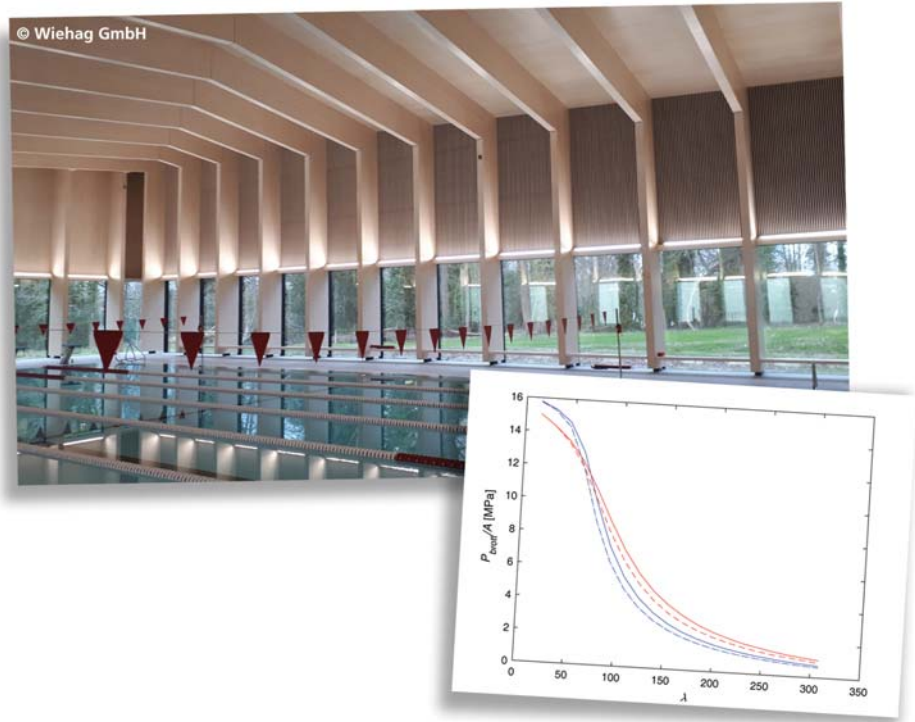




LUND  
UNIVERSITY



# DIMENSIONERING AV LIMTRÄPELARE ENLIGT EUROKOD 5

Inverkan av olika parametrar  
och beräkningsmetoder

EMIL NILSSON

Structural  
Mechanics

*Bachelor's Dissertation*



DEPARTMENT OF CONSTRUCTION SCIENCES

**DIVISION OF STRUCTURAL MECHANICS**

ISRN LUTVDG/TVSM--18/4002--SE (1-63) | ISSN 0281-6679

BACHELOR'S DISSERTATION | EXAMENSARBETE I HÖGSKOLEINGENJÖRSUTBILDNINGEN

**DIMENSIONERING AV LIMTRÄPELARE  
ENLIGT EUROKOD 5**

**Inverkan av olika parametrar  
och beräkningsmetoder**

**EMIL NILSSON**

Supervisors: **SUSANNE HEYDEN**, Senior Lecturer and **PETER PERSSON**, PhD,  
Division of Structural Mechanics, LTH.

Examiner: **HENRIK DANIELSSON**, PhD, Division of Structural Mechanics, LTH.

Copyright © 2018 Division of Structural Mechanics,  
Faculty of Engineering LTH, Lund University, Sweden.

Printed by V-husets tryckeri LTH, Lund, Sweden, July 2018 (PI)

**For information, address:**

Division of Structural Mechanics,  
Faculty of Engineering LTH, Lund University, Box 118, SE-221 00 Lund, Sweden.

Homepage: [www.byggmek.lth.se](http://www.byggmek.lth.se)



# Förord

Detta examensarbete representerar det sista momentet av utbildningen högskoleingenjör inom byggt teknik med arkitektur i Helsingborg. Examensarbetet har skrivits på Avdelningen för byggnadsme kanik i Lund och omfattar 22.5 högskolepoäng.

Examensarbetet initierades i mitten av mars 2018, efter en diskussion med Henrik Danielsson, Susanne Heyden och Peter Persson, på Avdelningen för byggnadsme kanik, där de presenterade ett väldigt intressant ämne.

Detta arbete har involverat många nya moment, där jag lärt mig både teoretiska och praktiska kunskaper. Då jag utfört arbetet själv, och något tidspressad, har det varit väldigt krävande men utan tvekan det moment som under min skolgång gett mest. Arbetet har även involverat att jag fått lära mig använda programvarorna Latex, Matlab och Calfem. Alla dessa kunskaper kommer jag ta med mig då jag efter detta studerar vidare i Lund, på utbildningen väg och vatten.

Jag skulle vilja tacka några personer som gjort detta examensarbete möjligt. Jag vill tacka Svenskt Trä, för att de gett mig tillåtelse att använda deras illustrationer i detta arbete, samt skickat ut gratis upplagor av Limträhandboken, del 1–3, till mig. Jag vill tacka Wiehag GmbH för att jag fått tillåtelse att använda deras bild till framsidan. Jag vill tacka Bo Zadig, grafisk tekniker på Avdelningen för byggnadsme kanik, för att han gjort anslaget och framsidan på examensarbetet till mig. Jag vill tacka min examinator, Henrik Danielsson, för att han på så kort varsel kom på idén som gav upphov till examensarbetet.

Slutligen vill jag rikta ett särskilt stor tack till mina handledare Peter Persson och i synnerhet Susanne Heyden, som genom hela arbetets gång, varit mycket involverade, pedagogiska, stöttande och alltid ställt upp då jag behövt hjälp.



