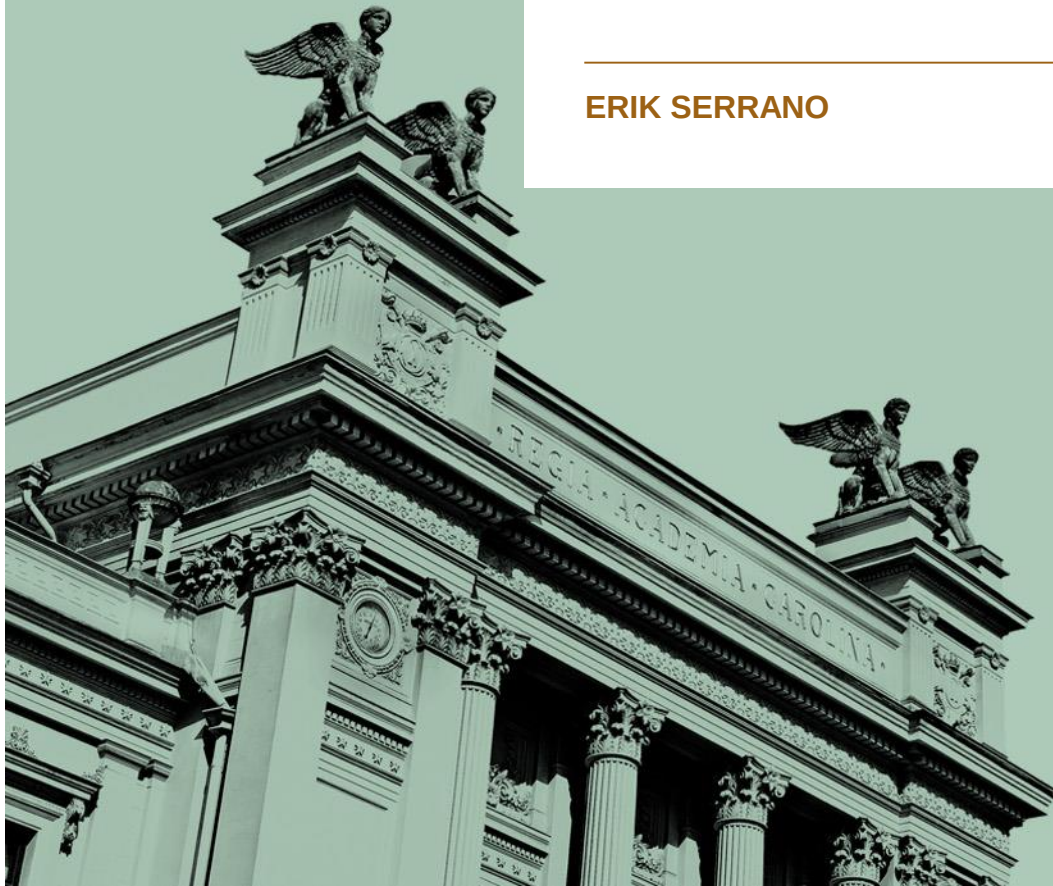




LUNDS
UNIVERSITET

VSMA01 - Mekanik

ERIK SERRANO



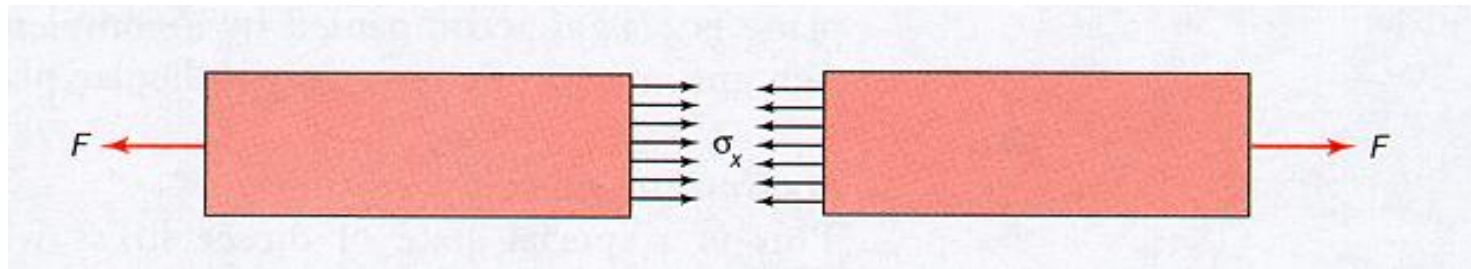
Innehåll

- Material – Spänning, töjning, styvhet
- Dragning, tryck, skjuvning, böjning
- Stång, balk – styvhet och bärförmåga
- Knäckning



Exempel: Spänning i en stång

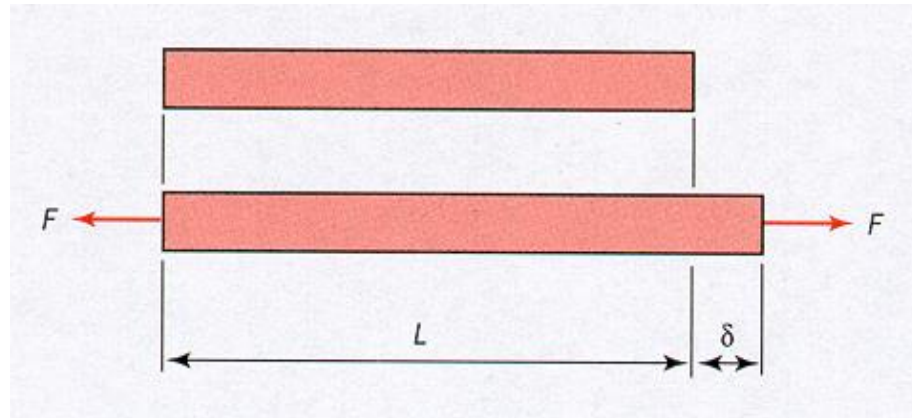
$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$



Töjning

- Normaltöjning
 - Förlängning ($\delta > 0$) positivt
 - Medeltöjning:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$



Materialstyvhet - elasticitet

Spänning

Töjning

σ

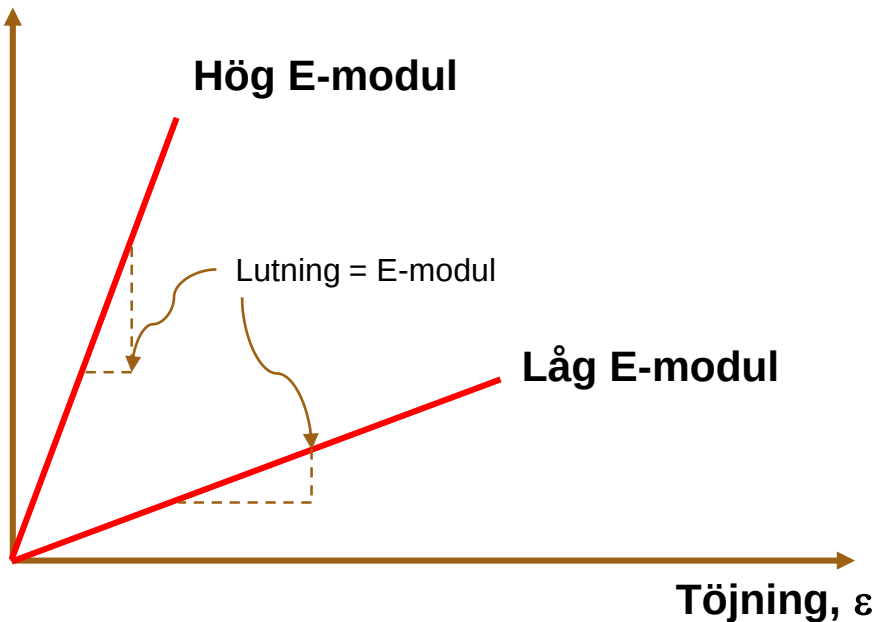


ε

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

E = Elasticitetsmodul (E-modul)

Spänning σ



LUNDS
UNIVERSITET

Typiska materialvärden E-modul.

