn till hur en kraft ger en vridande verkan kring en godtycklig punkt. Denna vridande verkan kallas *moment* och betecknas *M*. Av exemplet ovan framgår att momentet beror både av kraft och avstånd.

Frågor att besvara

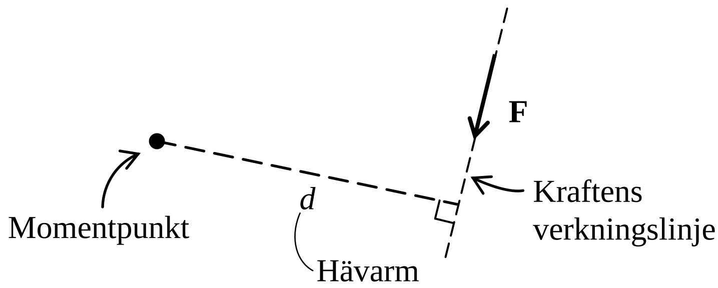
När du läser vidare i detta avsnitt ska du bl.a. söka svar på följande frågor:

- Hur beräknas ett moment?
- Hur inverkar kraftens verkningslinje på momentet?
- Vad menas med momentpunkt?
- Hur bestäms hävarmen till momentpunkten?
- Hur påverkar kraftens riktning momentets storlek?
- Har moment olika riktningar?

Definition av moment

En krafts moment *M* kring en godtycklig punkt, momentpunkt, är lika med produkten av kraftens storlek *F* och det vinkelräta avståndet *d* från momentpunkten till kraftens verkningslinje. Sorten för moment är Newtonmeter (Nm)

$$\boxed{M = F \cdot d}$$

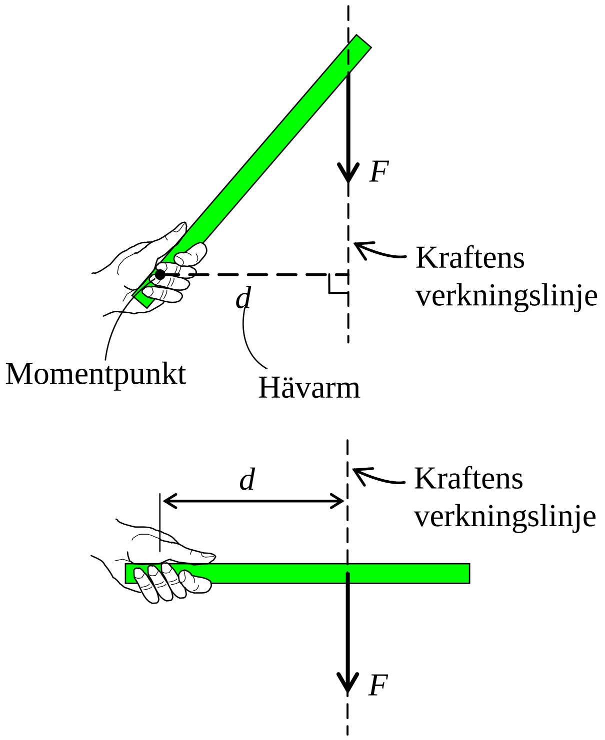


Verkningslinje och hävarm

Avståndet ifrån kraftens verkningslinje till momentpunkten kallas för hävarm och betecknas med *d*. Ju större hävarm desto större moment.
Hävarmen *d* ska vara det vinkelräta avståndet till kraftens verkningslinje.

Att hävarmen är det vinkelräta avståndet till kraftens verkningslinje visas i figur 3 där återigen staven ifrån figur 2 visas. Vikten hänger fortfarande längst ut men nu lutar staven snett uppåt. I figuren ser du tydligt att hävarmen har minskat jämfört med den hävarm som gällde i figur 2.

För att samma moment ska erhållas när staven är horisontell ska vikten flyttas närmare handen, se figur 3.



Momentet som kraften F ger kring en punkt i handen blir samma i de två fallen, dvs

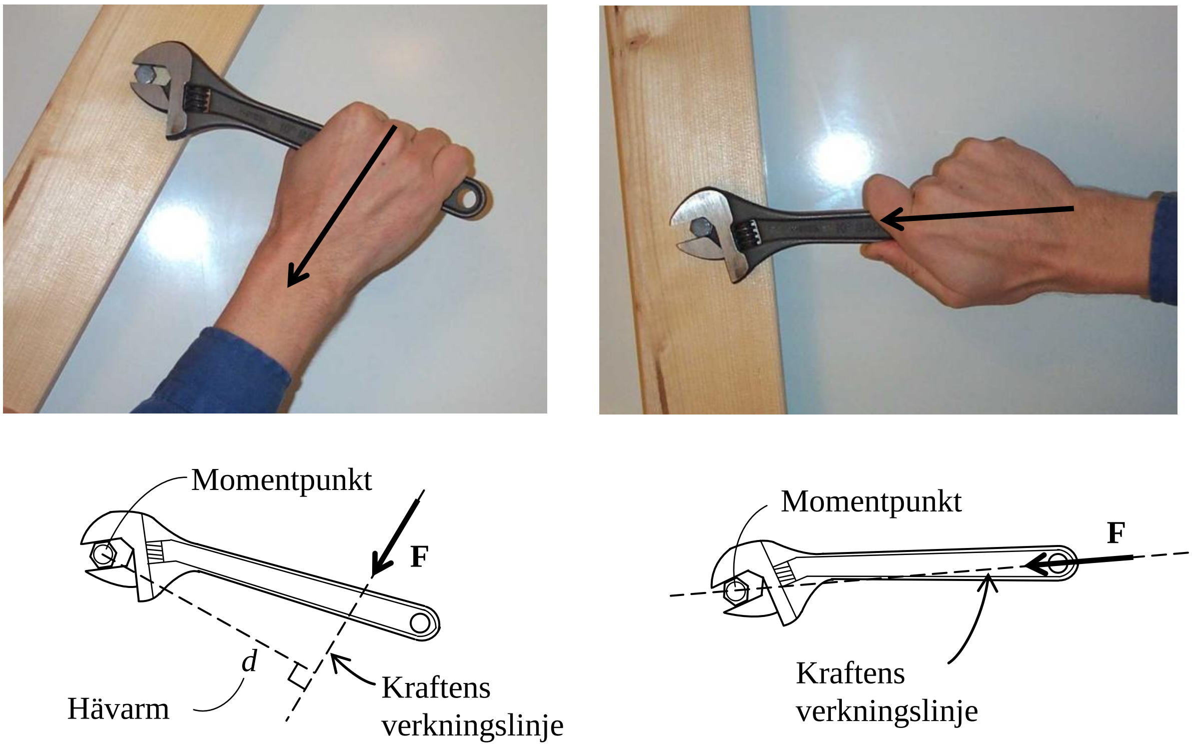
$$M = F \cdot d$$

Figur 3. Lutar staven minskar hävarmen.