# Sammanfattning

Allt fler strukturanalyser utförs i dagsläget med datorverktyg istället för med traditionella handberäkningar. Utvecklingen rör sig enligt Bell [1] från analyser enligt första ordningen med korrektionsfaktorer, till datoranalyser enligt andra ordningens teori.

Detta arbete jämför främst analys av limträpelare med första ordningens teori enligt Eurokod [3] där korrektionsfaktorn  $k_c$  används, mot analys med andra ordningens teori, där finita elementanalyser utförs med hjälp av programvarorna Matlab och Calfem.

Arbetet består av två delar. I den första delen utfördes en litteraturstudie där beräkningsmetoder och påverkansfaktorer för bärförmågan hos limträ analyserades. Därefter jämfördes de olika beräkningsmetoderna, där två referenspelare användes, för både enbart axiellt tryck och samtidigt tryck och böjmoment.

I den andra delen utfördes en parameterstudie. Några av testerna som utfördes grundade sig på en text som den norske forskaren Kolbein Bell skrivit [1] där han föreslår alternativa värden för beräkning av elasticitetsmodulen,  $E$ , som beaktar inverkan av lastvaraktighet och fukt för både första och andra ordningens analys.

I resultatet erhålls, då analys enligt andra ordningen jämförs med analys enligt första ordningen, upp till 45 % högre bärförmåga då den dimensionerande elasticitetsmodulen,  $E_d$ , enligt Eurokod [3] används, jämfört med upp till 30 % högre bärförmåga då  $E_d$  enligt Bell [1] används. Detta indikerar att lastvaraktighet och fukthalt (klimatklass) bör beaktas då analys enligt andra ordningen utförs, för att inte riskera att göra en grov överskattning jämfört med första ordningens analys. För maximalt ogynnsamma förhållanden (permanent last och klimatklass 3) visar sig andra ordningens analys, då  $E_d$  enligt Bell [1] används, vara nästan likvärdig med första ordningens analys då 5-percentilvärdet av elasticitetsmodulen,  $E_{0.05}$ , används.

Pelarens geometri samt skillnaden mellan knäckning i styva respektive veka riktningen visade sig inte ha någon inverkan på bärförmågan då samma resultat erhöles för bägge referenspelarna.

Då initialkrokigheten kontrollerades erhöles ett högre värde på bärförmåga då standardvärdet för limträ,  $L/500$ , användes, enligt andra ordningens teori. Först då initialkrokigheten blev större än ca.  $L/240$  gav beräkning enligt andra ordningen en lägre bärförmåga.

Då pelaren kontrollerades för samtidigt tryck och böjning kunde det fastställas att andra ordningens effekter blev tydligare för stora värden på axiell last, då både initialkrokigheten och  $E$ -modulen varierades. Då endast transversell last påverkade pelaren hade andra ordningens effekter ingen inverkan.





# Abstract

More and more structural analyses today are being conducted with computer-based tools in comparison to traditional methods using hand calculations. The development, according to Bell [1] is shifting from using first order analyses with correction factors,  $k_c$ , to using second order analyses, with computer-based tools.

This dissertation mainly compares analyses of glulam columns using first order theory according to Eurocode [3], to using second order theory, where finite element analyses are conducted with the computer programs Matlab and Calfem.

This dissertation consists of two parts. In the first part, a study was performed where different methods of calculation and parameters affecting the load capacity of glulam were analysed. The methods of calculation were then compared to each other, where two columns of reference were used. This comparison was done for only axial loading and simultaneous axial loading and bending moment.

In the second part a parameter study was conducted. Some of the tests that were conducted were based on a text, written by the Norwegian scientist Kolbein Bell [1], where he proposes alternative values for the modulus of elasticity,  $E$ , which takes load duration and moisture content into consideration, for analyses using both first and second order theory.

Part of the results, for when a second order analysis were compared to a first order analysis, was that the loading capacity using  $E_d$  according to Eurocode [3] increased with up to 45% using second order theory. Using  $E_d$  according to Bell [1] instead gave an increase of loading capacity with up to 30% which indicates that load duration and moisture content (service class) should be included when a second order analysis is being conducted, in order to not risk making an excessive overestimation in comparison to first order theory. For the most unfavourable conditions (permanent load and service class 3) it shows that when a second order analysis, using  $E_d$  according to Bell [1] is being used, produces almost the same results as a first order analysis, using the fifth percentile value of the modulus of elasticity,  $E_{0.05}$ .

The geometry of the column and the difference between buckling in the weak and strong axis turned out to have no effect on the loading capacity, since the same results were obtained from both reference pillars.

The initial curvature of the column presented a higher value of loading capacity for standard curvature value of glulam,  $L/500$ , when a second order analysis was conducted. Not until the initial curvature exceeded approximately  $L/240$ , did a second order analysis give a lower loading capacity than a first order analysis.

When the column was analysed for axial loading and simultaneous axial loading and bending moment, second order effects showed a higher impact for large values of axial load. This correlation proved to be correct for both variation of initial curvature and modulus of elasticity. When only a transverse load affected the column, second order effects had no impact.



# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
1.1	Bakgrund . . . . .	1
1.2	Mål . . . . .	1
1.3	Metod . . . . .	1
1.4	Avgränsningar . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Teori</b>	<b>3</b>
2.1	Allmänt om limträ . . . . .	3
2.2	Bärförmåga för limträ . . . . .	4
2.2.1	Brottfenomen . . . . .	4
2.2.2	Geometri . . . . .	6
2.2.3	Inspänningsförhållanden . . . . .	6
2.2.4	Materialegenskaper . . . . .	9
2.2.5	Last . . . . .	12
2.3	Dimensionering i gränstillstånd . . . . .	12
2.4	Dimensioneringsmetoder för rent tryck . . . . .	14
2.4.1	Materialbrott . . . . .	14
2.4.2	Eulerknäckning . . . . .	14
2.4.3	Första ordningens teori enligt Eurokod 5 . . . . .	15
2.4.4	Andra ordningens teori med sinusformad initialutböjning . . . . .	16
2.5	Dimensionering för tryck och samtidigt böjmoment . . . . .	17
2.5.1	Första ordningens teori enligt Eurokod 5 . . . . .	17
2.5.2	Andra ordningens teori med sinusformad initialutböjning . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Metod</b>	<b>21</b>
3.1	Förutsättningar och indata . . . . .	21
3.1.1	Referenspelare . . . . .	21
3.1.2	Calfem . . . . .	22
3.2	Limträpelare utsatt för rent tryck . . . . .	24
3.2.1	Materialbrott . . . . .	24
3.2.2	Eulerknäckning . . . . .	24
3.2.3	Första ordningens teori enligt Eurokod 5 . . . . .	24
3.2.4	Andra ordningens teori med sinusformad initialutböjning . . . . .	25
3.2.5	Resultat . . . . .	26
3.3	Limträpelare utsatt för samtidigt tryck och böjmoment . . . . .	27
3.3.1	Första ordningens teori enligt Eurokod 5 . . . . .	27
3.3.2	Andra ordningens teori med finita elementmetoden . . . . .	30
3.3.3	Resultat . . . . .	33

<b>4</b>	<b>Parameterstudie</b>	<b>35</b>
4.1	Pelare utsatt för rent tryck . . . . .	35
4.1.1	Elasticitetsmodul . . . . .	35
4.1.2	Lastvaraktighet och fukthalt . . . . .	36
4.1.3	Pelarens geometri . . . . .	44
4.1.4	Styva eller veka riktningen . . . . .	45
4.1.5	Initialkrokighet . . . . .	48
4.2	Pelare utsatt för samtidigt tryck och böjmoment . . . . .	49
4.2.1	Relation mellan tryck och böjning . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Slutsats</b>	<b>51</b>
5.1	Huvudsakliga observationer . . . . .	51
5.1.1	Elasticitetsmodul . . . . .	51
5.1.2	Lastvaraktighet och fukthalt . . . . .	51
5.1.3	Pelarens geometri . . . . .	52
5.1.4	Styva eller veka riktningen . . . . .	52
5.1.5	Initialkrokighet . . . . .	52
5.1.6	Relation mellan tryck och böjning . . . . .	52
5.2	Avslutande diskussion . . . . .	52
5.3	Förslag på fortsatta studier . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Referenser</b>	<b>55</b>
<b>7</b>	<b>Bilaga A</b>	<b>57</b>

# 1. Inledning

## 1.1 Bakgrund

Allt fler strukturanalyser görs med datorverktyg istället för med traditionella handberäkningar. Analyser enligt första ordningens teori i kombination med korrektionsfaktorer kommer enligt Bell [1] framöver troligen att ersättas av mer noggranna analyser enligt andra ordningens teori.

För pelare kan bärförmågan enligt Eurokod 5 [3] kontrolleras med hjälp av första ordningens teori. Kravet för träpelare är att den dimensionerande tryckspänningen ska vara mindre eller lika stor som den dimensionerande tryckhållfastheten. Det står även föreskrivet att "böjspänningar av initialkrokighet, excentriciteter och påtvingade deformationer ska beaktas tillsammans med inverkan av tvärgående laster" [3]. Dessa effekter kan beaktas genom att multiplicera tryckhållfastheten med reduktionsfaktorn  $k_c$ , som även beaktar andra ordningens effekter, vilket ska ge en bärförmåga som är på säkra sidan.

Dimensionering kan även göras enligt andra ordningens teori. Detta görs normalt med datorbaserade beräkningsmetoder som finita elementmetoden (FEM). Man kan också använda sig av differentialekvationer som ger en exakt lösning, eller approximativa handberäkningar. De approximativa metoderna bygger på att man räknar med förstoringfaktorer som ger ett högre, mer realistiskt moment. I Eurokod 5 [3] finns det i dagsläget inte tydliga föreskrifter om vilka parametrar som ska beaktas vid beräkning enligt andra ordningens teori. För att underlätta användande av andra ordningens teori i praktiken med hjälp av datorverktyg bör vissa förtydliganden göras med hänsyn till de parametervärden som används.

## 1.2 Mål

Den nuvarande Eurokoden för trä (Eurokod 5) bygger på definitioner för styvhetsparametrar (elasticitets- och skjuvmodul) som inte tar hänsyn till fukthalt och lastvaraktighet då beräkningar görs med andra ordningens teori. Eftersom bärförmågan enligt beräkningsmodeller som beaktar instabilitetsfenomen eller andra ordningens teori påverkas av styvheten, som för träkonstruktioner i sin tur i hög grad påverkas av fukthalt och lastvaraktighet [6], finner Bell [1] att styvhetsparametrarna på något sätt bör avspegla dessa värden i sina definitioner. Samma problem gäller även för korrektionsfaktorerna  $k_c$  och  $k_{crit}$ , som i den nuvarande utformningen beror på materialets hållfasthet, styvhet och slankhetstal.

Målet är att belysa den inverkan olika val av beräkningsstrategi och indata har på bärförmågan för en limträpelare.

## 1.3 Metod

Arbetet delas upp i två huvudmoment. I det ena momentet utförs litteraturstudier där beräkningsmetoder och resultat i bland annat Eurokod samt olika handböcker (både nationella och internationel-

la) studeras. I det andra momentet utförs parameterstudier för bärförmågan av en limträpelare utsatt för olika lastfall. I ett första fall analyseras pelaren för rent tryck, och därefter för samtidigt tryck och böjmoment.