▪ Konstruktionsstål	210 GPa
▪ Rostfritt stål	195 GPa
▪ Aluminium	70 GPa
▪ Glas	70 GPa
▪ Kolfibrer	230 GPa
▪ CFRP (60 %)	140 GPa
▪ Betong	30-40 GPa
▪ Trä (parallellt med fibrer)	10 GPa

GPa = Gigapascal = 1000 megapascal = 10^9 Pascal =
 $= 10^9 \text{ N/m}^2 = 10^3 \text{ N/mm}^2$



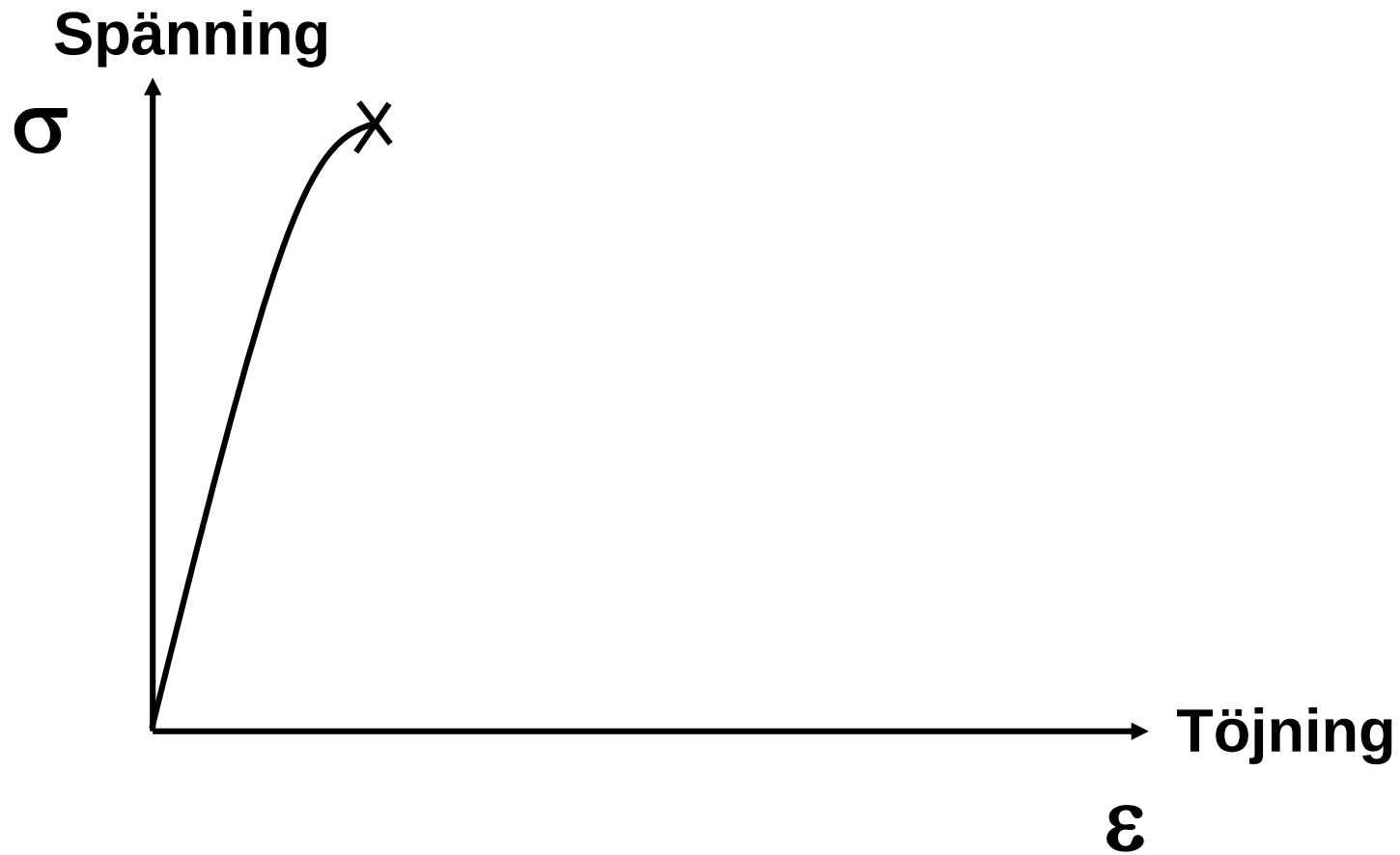
Typiska värden på hållfasthet.

▪ Konstruktionsstål	200 – 1000 MPa
▪ Rostfritt stål	200 – 1000 MPa
▪ Aluminium	50 – 500 MPa
▪ Fönsterglas	50 – 150 MPa
▪ Glasfiber	500 – 1000 MPa
▪ Kolfiber	2500 – 3000 MPa
▪ Kolfiberkomposit	1500 MPa
▪ Betong	20 – 100 Mpa
▪ Trä (parallellt fibrer)	10 – 50 MPa

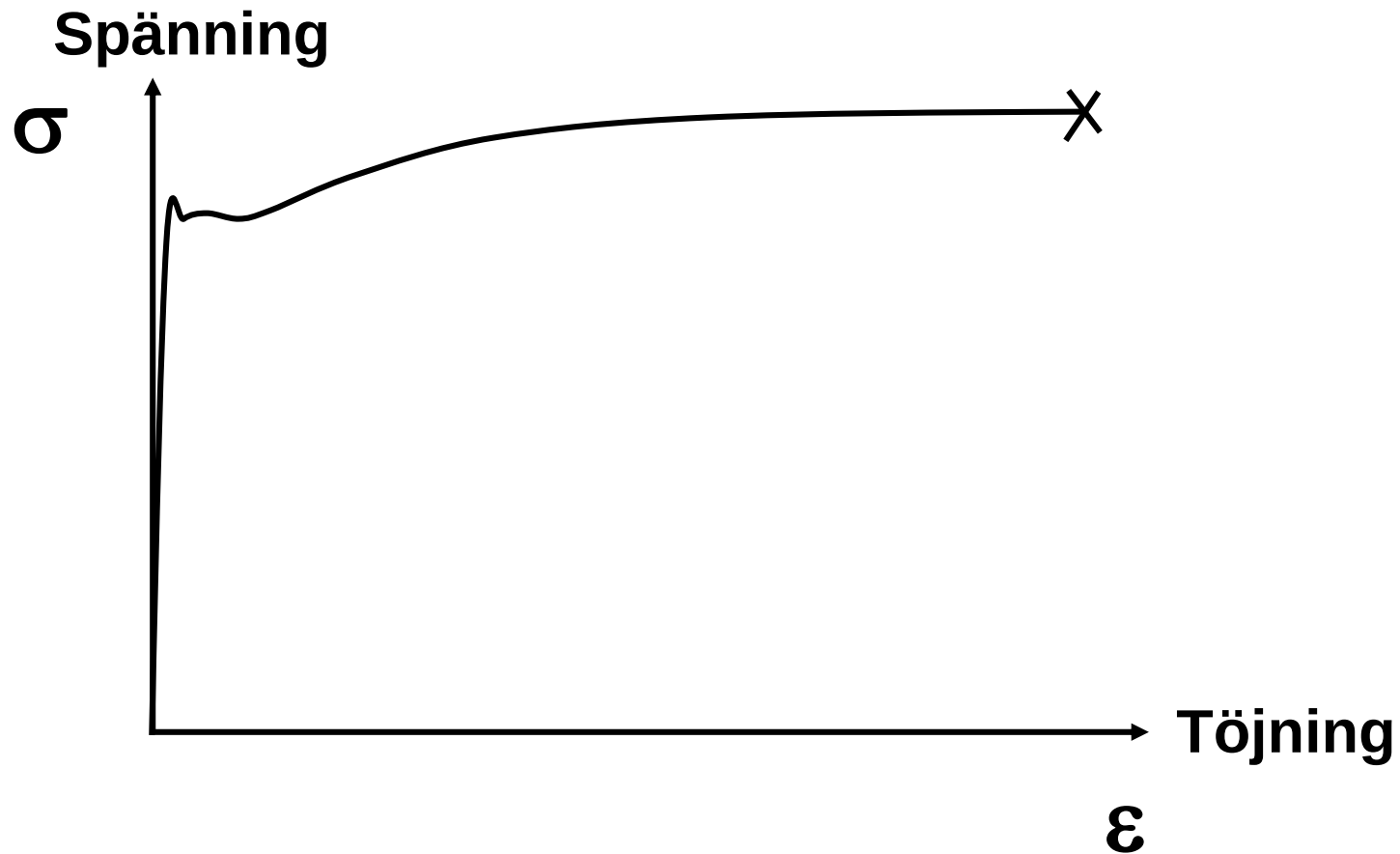
MPa = Megapascal = 1 000 000 pascal = 10^6 Pascal = 10^6 N/m² = 1 N/mm²