För att ytterligare förklara hur kraft och hävarm påverkar momentets storlek visas här ett exempel ifrån det vardagliga livet. Du har säkert någon gång använt en skiftnyckel. En skiftnyckel kan t.ex. användas när en bult eller skruv skall dras åt, se figur 4. När du tar i med handkraft på ett visst avstånd ifrån bulten erhålls en vridande verkan som drar åt bulten. Ju längre ut på skiftnyckeln du håller desto större blir hävarmen och därmed den vridande verkan.

Av figur 4 framgår tydligt att kraftens riktning påverkar hävarmens storlek. Det räcker alltså inte med att hålla långt ut på skiftnyckeln. Det krävs också att kraften verkar i en viss riktning för att momentet ska bli så stort som möjligt.

I figuren visas två olika kraftriktningar. För kraftriktningen enligt figuren till vänster erhålls en stor vridande verkan då det vinkelräta avståndet *d* är ett stort.



Momentet $M = F\,d$

Momentet $M = 0$ p.g.a. att hävarmen $d = 0$

Figur 5. En skiftnyckel används för att dra åt en bult.

För kraftriktningen enligt figuren till höger blir det ingen vridande verkan, då kraftens verkningslinje går rakt igenom bultens mittpunkt. Hävarmen är då lika med noll.

Exemplet med skiftnyckeln, se figur 5, visar tydligt att hävarmen ska vara det vinkelräta avståndet till kraftens verkningslinje.

Om inte ett vinkelrätt avstånd *d* enkelt kan hittas kan oftast komposantuppdelning ge en betydande förenkling. Kraften *F* kan komposantuppdelas var som helst längs sin verkningslinje.

Vilka faktorer påverkar då momentets storlek?

Momentets storlek beror av:

- Kraftens storlek
- Kraftens riktning
- Hävarmens längd

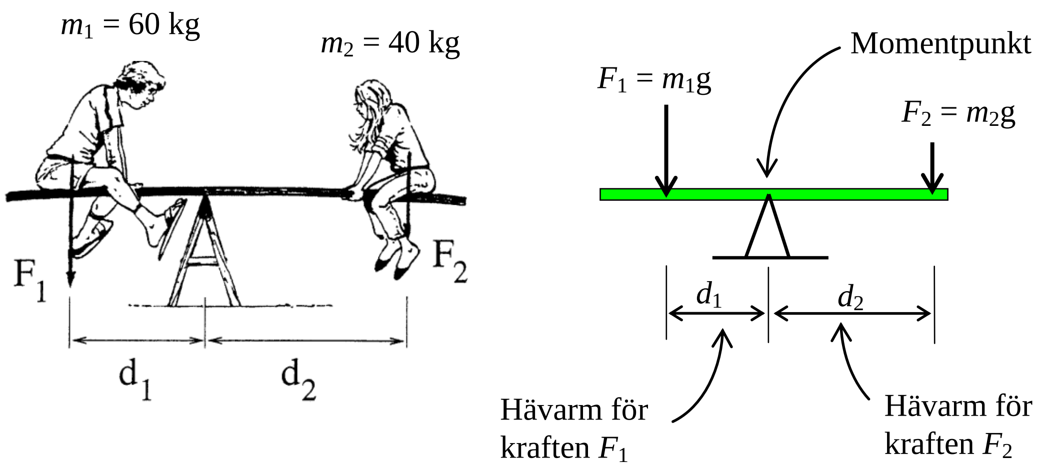
Momentjämvikt

Momentjämvikt innebär att om en kraft ger en vridande verkan kring en viss punkt måste det finnas någon annan kraft som kompensera för detta genom att ge en vridande verkan i den motsatta riktningen. Ett exempel med en gungbräda får illustrera detta, se figur 5.

Till vänster sitter en pojke som väger 60 kg och till höger sitter en flicka som väger 40 kg. Av det inledande exemplet med trästaven framgick att den vridande verkan ökade ju längre ut vikten var placerad. Med gungbrädan gäller samma sak. Ju längre ut ifrån balanspunkten (momentpunkten) pojken eller flickan sitter desto större blir den vridande verkan.

När gungbrädan är i balans måste den vridande verkan som pojken ger vara lika stor som den flickan ger. Eftersom personerna väger olika mycket måste avstånden vara olika. Om pojken och flickan sitter på samma avstånd kommer gungbrädan att tippa över mot pojkens sida.

Var skall då pojken och flickan vara placerade för att gungbrädan skall vara i balans och inte tippa över åt något håll? Antag att pojken sitter på avståndet d_1 och flickan på avståndet d_2, se figur 5.



Figur 5. Gungbrädan.

Vridande verkan från pojkens tyngd, moturs:

$$M_1 = F_1\,d_1 = 60 \cdot 9{,}81 \cdot d_1$$

Vridande verkan från flickans tyngd, medurs:

$$M_2 = F_2\,d_2 = 40 \cdot 9{,}81 \cdot d_2$$

Vid momentjämvikt ska momenten som pojken respektive flickan ger kring momentpunkten balansera varandra.