De parametrar som studeras är:

- Elasticitetsmodul
- Inverkan av lastvaraktighet och fukthalt
- Pelarens geometri
- Upplagsförhållanden
- Initialkrokighet
- Relation mellan tryck och böjning

Beräkningsmetoder som används:

- Beräkning med första ordningens teori, enligt Eurokod 5
- Analytisk metod
- Approximativ metod med andra ordningens teori
- Modellering enligt andra ordningens teori med hjälp av finita elementmetoden (FEM)

## 1.4 Avgränsningar

Enbart teoretiska tester med hjälp av datorberäkningar utförs. För att erhålla praktiskt tillämplar data måste även provningar genom laborationer utföras. Endast ren böjknäckning tas hänsyn till i denna uppsats, d.v.s. ingen vridning förekommer.

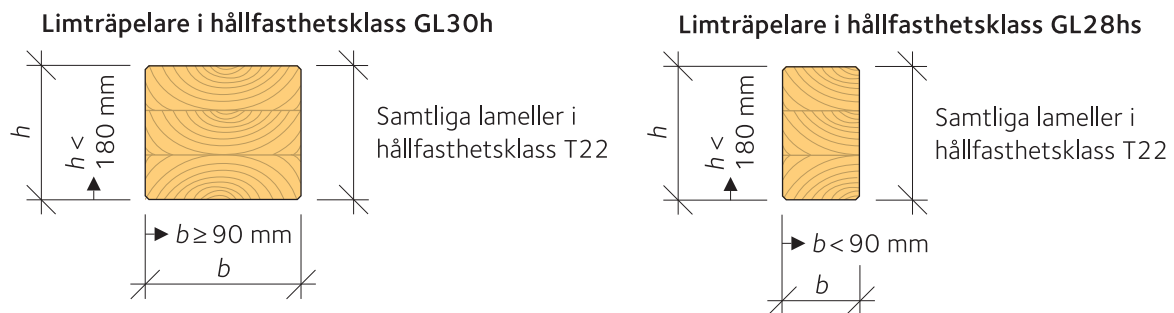
## 2. Teori

Detta kapitel kommer att förse läsaren med den bakgrund som krävs för att förstå de beräkningar och metoder som används i denna uppsats. Beräkningsmetoderna, modellerna och teorin till detta kapitel är hämtade ur Eurokod 5 [3], samt böckerna, Limträhandboken, del 1 [5], Limträhandboken, del 2 [6], Byggkonstruktion [7] och Introduktion till strukturmekniken [8].

### 2.1 Allmänt om limträ

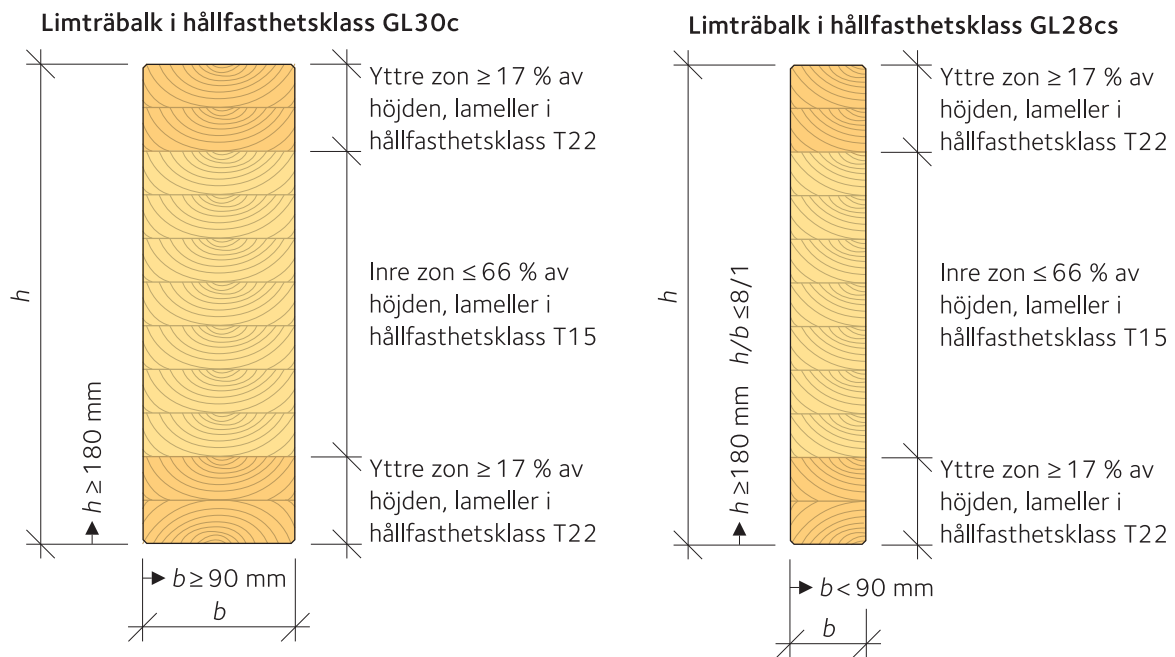
Limträ tillverkas genom att minst två lameller (tunna skivor), vanligtvis av barrträ, pressas och limmas ihop. Lamelltjockleken varierar mellan 6 och 45 mm och fiberriktningen ska vara parallell med komponentens längdriktning [6].

Vanliga hållfasthetsklasser för limträ tillverkas i Sverige med fyra olika metoder [6]. Homogent limträ GL30h, kombinerat limträ GL30c, klyvsågat homogent limträ GL28hs och klyvsågat kombinerat limträ GL28cs. Siffran i ovanstående beteckningar beskriver den karakteristiska böjhållfastheten för limträet. Homogent limträ, figur 2.1, innebär att lameller av samma hållfasthetsklass används. Vanligtvis är det de yttre lamellerna som utsätts för störst påkänningar, därför brukar dessa normalt vara av högre hållfasthetsklass. Då kallas komponenten istället för kombinerat limträ, figur 2.2. Klyvsågat limträ tillverkas genom klyvsågning av bredare tvärsnitt.