En del material är spröda, dvs går plötsligt sönder



Andra material är sega, dvs deformeras mycket innan de går sönder



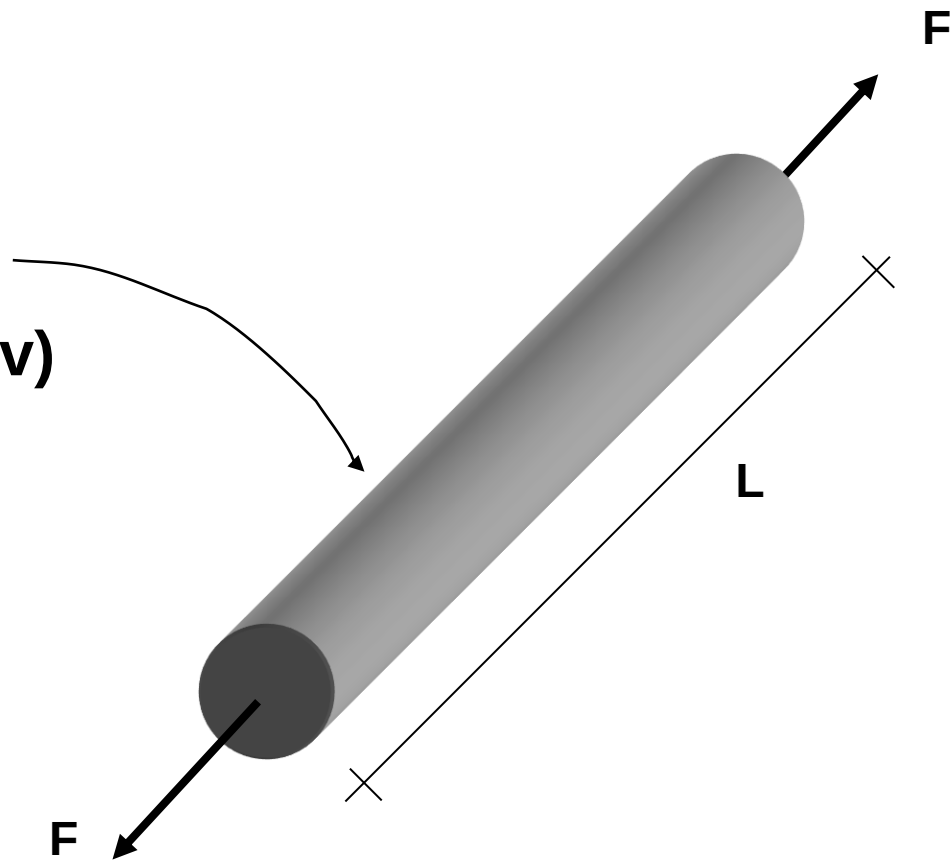
Stång - Antaganden

- Ingen massa, belastning endast i ändarna
- Rak, prismatisk (samma tvärsnitt)
- Linjärelastiskt material
- Enaxligt spänningstillstånd, jämn fördelning (endast normalspänning)
- Små deformationer vid belastning

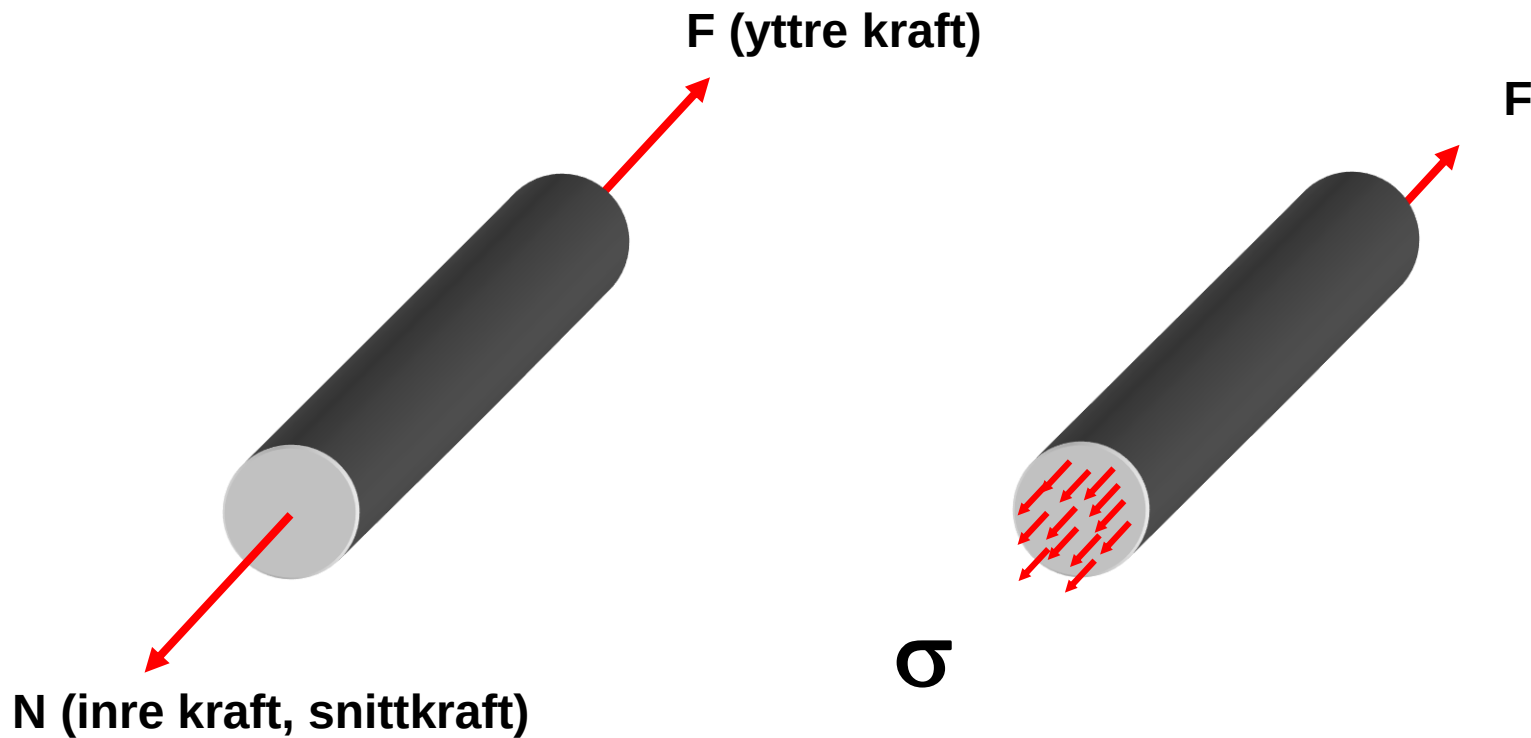


Stång

Area: A
Material: E
(Dragkraft positiv)



Stång

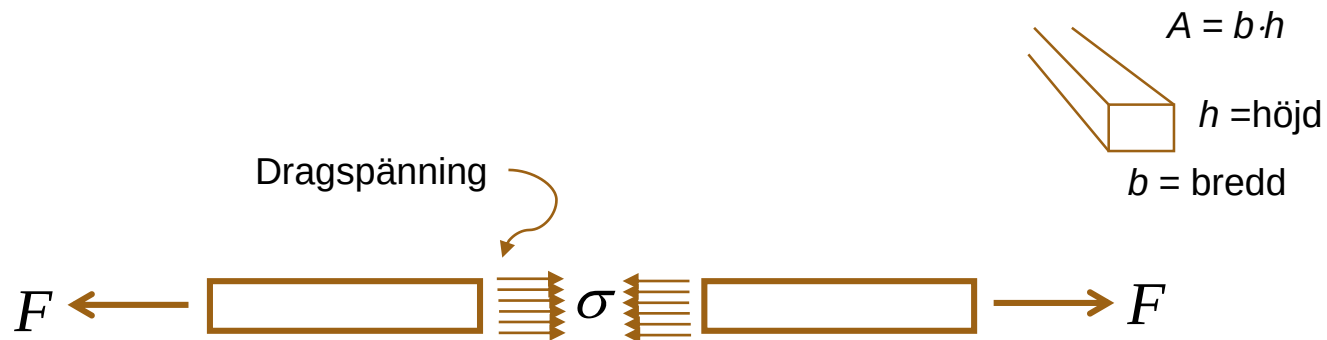


Antag jämn spänningsfördelning!