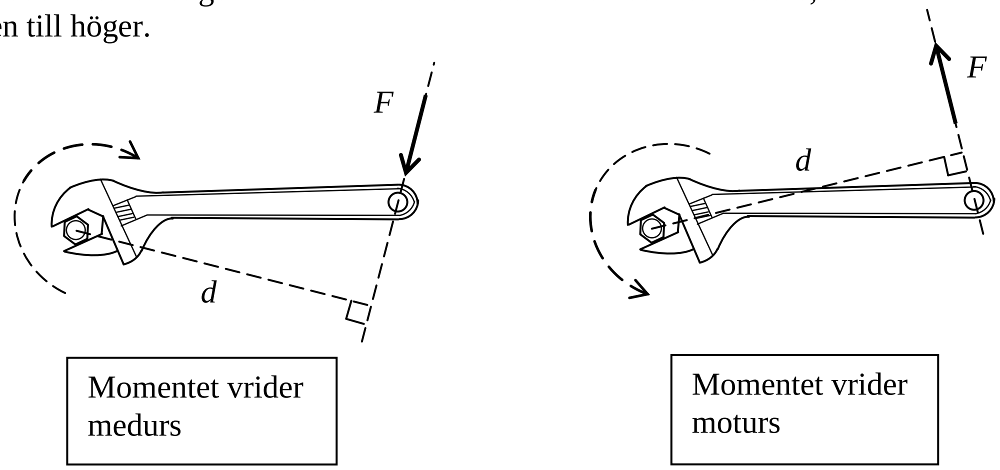
Momentjämvikt ger att $\Sigma M = 0 \;\Rightarrow\; \overbrace{60\cdot 9{,}81\cdot d_1}^{M_1\text{ (pojken)}} - \overbrace{40\cdot 9{,}81\cdot d_2}^{M_2\text{ (flickan)}} = 0$

$$\frac{60\cdot 9{,}81}{40\cdot 9{,}81} = \frac{d_2}{d_1} \quad\Rightarrow\quad d_2 = 1{,}5\,d_1$$

Flickan skall i detta fall sitta på ett avstånd d_2 som är 1,5 gånger större än pojkens avstånd d_1. Sitter t.ex. flickan på avståndet d_2 = 1,5 m får pojken sitta på avståndet d_1 = 1,0 m för att momentbalans ska råda.

Momentets riktning

Det är viktigt att kunna avgöra om en kraft önskar vrida medurs eller moturs. I figuren nedan till vänster ger kraften F en vridande verkan kring momentpunkten som är medurs. Muttern dras på detta sätt åt. Om kraften är riktad åt andra hållet ger kraften F en vridande verkan som är moturs, se figuren till höger.



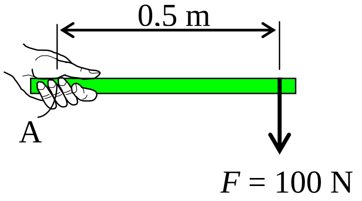
Figur 6. Momentets riktning.

> **Sammanfattning:**
>
> En krafts moment $M = F\cdot d$
>
> Hävarmen d ska vara det vinkelräta avståndet till kraftens verkningslinje.
> En kraft kan antingen vrida medurs eller moturs kring momentpunkten.

Exempel

Här följer några exempel som visar hur ett moment beräknas.

1. Beräkna momentet vid punkten A orsakad av kraften F = 100 N.



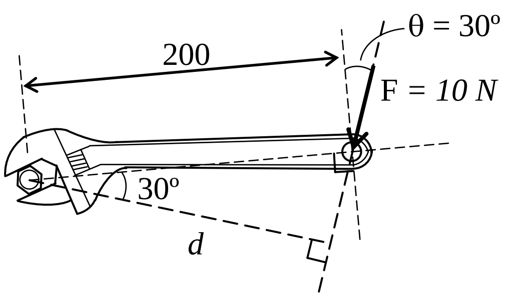
Kraftens storlek F = 100 N

Hävarmen d = 0,5 m.

Välj t.ex. positivt moment medurs.

$M_A = 100 \cdot 0{,}5 = 50{,}0$ Nm

2. Med hjälp av en skiftnyckel skall en mutter dras åt. Beräkna momentet för muttern.



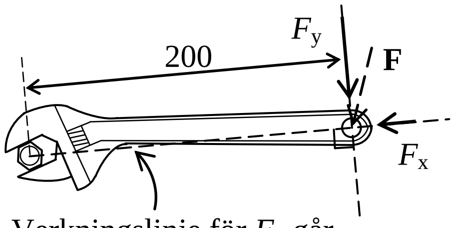
Beräkna först hävarmen d ifrån muttern till kraftens verkningslinje.

$d = 0{,}2 \cdot \cos 30^\circ = 0{,}17$ m

$M = 10 \cdot 0{,}17 = 1{,}7$ Nm

Ett alternativt sätt är att först komposantuppdela kraften F.

Komposantuppdelningen kan utföras var som helst längs kraftens verkningslinje.



Verkningslinje för F_x går igenom momentpunkten

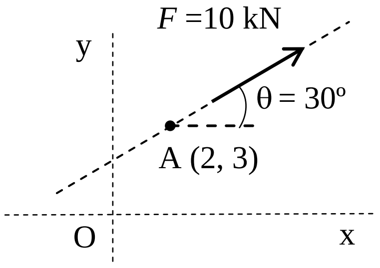
$F_x = 10 \sin 30^\circ = 5{,}0$ N

$F_y = 10 \cos 30^\circ = 8{,}66$ N

Komposanten F_x har i detta exempel ingen hävarm då verkningslinjen går genom muttern.

$M = 8{,}66 \cdot 0{,}2 = 1{,}7$ Nm

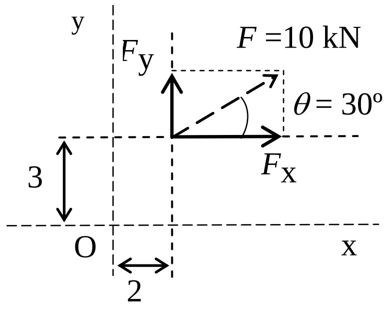
3. Vad ger kraften F för moment kring punkten O. Kraftens verkningslinje går genom punkten A (2, 3).



Komposantuppdela kraften F

F_x = 10 cos 30º = 8,66 kN
F_y = 10 sin 30º = 5,0 kN

Rita ut komposanternas verkningslinje så att vinkelräta avstånd hittas.



Komposanten F_x har hävarmen 3 och momentet verkar medurs.

Komposanten F_y har hävarmen 2 och momentet verkar moturs.