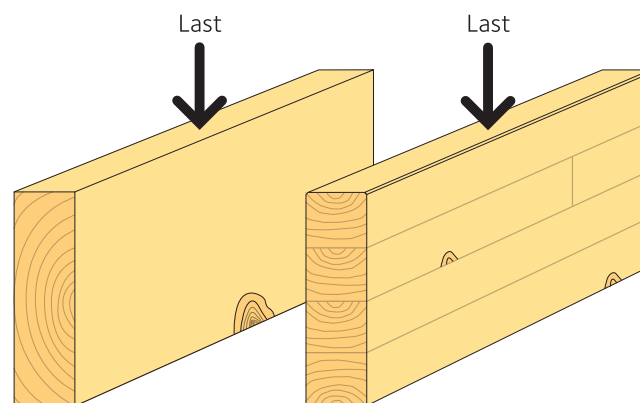


Figur 2.1: Limträkomponenter, homogent och klyvsågat homogent limträ [6].

En komponent av limträ har jämfört med en komponent av konstruktionsvirke med samma dimensioner högre genomsnittlig hållfasthet och dessutom mindre spridning av hållfastheten. Detta kallas för lamelleringseffekten, figur 2.3 [6]. Hållfastheten hos konstruktionsvirke bestäms av det svagaste tvärsnittet. Oftast ligger det svagaste tvärsnittet över en kvist, fingerskarv eller motsvarande. Hur många virkesdefekter som en träkomponent innehåller kan skilja sig mycket, vilket ger stor skillnad i hållfasthet. I en limträbalk, där virket är kapat i lameller, fördelas virkesdefekterna jämnare och materialet blir mer homogent vilket resulterar i en ökad genomsnittlig hållfasthet och mindre spridning på den, vilket i sin tur ökar värdet på den karakteristiska hållfastheten.



Figur 2.2: Limträkomponenter, kombinerat och klyvsågat kombinerat limträ [6].



Figur 2.3: Lamelleringseffekten. Fördelning av virkesdefekter för en komponent av limträ jämfört med en komponent av konstruktionsvirke [6].

## 2.2 Bärförmåga för limträ

Bärförmågan definieras som den last en konstruktionsdel klarar av, under rådande förutsättningar, innan en viss typ av brott inträffar. Bärförmågan för limträ är påverkad av många olika parametrar, såväl inre, t.ex. styvhet, som yttre, t.ex. klimatpåverkan. För att bärförmågan ska kunna räknas ut med största noggrannhet måste de påverkande parametrarna tas hänsyn till i beräkningarna. Följande avsnitt har som syfte att förtydliga och gruppera de olika parametrar som påverkar bärförmågan hos limträpelare.

### 2.2.1 Brottfenomen

Den viktigaste funktionen som en konstruktion måste uppfylla är att den håller för de laster och påverkningar som den utsätts för. För att säkerställa att en konstruktion inte kollapsar finns det tre typer av kollapsar att kontrollera [8]. Den övergripande stabiliteten måste kontrolleras, d.v.s. att konstruktionen inte välter eller glider iväg. Den inre stabiliteten måste kontrolleras, d.v.s. att konstruktionen bibehåller sin form och t.ex. inte viker sig. Dessutom måste hållfastheten hos de enskilda elementen i



konstruktionen kontrolleras, så att de inte går till brott. Detta arbete kommer enbart att ta hänsyn till hållfastheten hos enskilda element, i detta fall limträpelare. För pelare utsatta för tryck och/eller böjmoment finns det principiellt två typer av brott som måste tas hänsyn till, materialbrott och knäckning [8]. I detta arbete beaktas inte böjridknäckning, samtliga pelare förutsätts alltså vara stagade för att förhindra denna brotttyp.

En initialt rak pelare, som belastas av rent axiellt centriskt tryck kan gå till brott genom antingen materialbrott eller knäckning, beroende på hur lång pelaren är i förhållande till sitt tvärsnitt (även relationen mellan pelarens elasticitetsmodul och hållfasthet påverkar om pelaren går till knäckning eller materialbrott). En kort pelare med ett stort tvärsnitt kommer att gå till brott då materialet krossas. Detta kallas för materialbrott. Lasten då en pelare går till materialbrott beräknas enligt

$$N_R = Af_c \quad (2.1)$$

där  $N_R$  är bärförmågan vid tryck,  $A$  är tvärsnittsarean och  $f_c$  är tryckhållfastheten [8].

En lång och slank pelare kan även brista genom knäckning, d.v.s. att den, likt en tryckt linjal, plötsligt böjer ut åt sidan tills materialet brister. Knäckning för en pelare enligt dessa förutsättningar kallas för Eulerknäckning och den kritiska lasten beräknas enligt

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2} \quad (2.2)$$

där  $E$  är elasticitetsmodulen,  $I$  är tröghetsmomentet i knäckningsriktningen och  $\beta L$  är knäcklängden för pelaren. För ett rektangulärt tvärsnitt beräknas  $I$  enligt

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (2.3)$$

där  $b$  och  $h$  är tvärsnittsmåtten och  $h$  är måttet i knäckningsriktningen [8].