σ

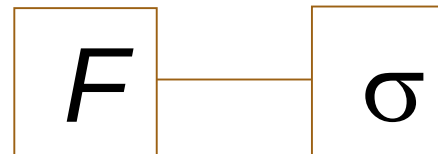
σ = Spänning, inre spänning fördelad över tvärsnittsarea A .



F = Kraft [N]

A = Tvärsnittsarea [m^2]

$\sigma = \frac{F}{A}$ = Spänning [$\text{N}/\text{m}^2 = \text{Pa}$]



Stång

- Deformation

- Förlängning (positiv) i stången Δl
- Töjningen $\varepsilon = \Delta l / L$
- Materialsamband – Hookes lag

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

- Jämvikt längs stången:

$$F - N = 0 \qquad \text{dvs} \qquad N = F$$

$$N = F = \sigma \cdot A$$



Stång

$$F = \sigma \cdot A = E \cdot \varepsilon \cdot A = E \cdot \Delta l / L \cdot A$$

$$F = \frac{EA}{L} \Delta l$$

Dvs kraften som behövs för att förlänga en stång är proportionell mot E-modul, tvärsnittsarea och förlängningen, och omvänt proportionell mot längden

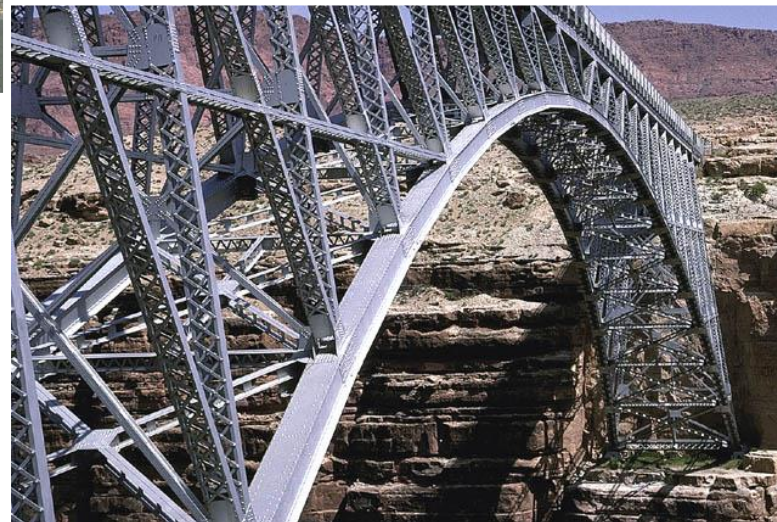
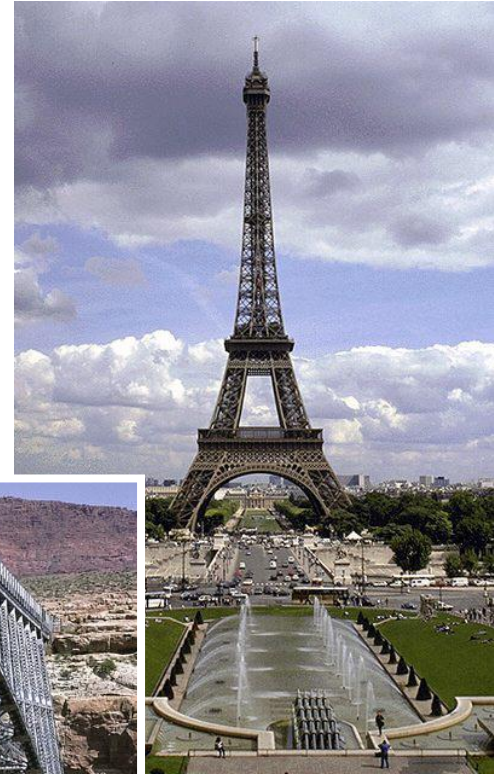


Stång

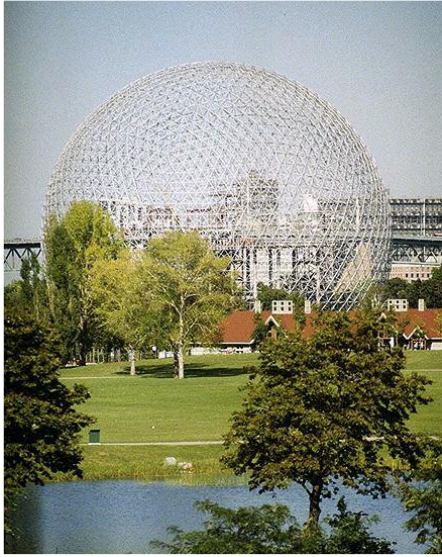
- För en stång med givet material, ursprungligt läge och godtycklig deformation, kan vi beräkna dragkraften F .
- Med given kraft i stången, $N (=F)$, kan vi beräkna spänningen i stången.



Stänger kan bilda fackverk



Fackverk



Balk

- En balk kan överföra både krafter och moment
- "Krafter"
 - Normalkraft (som stången)
 - Tvärkrafter
 - Böjmoment
 - Vridmoment

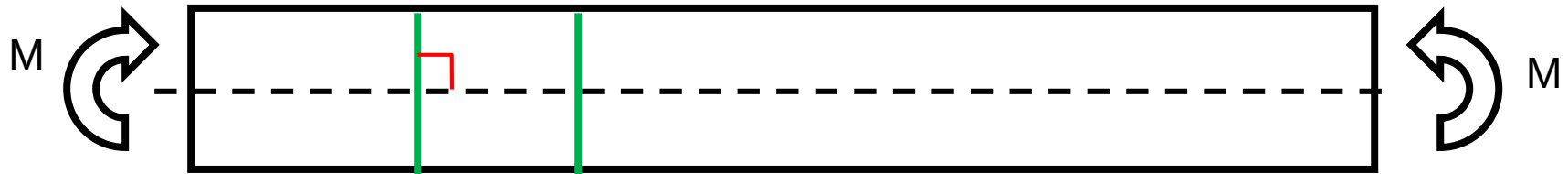


Balk – Antaganden

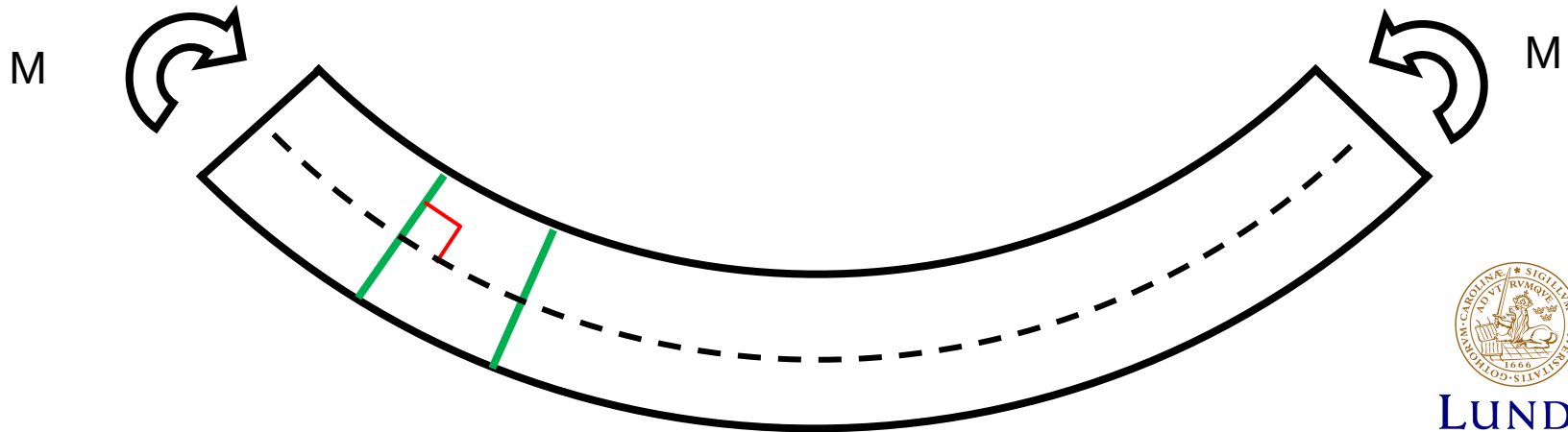
- Initieellt rak och prismatisk (samma tvärsnitt)
- Linjärelastiskt material
- Enaxligt spänningstillstånd (endast normalspänning) (vid härledning)
- "Plana tvärsnitt förblir plana"
- Små deformationer vid belastning