Välj t.ex. positivt moment medurs

M_O = 8,66·3 - 5,0·2 = 16,0 kNm

4. Jämvikt

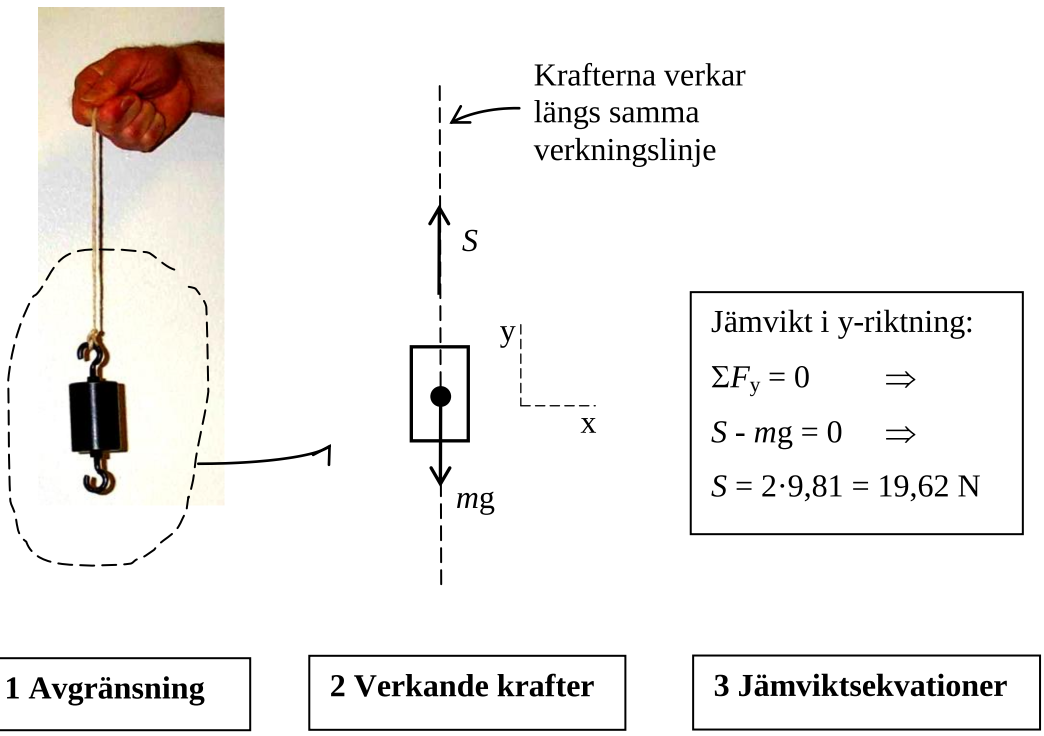
Hur utförs en jämviktsberäkning?

För att en kropp ska befinna sig i vila eller förflytta sig med konstant hastighet krävs att alla krafter är i balans med varandra. Inom statiken kallas detta för jämvikt. Jämvikt är ett viktigt begrepp som har berörts i kapitel 1. I detta kapitel kommer jämvikt att beröras på ett mera systematiskt sätt.

En vikt med massan m = 2 kg hänger i en lina, se figur 1. Vikten befinner sig i vila, dvs den är i jämvikt. Hur stor är kraften i linan?

För detta enkla exempel är det lätt att bestämma kraften i linan då krafterna verkar längs samma verkningslinje. För mer komplicerade problem är det inte lika enkelt. Därför är det viktigt att hitta ett systematiskt tänkande som är användbart mer generellt. Med hjälp av en jämviktsberäkning kan obekanta krafter beräknas.

En jämviktsberäkning delas in i tre steg, se figur 1. Vikten avgränsas, alla verkande krafter sätts ut och obekanta krafter beräknas med hjälp av jämviktsekvationer.



Figur 1. Kraften i linan kan bestämmas med hjälp av en jämviktsberäkning.

1. Avgränsning:

Med avgränsning menas att kroppen friläggs och isoleras ifrån sin omgivning. Endast den betraktade delen, i detta fal vikten, ritas ut.

2. Verkande krafter:

Alla på kroppen verkande krafter sätts ut. Förutom tyngdkraften mg införs kontaktkrafter där den avgränsade kroppen är i kontakt med sin omgivning.

Genom linan är vikten i kontakt med sin omgivning. Vikten påverkas därför av en linkraft S som verkar i linans riktning.

3. Jämviktsekvationer:

När kroppen är frilagd och alla verkande krafter är utsatta kan jämviktsekvationer utnyttjas för att beräkna t.ex. obekanta krafters storlek:

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{och} \quad \Sigma M = 0$$

Summan av krafternas verkan ska bli noll, dvs krafterna ska balansera varandra. För vikten i figur 1 verkar samtliga krafter längs samma verkningslinje. I detta exempel räcker det därför med en jämviktsekvation i y-riktningen, dvs $\Sigma F_y = 0$.

Frågor att besvara

När du läser vidare i detta avsnitt ska du bl.a. söka svar på följande frågor:

- Hur avgränsar du en kropp?
- Hur sätts alla verkande krafter ut?
- Hur ställer du upp jämviktsekvationer?
- Hur avgör du antalet erforderliga jämviktsekvationer?
- Hur används Newtons 3:e lag?