Pelare har i praktiken alltid någon form av initialkrokighet, vilket även för fallet med ren axiell belastning ger upphov till ett moment då initialkrokigheten gör att lasten angriper excentriskt. Ett moment uppstår även om pelaren utsätts för en transversell last. Pelare utsatta för dessa förhållanden kan också gå till antingen materialbrott eller knäckning, men momentet gör att risken för knäckning blir större. Bärförmågan för materialbrott kan vid denna typ av belastning beräknas med hjälp av första ordningens teori, där jämvikten ställs upp i det odeformerade tillståndet. Detta görs enligt Naviers formel

$$\frac{N}{A} + \frac{M}{W} \leq f \quad (2.4)$$

som kan skrivas om genom att dividera med hållfastheten,  $f$

$$\frac{N}{Af_c} + \frac{M}{Wf_m} \leq 1 \quad (2.5)$$

Normalkraften,  $N$ , divideras med hållfastheten för tryck,  $f_c$ , och momentet,  $M$ , divideras med hållfastheten för böjning,  $f_m$ .  $W$  är böjmotståndet, som beräknas enligt

$$W = \frac{bh^2}{6} \quad (2.6)$$

för rektangulära tvärsnitt.

Man kan även beräkna brottlasten med hjälp av andra ordningens teori. Första ordningens teori använder sig av linjära samband, där utböjning och snittkrafter beror linjärt på de axiella och transversella laster som elementet utsätts för. Detta lämpar sig för små normalkrafter. För större normalkrafter måste man ta hänsyn till dess inverkan på utböjningen. Ju större normalkraften blir desto större blir dess inverkan på utböjningen och momentet i pelaren, vilket resulterar i att transverallasten som pelaren klarar blir mindre och mindre. Då den kritiska lasten är uppnådd, kollapsar pelaren av enbart den axiella lasten. För att ta hänsyn till andra ordningens effekter kan man använda sig av följande metoder [8]:

- Differentialekvationer där ett exakt värde på bärförmåga erhålls.
- Approximativa metoder, där förstöringsfaktorer används för att ta hänsyn till andra ordningens effekter.
- Datorbaserade beräkningsmetoder så som finita elementmetoden (FEM).

I detta arbete kommer de två senare metoderna att användas.

## 2.2.2 Geometri


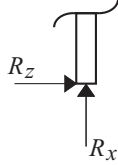
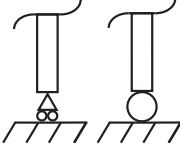
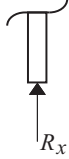
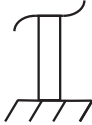
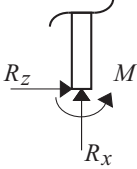
I föregående avsnitt framgick det att pelarens geometri och krokighet spelar stor roll för dess bärförmåga. Pelares geometri bestäms av principiellt av två faktorer, förutsatt att pelaren har en homogen form, nämligen tvärsnittsarean som är  $bh$ , och längden  $L$ . Måtten på tvärsnittets bredd och höjd hos pelare är ofta förutbestämda hos tillverkare. I vissa fall kan pelare även tillverkas med specialbeställda mått men i detta arbete kommer endast standardmått att användas.

Initialkrokigheten hos pelaren ska enligt Eurokod 5 [3] tas hänsyn till då bärverksanalys utförs. Enligt Limträhandboken, del 2 [6], är ett rimligt värde på initialkrokigheten  $L/500$ . Pelaren antas böja ut enligt en sinusformad kurva för samtliga lastfall.

## 2.2.3 Inspänningsförhållanden

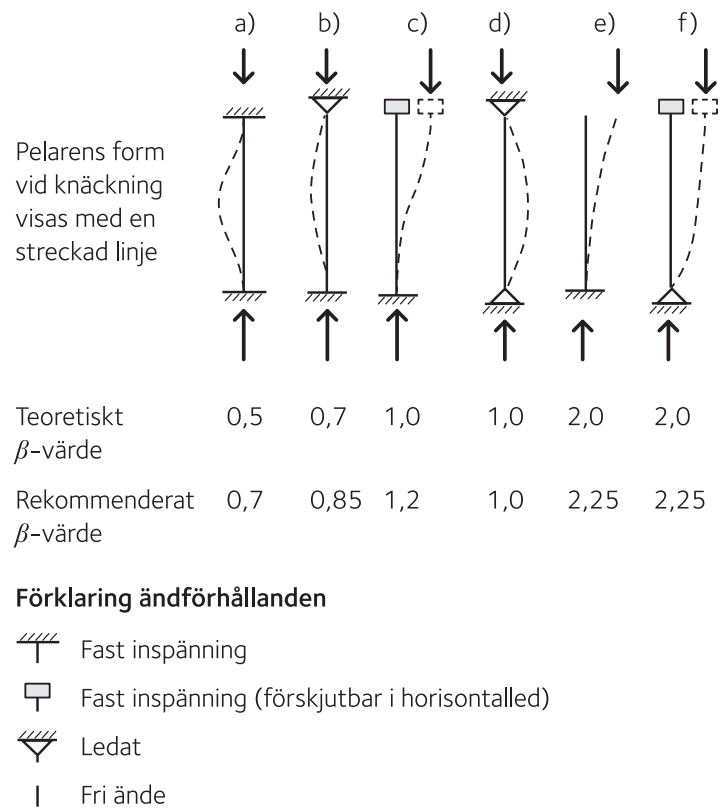
Enligt ekvation 2.2 beror knäcklasten på knäcklängden. Knäcklängden beror i sin tur på pelarens faktiska längd och inspänningsförhållande, d.v.s. vilka upplag som finns i pelarens ändpunkter. För pelare specificeras främst tre typer [8], fixlager, rullager och fast inspänning. Vilka symboler, förskjutningsvillkor samt upplagskrafter som gäller för respektive upplag förtydligas i tabell 2.1.

Tabell 2.1: Upplag med symbol, förskjutningsvillkor och upplagskrafter, enligt [8]. Förskjutning i horisontal- och vertikalled samt vinkeländring (rotation) betecknas med  $u$ ,  $v$  respektive  $\theta$ .