Balk - 2D böjning



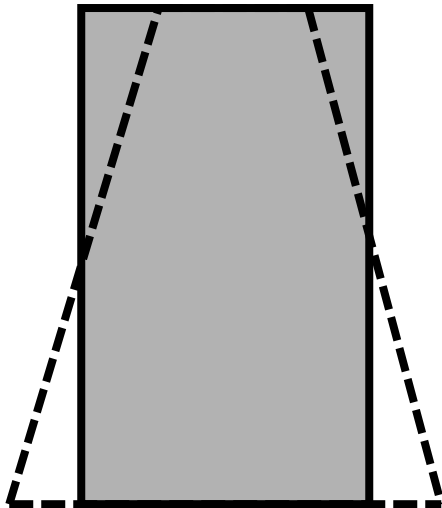
-- Tyngdpunktslinje



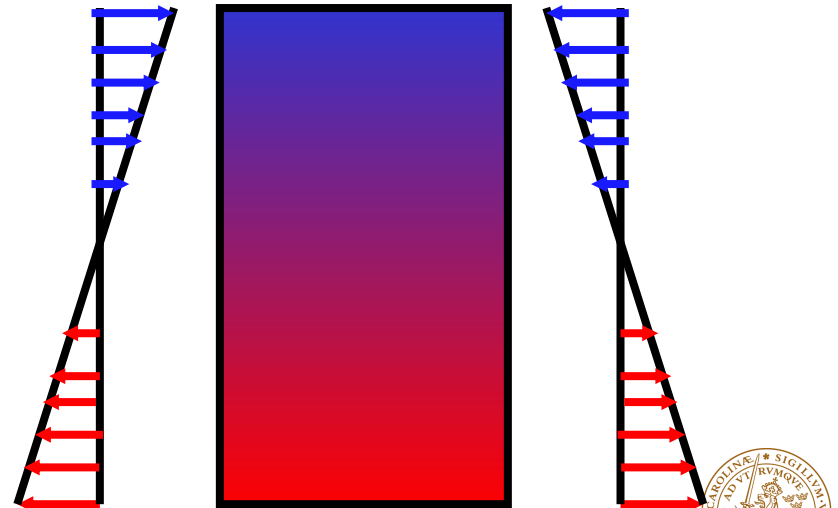
Balk – 2D

Utskuren balkdel - böjning

Deformation

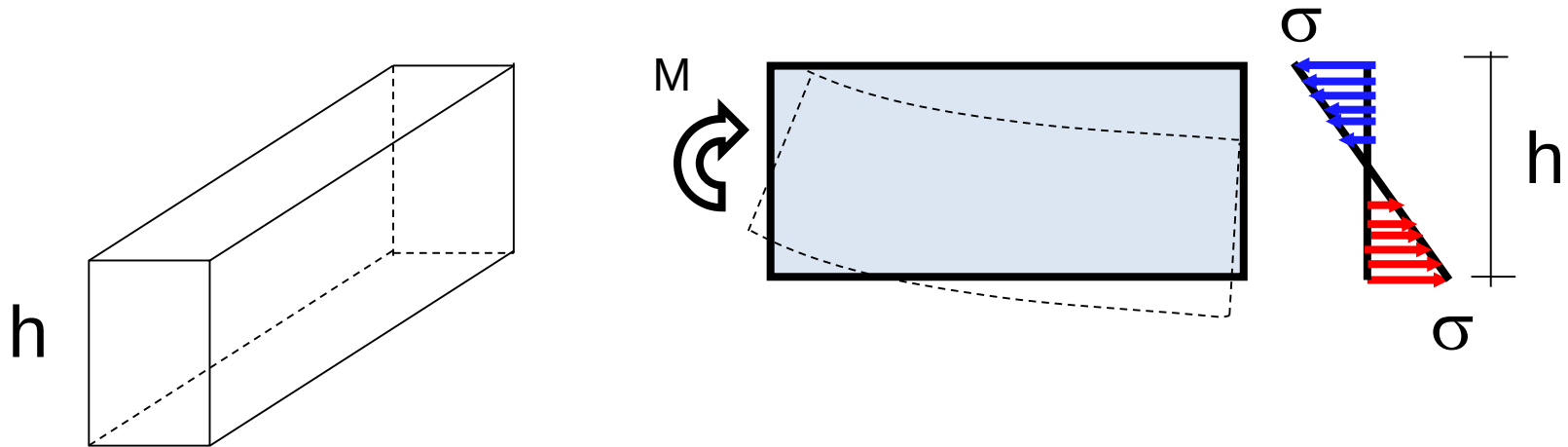


Spänning



Balk - 2D böjning

- Samband rektangulära tvärsnitt (utan härledning)



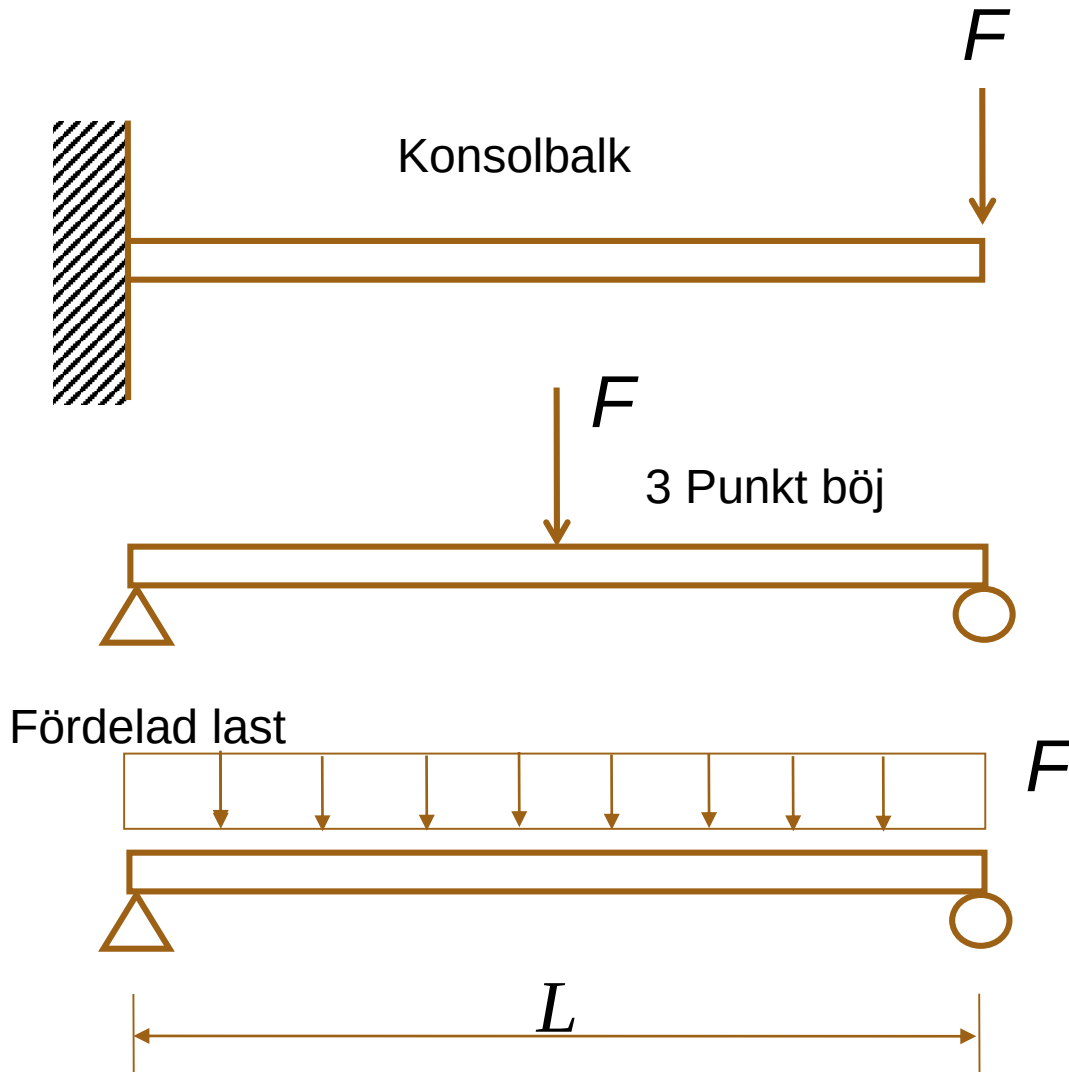
b

Max drag/tryckspänning:

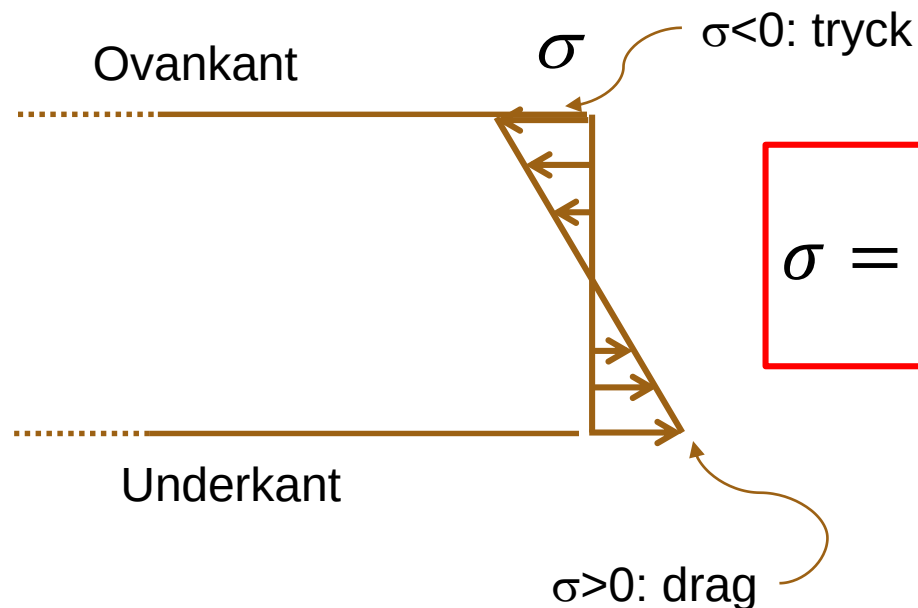
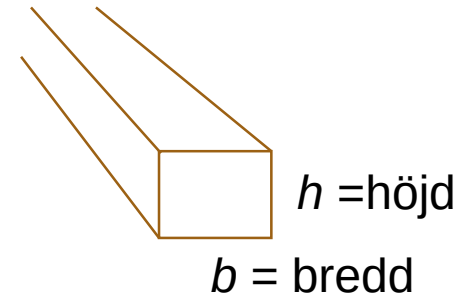
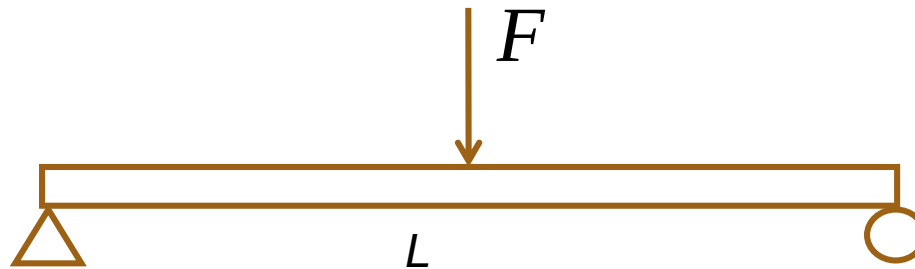
$$\sigma = \frac{M \cdot 6}{b \cdot h^2}$$