Friläggning

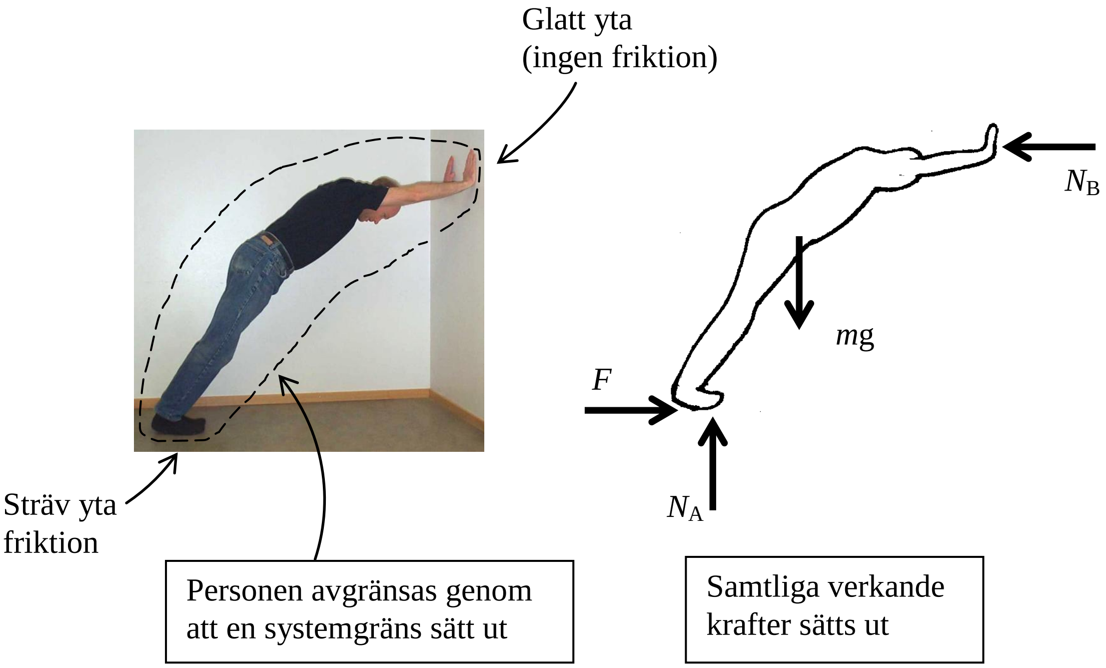
Med friläggning menas att en kropp avgränsas och alla verkande krafter sätts ut, dvs steg 1 och 2 enligt figur 1.

Friläggningen är en viktig förutsättning för att kunna utföra en jämviktsberäkning. Jämviktsekvationerna är endast giltiga för frilagda kroppar och ska alltid utföras som ett första steg i en jämviktsberäkning.

Det finns två typer av krafter i samband med friläggning; tyngdkrafter och kontaktkrafter. Tyngdkraften verkar nedåt genom kroppens tyngdpunkt. Med kontaktkraft menas en kraft som verkar där den frilagda delen är i kontakt med sin omgivning. En kontaktkraft kan antingen vara en pålagd yttre kraft eller en reaktionskraft (upplagskraft).

I följande exempel visas hur friläggningen utförs. I exemplen visas ett antal olika typer av kontaktpunkter. Till varje typ av kontaktpunkt hör ett antal möjliga kontaktkrafter.

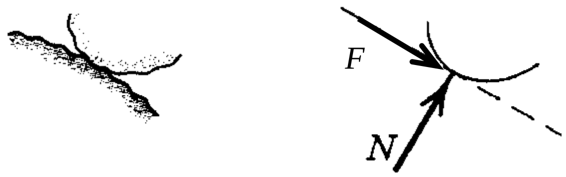
I det första exemplet visas en person som lutar sig mot en vägg, se figur 2. Antag att golvet är en sträv yta och väggen en glatt yta. Friläggningen börjar med att personen avgränsas inom en systemlinje. Där systemlinjen passerar en kontaktpunkt införs kontaktkrafter. I detta fall finns det två kontaktpunkter. Den ena kontaktpunkten finns mellan händer och vägg. Eftersom väggen är en glatt yta verkar här enbart en normalkraft N_B. Den andra kontaktpunkten finns mellan fötter och golv. Mot denna yta som är sträv finns både en normalkraft N_A och en friktionskraft F.



Figur 2. Personen är i kontakt med sin omgivning via en sträv yta och en glatt yta.

Sträv yta:

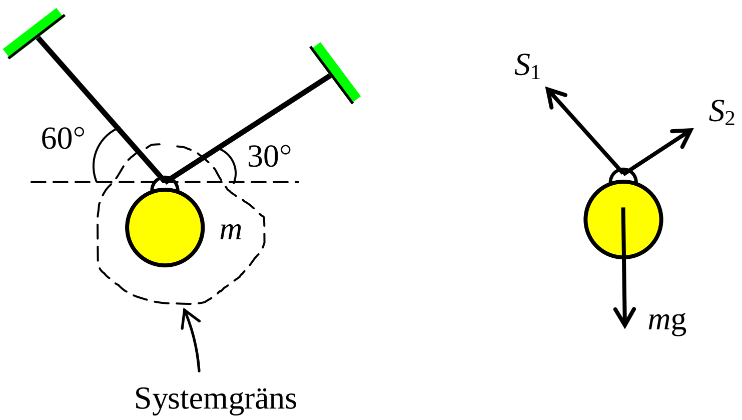
Mot en sträv yta verkar en normalkraft *N* och en friktionskraft *F*. Normalkraften *N* verkar alltid vinkelrätt mot kontaktytan och friktionskraften *F* verkar parallellt med kontaktytan.



Glatt yta:

Mot en glatt yta verkar endast en normalkraft *N*. Det finns ingen friktionskraft.

I nästa exempel hänger en kula med massan *m* i två linor, se figur 3. En systemlinje ringa in kulan. Genom systemlinjen passerar två linor. Kulan påverkas av tyngdkraften *m*g samt av linkrafterna S_1 och S_2.

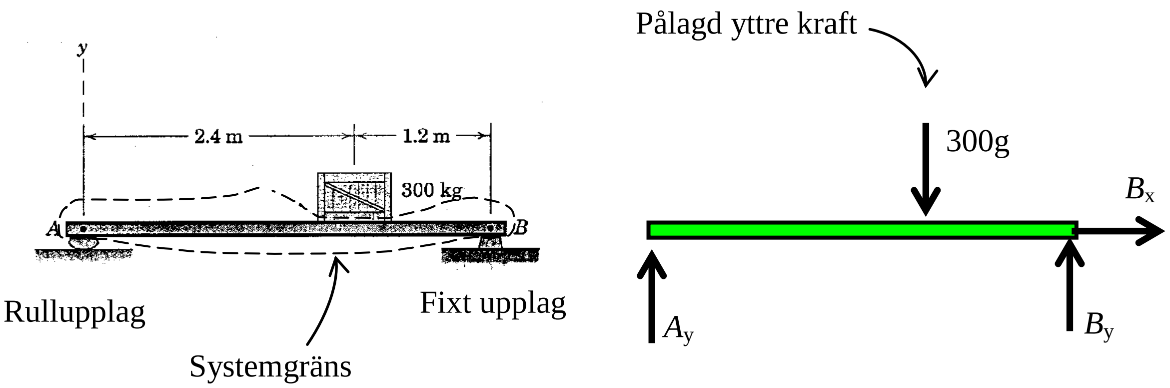


Figur 3. Lådan påverkas av tyngdkraften *m*g samt av linkrafterna S_1 och S_2.