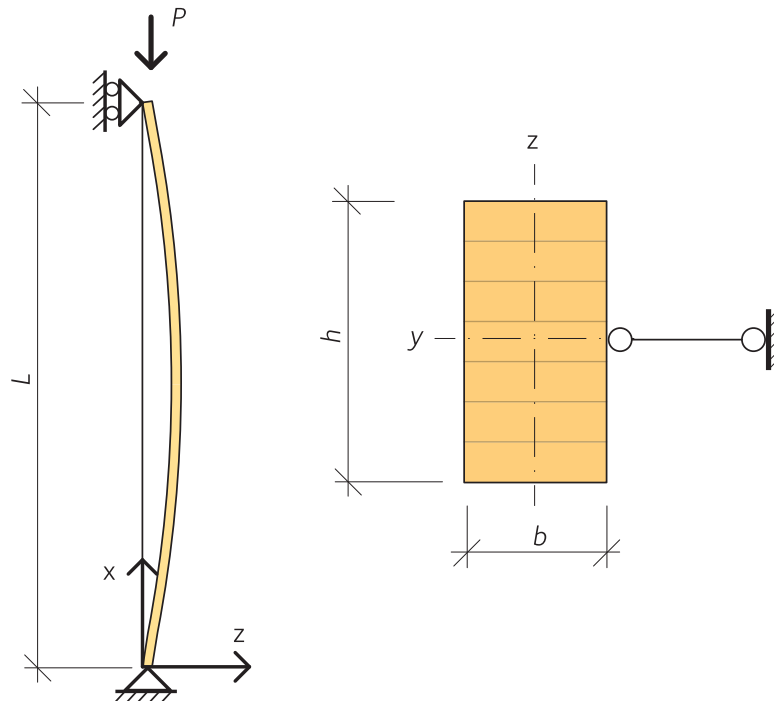
Beteckning	Symbol	Förskjutningsvillkor	Upplagskrafter
Fixlager		$u = 0$ $v = 0$	
Rullager		$v = 0$	
Fast inspänning		$u = 0$ $v = 0$ $\theta = 0$	

Med hjälp av dessa upplag kan man definiera det som kallas Eulers knäckningsfall, som bygger på olika kombinationer av upplag för pelare. Varje upplagskombination har ett teoretiskt samt ett praktiskt värde på knäcklängd,  $\beta$ , se figur 2.4. Det teoretiska värdet bygger enligt Eulers teori på ideala förutsättningar, d.v.s. att upplaget antingen är fullkomligt, eller inte alls, förhindrat att röra sig i vertikal- och horisontalled samt att rotera. Det praktiska värdet enligt Limträhandboken del 2 [6], beaktar att upplag i praktiken har en viss eftergivlighet, vilket gör att det praktiska värdet är något högre.

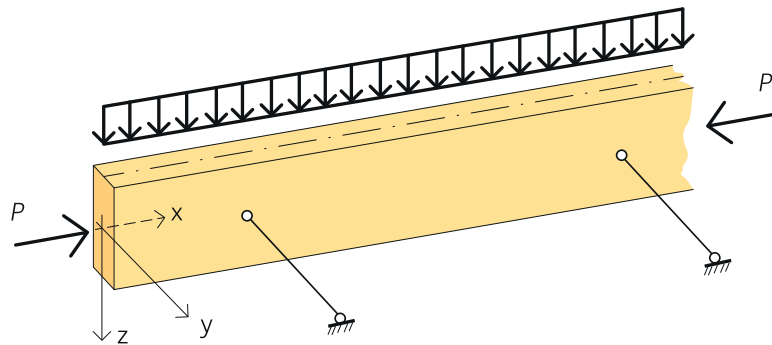
I arbetet studeras bara ren böjknäckning, vilket betyder att ingen vridning förekommer vid knäckning. Se figurerna 2.5 och 2.6 för exempel där böjknäckning med rent axiellt tryck respektive med samtidigt tryck och böjmoment illustreras. För detta fall testas både knäckning i styva och veka riktningen, där pelaren förutsätts vara stagad tvärs utböjningsriktningen för samtliga lastfall.



Figur 2.4: Knäcklängder för olika upplagsförhållanden för pelare [6].



Figur 2.5: Pelare utsatt för axiellt tryck. Knäckning sker kring  $y$ -axeln [6].



Figur 2.6: Pelare utsatt för samtidigt tryck och böjmoment. Böjning sker kring  $z$ -axeln [6].

## 2.2.4 Materialegenskaper

Precis som för konstruktionsvirke kännetecknas limträ, enligt [6], av att:

- Hållfastheten varierar med vinkeln mellan spänning och fiberriktning på grund av träets ortotropi.
- Materialegenskaper varierar både inom en och samma komponent, och mellan olika komponenter.
- Hållfastheten minskar ju längre tidsperiod som träet belastas.
- Sannolikheten för att en komponent ska innehålla ett fel som orsakar brott, ökar med dess storlek.
- Hållfastheten minskar ju mer fuktkvoten ökar.

För limträpelare som utsätts för antingen materialbrott eller böjknäckning är tryckhållfastheten och böjhållfastheten avgörande för pelarens bärförmåga. Det karakteristiska värdet på tryck- och böjhållfasthet bestäms genom att en stor mängd element testas, t.ex. pelare. Därefter bestäms en viss procenthalt som representerar den andel pelare som underskrider det karakteristiska värdet. För dimensionering används 5-percentilen av hållfasthets- och styvhetsvärdena, d.v.s. att endast fem av hundra element underskrider dessa värden [6]. Limträ som tillverkas enligt SS-EN 14080 [4] får en bestämd hållfasthetsklass som kan bestämmas på följande sätt:

- A Genom beräkning, där egenskaperna för limträet beräknas utifrån de använda lamellernas egenskaper,
- B genom balkprovning eller
- C med hjälp av en klassificeringsmetod beskriven i SS-EN 14080.