Böjning: Transversella laster på en balk



Fritt upplagd rektangulär balk: Spänningar



$$\sigma_{ovan} = -\frac{3FL}{2bh^2}$$

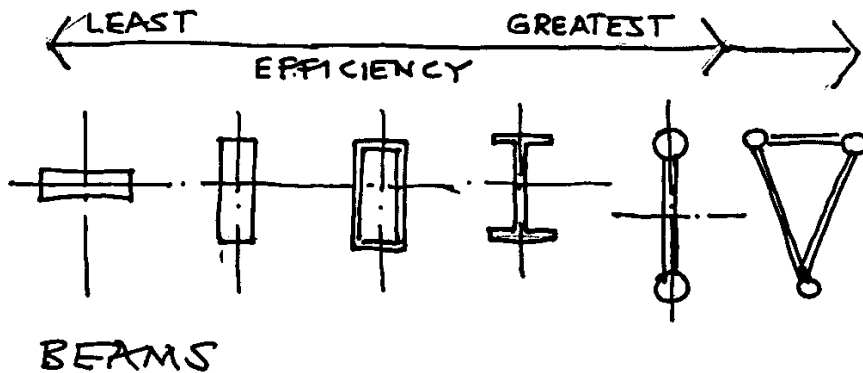
$$\sigma_{under} = \frac{3FL}{2bh^2}$$



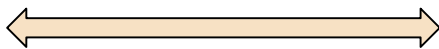
Balkböjning

Effektivt tvärsnittsmått i böjning

I = Yttröghetsmoment



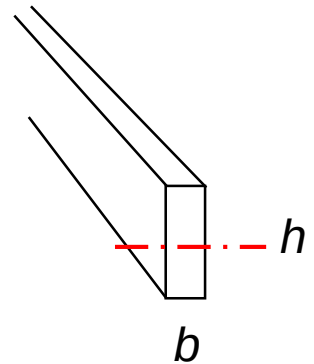
Litet



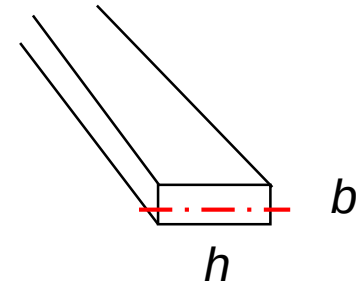
Stort

Rektangulära tvärsnitt

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

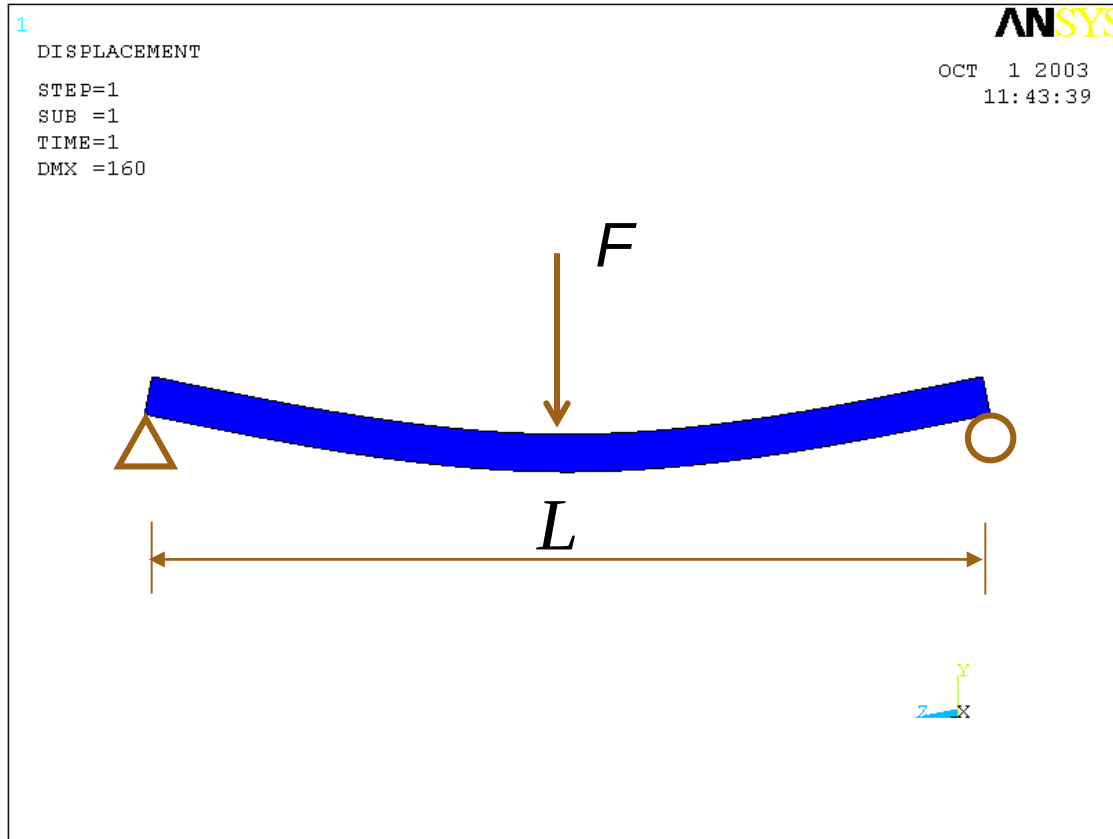


$$I = \frac{b^3h}{12}$$



LUNDS
UNIVERSITET

Böjning av fritt upplagd balk: Utböjning under lasten

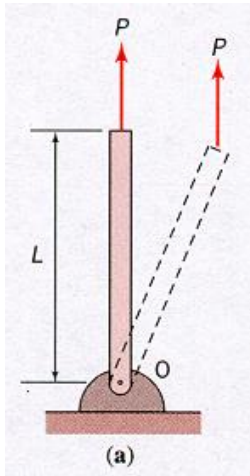


$$u = \frac{FL^3}{4Ebh^3}$$

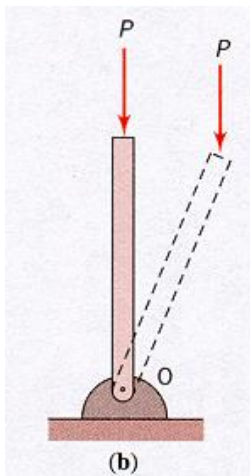
Typiskt mått för
maximal utböjning:
 $u = L/400$



Stabilitet – Instabilitet



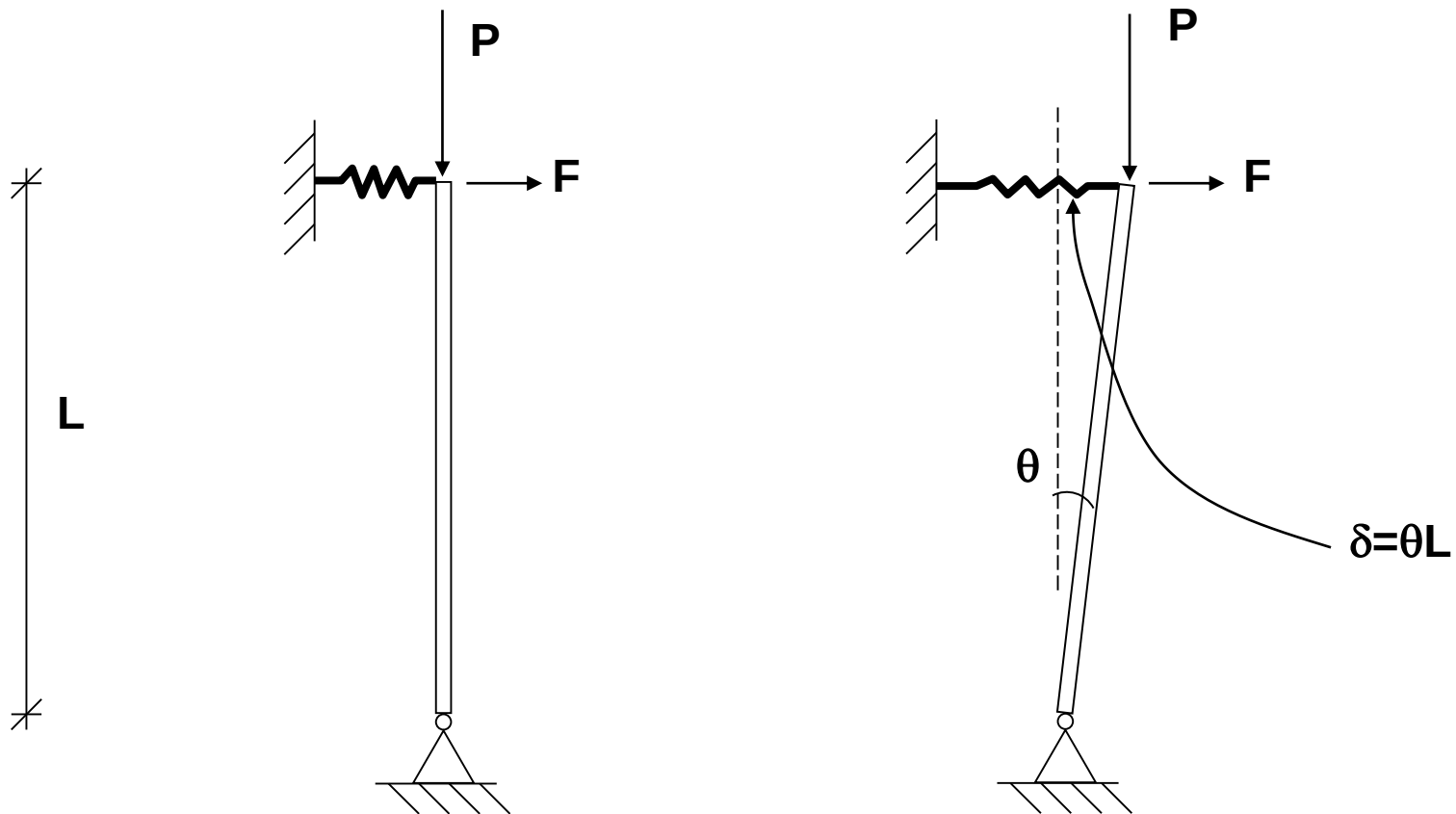
Stabil - om stången utsätts för en liten störning i sidled strävar kraften till att återföra pelaren till ursprungsläget



Instabil - om stången utsätts för en liten störning i sidled påskyndar kraften att stången faller



Stabilitet – Instabilitet



Stabilitet – Instabilitet

- Friläggning + Momentjämvikt
- Allmänt:
$$-k \cdot \delta \cdot L + P \cdot \delta + F \cdot L = 0$$
- Om $F=0$:
$$-k \cdot \delta \cdot L + P \cdot \delta = 0 ;$$
$$(P - kL) \cdot \delta = 0$$
$$\delta = 0 \text{ (ingen deformation) eller}$$
$$P = kL \text{ (fjäderstyvheten} \cdot \text{längden)}$$



Stabilitet – Instabilitet

- Stabilt om $P < kL$
 - Kraften i fjädern ger moment som förmår hålla emot moment pga P
- Instabilt om $P > kL$
 - Kraften i fjädern ger ej tillräckligt moment för att hålla emot moment pga P
- Kritisk last för $P = kL = P_{cr}$
 - Kraften i fjädern ger ett moment som exakt balanserar momentet pga P



Stabilitet – Styvhet

- Styvheten (i sidled)

$F/\delta = k - P/L$, men normalkraften i stången, $N = -P$,

$$F/\delta = k + N/L$$

- Styvheten för systemet beror på normalkraften

- Dragning $\Rightarrow$ ökad styvhet
- Tryck $\Rightarrow$ minskad styvhet
- ”Instabilt då styvheten = 0”



Pelarknäckning

- Normalkraften i pelare påverkar transversalstyvheten på samma sätt som i exemplet ovan
- Slanka pelare kan gå till brott trots att materialet beter sig elastiskt
- (Euler)Knäckning
 - Eng: buckling