Linor (stänger):

I linan verkar en linkraft *S*. Denna verkar alltid i linans riktning.

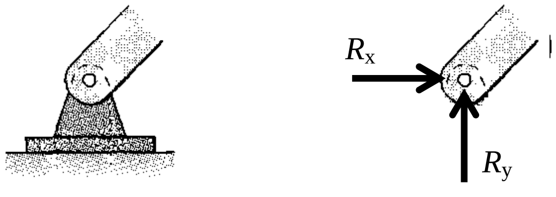
En balk belastas av en låda, se figur 4. Ena balkupplaget är ett fixt upplag och det andra ett rullupplag. Det fixa upplaget ersätts med två krafter t.ex. B_x och B_y. Dessa verkar vinkelrätt mot varandra. Rullupplaget ersätts med en kraft A_y. Lådan ersätts med en tyngdkraft *m*g som i detta fall är en pålagd yttre kraft.



Figur 4. Balken har ett rullupplag och ett fixt upplag.

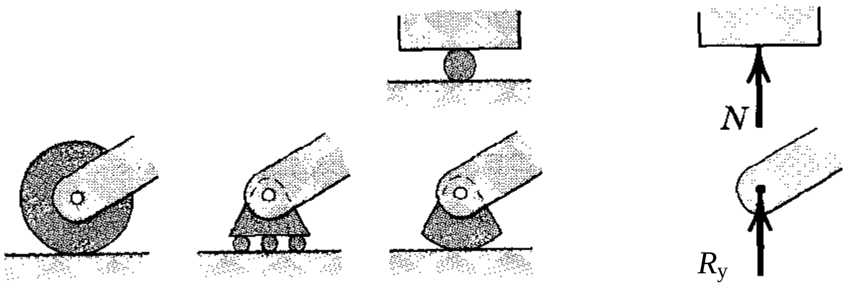
Fixt upplag:

Vid ett fixt upplag sitter kroppen fast i alla riktningar i planet. I denna punkt verkar därför två reaktionskrafter t.ex. R_x och R_y. Kroppen kan dock rotera fritt kring denna punkt.

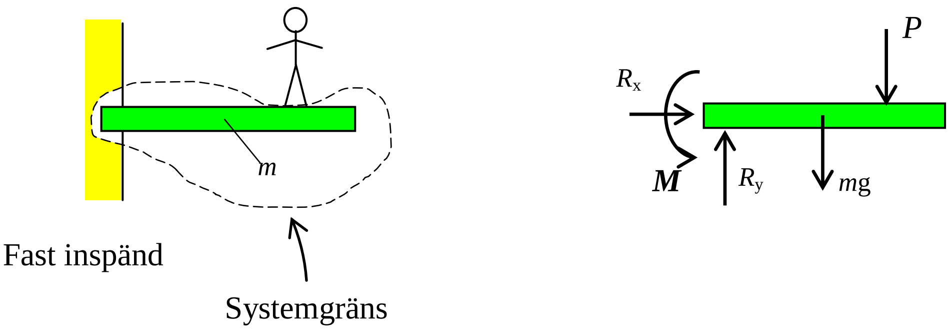


Rullupplag:

Ett rullupplag förhindra endast rörelse vinkelrätt mot underlaget. Det finns därför endast en reaktionskraft t.ex. N eller R_y.



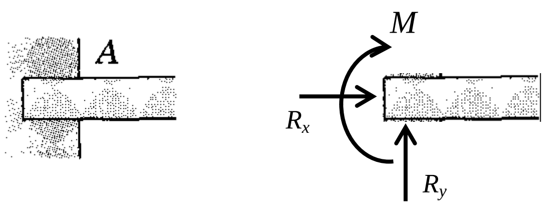
I figur 5 visas slutligen ett exempel med fast inspänning. En balkong i form av en konsol sitter fast i väggen. En person står på balkongen. Fast inspänning ersätts med tre krafter R_x, R_y och M.



Figur 5. Balkongen är fast inspänd.

Fast inspänd:

Vid fast inspänning sitter kroppen fast i alla riktningar, dvs även rotation förhindras. I denna punkt verkar därför tre reaktionskrafter t.ex. R_x, R_y och M.

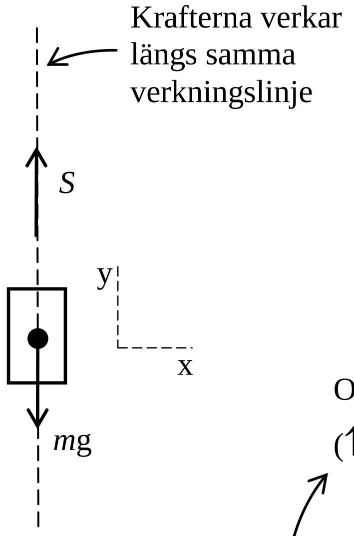


Jämviktsekvationer

När kroppen är frilagd och alla verkande krafter är utsatta kan jämviktsberäkningen slutföras.

Det antal jämviktsekvationer som erfordras för att bestämma alla reaktionskrafter måste vara lika med antalet obekanta reaktionskrafter.

I figur 6 visas vikten ifrån figur 1 frilagd med samtliga verkande krafter utsatta. Tyngdkraften är känd och linkraften *S* är okänd. Här finns enbart en obekant kraft och samtliga krafter verkar längs samma verkningslinje. Det räcker med en jämviktsekvation för att beräkna linkraften *S*.



Jämvikt i y-riktning:

$\Sigma F_y = 0$

Om t.ex. vikten väger 2 kg blir:

$(\uparrow)\ \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow$

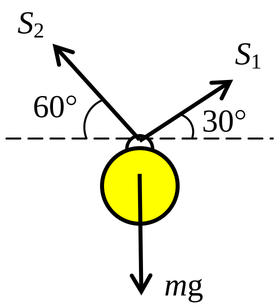
$S - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad S = 2 \cdot 9{,}81 = 19{,}62$ N

Ange positiv riktning

Summan av alla verkande krafter y-riktning är noll.

Figur 6. En vikt hänger i en lina. En jämviktsekvation räcker.

Kulan som hänger i två linor visas frilagd här återigen, se figur 7. Kulan påverkas av tyngdkraften *m*g samt två linkrafter S_1 och S_2. Linkrafterna S_1 och S_2 är obekanta krafter. Samtliga krafter skär varandra i en och samma punkt. Här krävs två jämviktsekvationer.



Jämvikt i x-riktning:

$\Sigma F_x = 0$

Jämvikt i y-riktning:

$\Sigma F_y = 0$

Om t.ex. kulan väger 10 kg och vinklarna $\theta_1 = 30°$ och $\theta_2 = 60°$ blir:

$(\rightarrow)\ \Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -S_1 \cos 30° + S_2 \cos 60° = 0$

$S_1 = 0{,}58\, S_2$

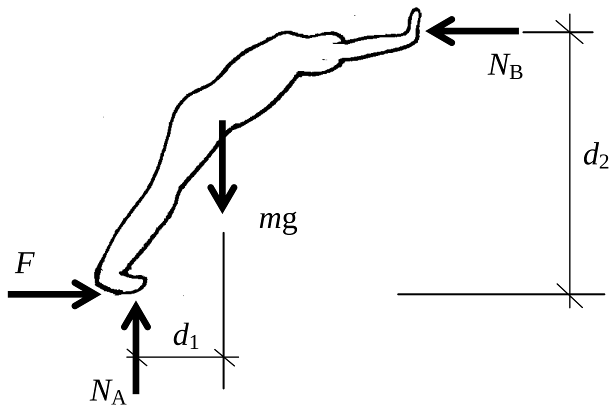
$(\uparrow)\ \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 \sin 30° + S_2 \sin 60° - 10g = 0$

$S_2 = 84{,}9$ N

$S_1 = 49{,}2$ N

Figur 7. En kula hänger i två lutande linor. Två jämviktsekvationer krävs.

Där krafterna har godtycklig riktning samt där dessa inte skär varandra i en och samma punkt krävs tre jämviktekvationer. Förutom kraftjämvikt ska även momentjämvikt råda. Personen som lutade sig mot väggen visas frilagd i figur 8. De obekanta krafternas storlek beror bl.a. på avstånden d_1 och d_2, varför stelkroppsmodellen i detta fall måste tillämpas.



Jämvikt i x-riktning:

$\Sigma F_x = 0$

Jämvikt i y-riktning:

$\Sigma F_y = 0$

Momentjämvikt:

$\Sigma M = 0$

Om t.ex. personen väger 70 kg och avstånden $d_1 = 0{,}6$ m och $d_2 = 1{,}6$ m blir:

$$\left.\begin{array}{lll} (\rightarrow)\ \Sigma F_x = 0 & \Rightarrow & F - N_B = 0 \\ (\uparrow)\ \Sigma F_y = 0 & \Rightarrow & N_A - 70g = 0 \\ \curvearrowright \Sigma M_A = 0 & \Rightarrow & 70g \cdot 0{,}6 - N_B \cdot 1{,}6 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} N_B = 257{,}5 \text{ N} \\ N_A = 686{,}7 \text{ N} \\ F = 257{,}5 \text{ N} \end{array}$$

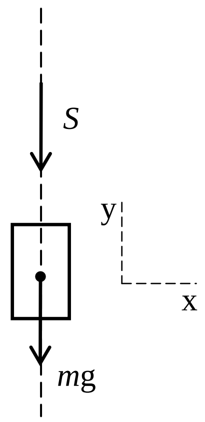
Figur 8. En person lutar sig mot en vägg. Det krävs tre jämviktsekvationer.

Riktning för obekanta krafter

I exemplen ovan har ett antal olika kontaktkrafter ritats ut med en viss riktning. Hur vet du vilken riktning som gäller?

Oftast ser du direkt vilken riktning en kraft har. Detta gäller t.ex. linkrafter och normalkrafter. Där det är svårt att se riktningen på en obekant kraft kan du anta en riktning. Du kan alltså välja vilken riktning du vill. Om du har valt fel riktning anges detta i svaret i form av ett minustecken. Ett exempel får visa detta.

Om t.ex. linkraften *S* enligt figur 6 antas verkar nedåt, se figur 9, visar jämviktsberäkningen den rätta riktningen i form av ett minustecken.



$$(\uparrow)\ \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -S - mg = 0$$
$$S = -19{,}62 \text{ N}$$

Minustecknet anger att kraften *S* verkar i andra riktningen, dvs uppåt.

Figur 9. Om fel riktning antas visas detta i jämviktsberäkningen i form av ett minustecken.

En förutsättning för att du fritt kan välja en riktning är att jämviktsekvationerna sätts upp på rätt sätt dvs. att summa krafter är lika med noll. Ett vanligt fel som man gör är att man sätter de olika krafterna lika med varandra t.ex. $S = mg$. På detta sätt får du inte reda på att kraften har fel riktning. Det uppstår bl.a. problem med tecken som kan ge stora fel i slutändan.

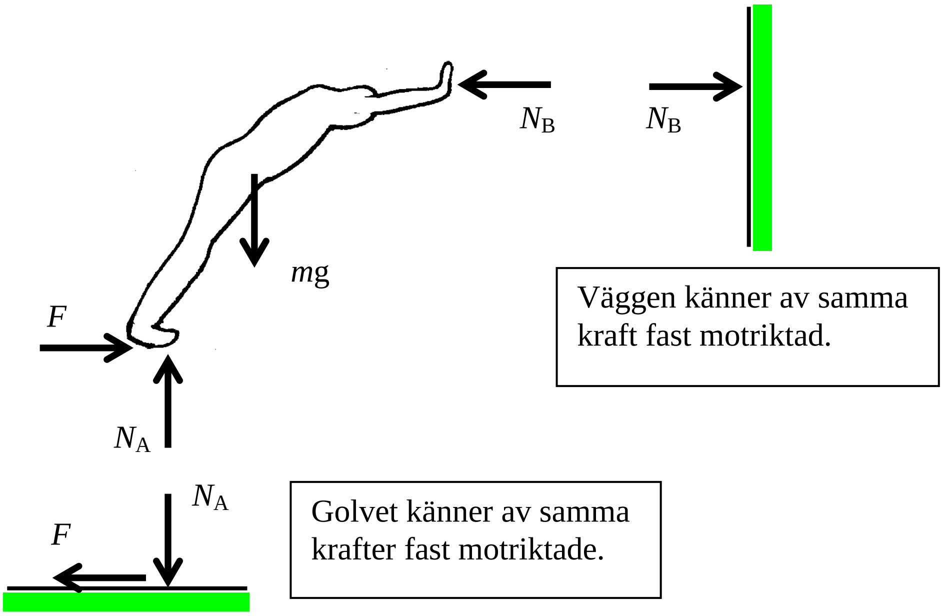
När du ställer upp jämviktsekvationer är det viktigt att samla samtliga krafter på samma sida om likhetstecknet. För att veta vilken riktning som ska vara positiv anges alltid detta med en pil före jämviktsekvationen.