Pelarknäckning

- Allmänt för pelarknäckning

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2}$$

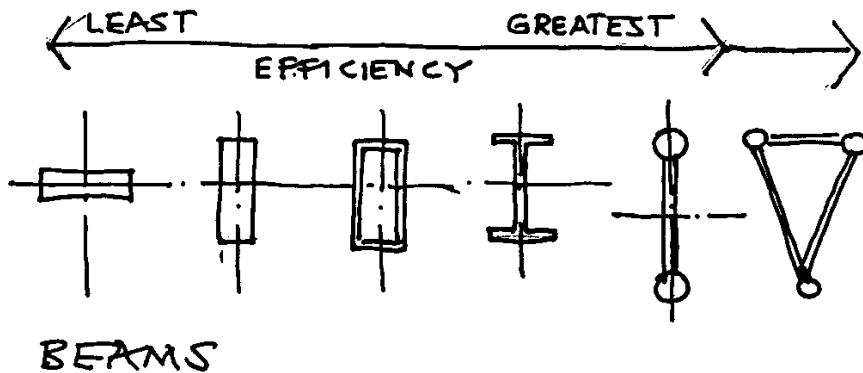
- Där β beror på inspännings-förhållanden



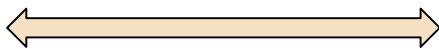
Pelarknäckning – Böjstyvheten

Effektivt tvärsnittsmått i böjning

I = Yttröghetsmoment



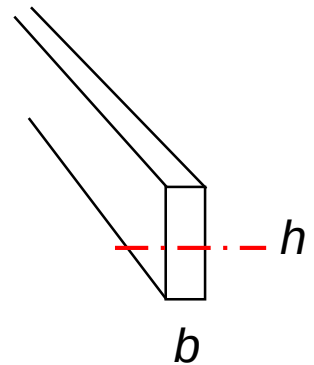
Litet



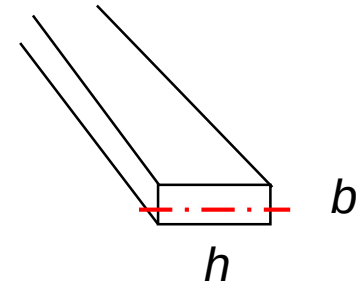
Stort

Rektangulära tvärsnitt

$$I = \frac{bh^3}{12}$$



$$I = \frac{b^3h}{12}$$



LUNDS
UNIVERSITET

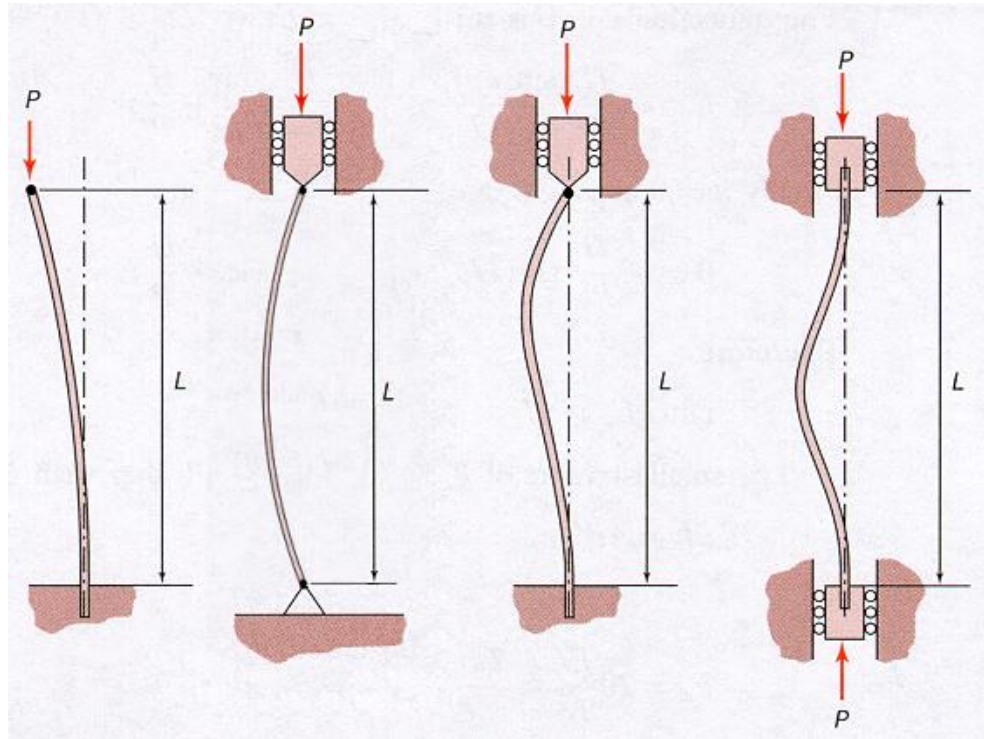
Pelarknäckning

Knäckningslast :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{(\beta L)^2}$$

βL effektiv

knäckningslängd

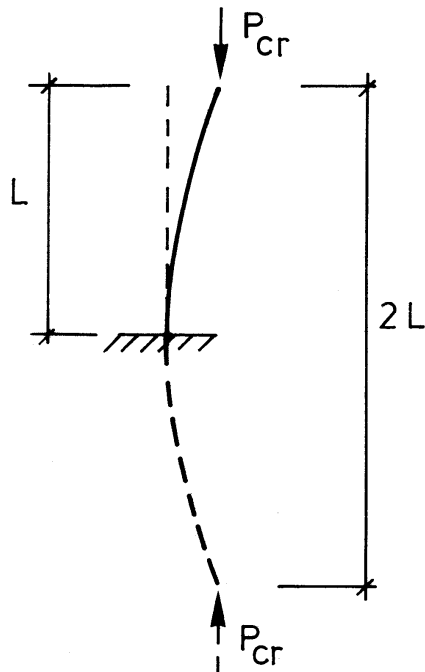


$\beta = 2.0 \quad 1.0 \quad 0.7 \quad 0.5$



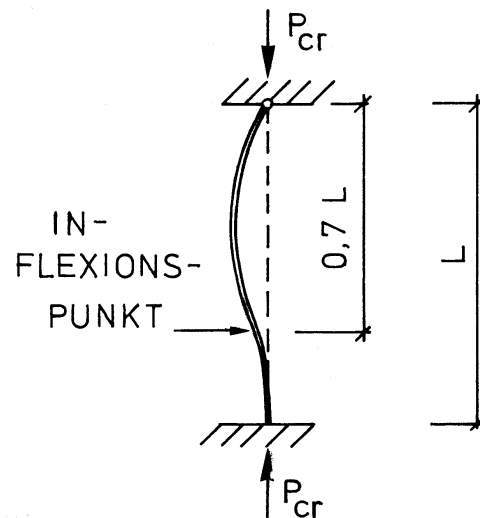
LUNDS
UNIVERSITET

Pelarknäckning



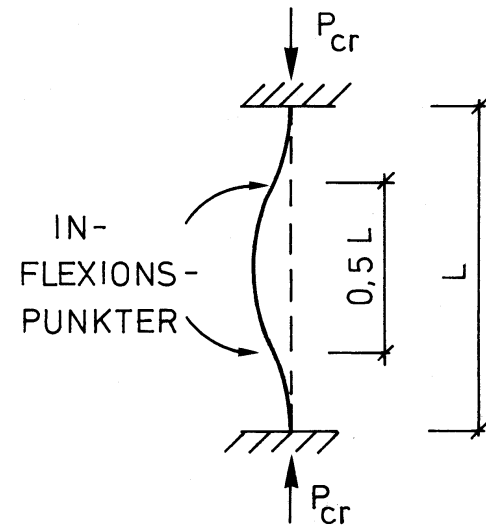
Knäcknings fall 1:

$$\beta = 2$$



Knäcknings fall 3:

$$\beta = 0.7$$



Knäcknings fall 4:

$$\beta = 0.5$$



Pelarknäckning

- Förutsättningar
 - Små deformationer
 - Initiellt rak
 - Centriskt tryck
 - Jämvikt i deformerat tillstånd
- 2:a ordningens teori, Eulerknäckning, linjär buckling, ...



Pelarknäckning

- Den kritiska lasten kan beräknas
- Utböjningen vid knäckning kan inte beräknas ("oändligt stor")
- Utböjningsformen vid knäckning kan beräknas
 - Form=mod (eng. Mode)





LUNDS
UNIVERSITET