Newtons 3:e lag

Vid jämviktsberäkning är det viktigt att förstå Newtons 3:e lag; lagen om aktion och reaktion. Innebörden av denna lag har förklarats i kapitel 1. Ett exempel får visa hur denna lag tillämpas vid jämviktsberäkning.

När t.ex. en person lutar sig mot en vägg, se figur 10, verkar en kraft N_B i kontaktytan mellan händerna och väggen. Samma kraft N_B fast motriktad påverkar väggen. Väggen känner att personen trycker med kraften N_B. Samtidigt känner personen att väggen trycker tillbaka så att han inte faller framåt.

Golvet känner av friktionskraften F och normalkraften N_A fast motriktade. Golvet känner av tyngden ifrån personen samt hur personen vill glida bakåt. Golvet hindrar personen ifrån att glida genom kraften F som då verkar framåt.

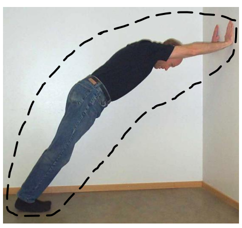


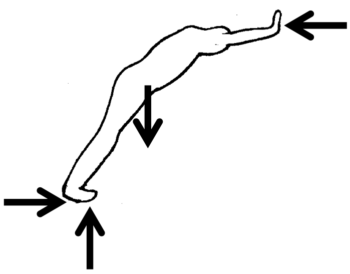
Figur 10. Newtons 3:e lag; lagen om aktion och reaktion.

När flera delar ingår i en konstruktion är det viktigt att veta hur krafterna överförs mellan de olika delarna.

Sammanfattning:

Jämviktsberäkning:





$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

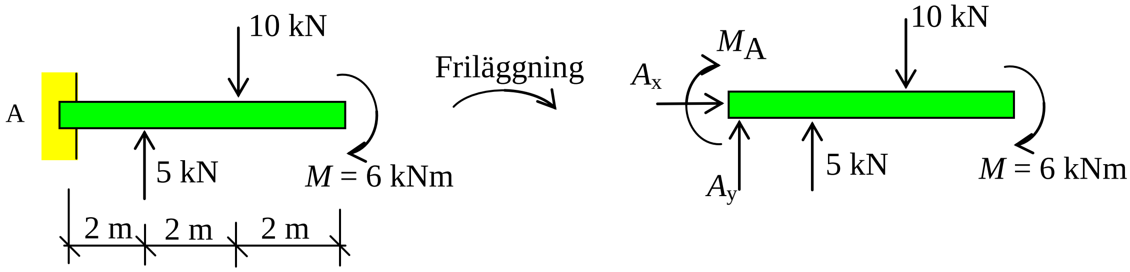
$\Sigma M = 0$

1 Avgränsning | **2 Verkande krafter** | **3 Jämviktsekvationer**

Exempel

Här följer två exempel som visar jämviktsberäkning.

1. En konsolbalk belastas enligt figuren nedan. Beräkna upplagskrafterna vid det fast inspända stödet A.



Frilägg balken och och rita ut de okända upplagskrafterna A_x, A_y och M_A. Valfri riktning kan väljas för okända krafter. Vid lösning av jämviktsekvationerna framgår storlek och riktning.

$(\rightarrow)\quad \Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$

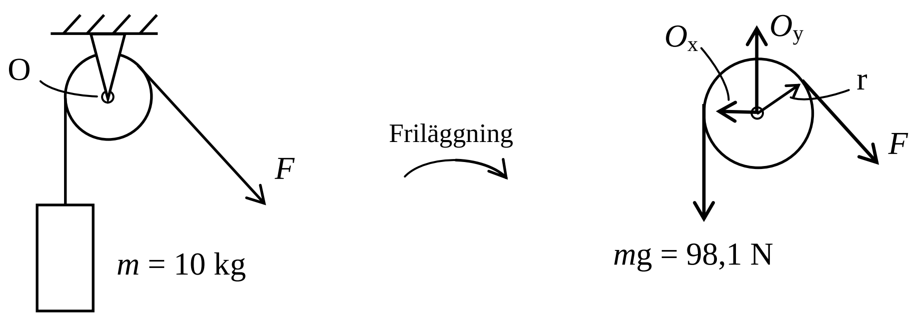
$(\uparrow)\quad \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y + 5 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 5 \text{ kN}$

Välj t.ex. punkt A som momentpunkt.

$(\curvearrowright)\quad \Sigma M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A + 10 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = -36 \text{ kNm}$

Att upplagskraften M_A = -36 kNm betyder att antagen riktning i den frilagda figuren ovan inte stämmer med positiv momentriktning. Momentet M_A är riktad åt andra hållet.

2. En lina löper runt en friktionsfri trissa. Beräkna den kraft F som krävs för att vikten med massan 10 kg skall vara i jämvikt. Trissan sitter fast i sin mittpunkt O.



I den frilagda figuren framgår att i mittpunkten O verkar reaktionskrafterna O_x och O_y.

Anta att trissan har radien r. Beräkna momentjämvikt kring punkten O.

$$\curvearrowright \Sigma M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad F \cdot r - 98{,}1 \cdot r = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 98{,}1 \text{ N}$$

När en lina löper kring en friktionsfri trissa gäller följande:

Kraften i linan förändras inte utan är alltid lika stor innan som efter.