Detta arbete kommer att använda värden på hållfasthet samt elasticitetsmodul enligt metod C.

Elasticitetsmodulen beskriver hur mycket ett material töjer sig under en viss spänning. För elasticitetsmodul beskrivs i denna uppsats fyra värden,  $E_{0.05}$  som är 5-percentilvärdet,  $E_{mean}$  som är det beräknade medelvärdet för respektive hållfasthetsklass [6],  $E_d$  som är dimensioneringsvärdet av elasticitetsmodulen samt  $E_{mean,fin}$  som är det slutgiltiga värdet. De två senare  $E$ -modulerna beskrivs i nästa avsnitt.

Tabell 2.2: Karakteristiska hållfasthets- och styvhetsvärden i MPa för limträ av olika hållfasthetsklasser, enligt SS-EN 14080 [4]. Tryckhållfasthet, böjhållfasthet och styvhetsvärden gäller parallellt fibrerna.

Egenskap	Symbol	GL28cs	GL28hs	GL30c	GL30h
Tryckhållfasthet	$f_{ck}$	24	28	24.5	30
Böjhållfasthet	$f_{mk}$	28	28	30	30
Elasticitetsmodul	$E_{mean}$	12 500	13 100	13 000	13 600
	$E_{0.05}$	10 400	10 500	10 800	11 300

Dimensionering i gränstillstånd enligt Eurokod [3], bygger på de karakteristiska värdena för hållfasthet och styvhet, enligt tabell 2.2. Hänsyn måste, enligt [3], även tas till:

- Materialens tidsberoende egenskaper (lastvaraktighet, krypning).
- Omgivningsklimatet (temperatur, fuktvariationer).
- Olika dimensioneringssituationer (byggstadium, förändringar i upplagsvillkor).

Det dimensionerande värdet för limträets hållfasthet bestäms enligt

$$f_d = k_{mod} k_h \frac{f_k}{\gamma_M} \quad (2.7)$$

Det karakteristiska värdet för dess hållfasthet hämtas ur tabell 2.2. Det karakteristiska värdet modifieras sedan med faktorerna  $k_{mod}$ ,  $k_h$  och partialkoefficienten  $\gamma_M$ . Partialkoefficienten  $\gamma_M$  beaktar osäkerheter i använda beräkningsmodeller, hållfasthetsvärden och måttavikelser. För limträ är detta värde 1.25 [6].

Faktorn  $k_h$  används endast för rektangulära tvärsnitt då höjden är mindre än 600 mm. Det karakteristiska värdet för böjhållfasthet  $f_{mk}$  kan då ökas med faktorn  $k_h$  som beaktar storlekseffekten. I övriga fall är värdet på  $k_h$  lika med 1 [6].

$$k_h = \min \left\{ \left( \frac{600}{h} \right)^{0.1}, 1.1 \right\} \quad (2.8)$$

Storlekseffekten är främst dokumenterad vid korttidsbelastning i laboratorium. Vid långtidsbelastning har i dagsläget inte tillräckligt många undersökningar gjorts [6]. Limträbalkar som går till brott vid belastning under laboratorietester (korttidsbelastning vid 12 % fuktkvot) kännetecknas av spröda brott. Spröda brott beror ofta på att spänningarna i träet inte hinner omfördelas. Brott inträffar då spänningen i det kritiska tvärsnittet överskrider träets hållfasthet. Det kritiska tvärsnittet är ofta beläget där kvistar och andra imperfektioner upptar störst tvärsnittsarea [6].

Faktorn  $k_{mod}$  beaktar både lastvaraktigheten och klimatförhållanden som trärelementet utsätts för. Eftersom hållfastheten försämras då lastvaraktigheten ökar, och ju fuktigare materialet blir, minskar  $k_{mod}$  den karakteristiska hållfastheten enligt tabell 2.3 och 2.4. Både klimatklasserna och lastvaraktighetsklasserna är kopplade till praktiska fall. Endast momentan last, för klimatklasserna 1 och 2 ger en förstoringfaktor på den karakteristiska hållfastheten.

Tabell 2.3: Lastvaraktigheter [3].

Lastvaraktighetsklass	Akkumulerad varaktighet	Exempel på belastning
Permanent (P)	> 10 år	Egentyngd
Långtid (L)	6 månader – 10 år	Lagrat gods
Medellång (M)	1 vecka – 6 månader	Nyttig last på bjälklag Snölast
Korttid (S)	< 1 vecka	Vindlast
Momentan (I)		Vindstötar Olyckslast Enstaka koncentrerad last på yttertak

Tabell 2.4: Korrektionsfaktor  $k_{mod}$  för beräkning av bärförmåga för limträ i klimatklasserna 1, 2 och 3 [3].

Material	Klimatklass	Lastvaraktighetsklass				
		Permanent	Lång	Medellång	Kort	Momentan
Limträ, fanerträ och konstruktionsvirke	1	0.6	0.7	0.8	0.9	1.1
	2	0.6	0.7	0.8	0.9	1.1
	3	0.5	0.55	0.65	0.7	0.9

Vid dimensionering i bruksgränstillståndet måste även krypning tas hänsyn till, d.v.s. att deformationer ökar med tiden [3]. Krypningens storlek beror på lastvaraktigheten, fuktkvoten och enligt Limträhandboken del 2 [6] även variationerna i fukthalt och belastningsstorlek. Ju fuktigare ett material är, och ju högre belastningen är, desto mer kryper det. Däremot tenderar ett material som är utsatt för en varierande fukthalt och belastningsstorlek att krypa mer än ett material med något högre konstant fukthalt och belastningsstorlek. Vid varierande fukthalt påverkas trä även av krympningseffekter, vilket skapar ytterligare deformationer. På grund av ortotropin hos trä är krympningen större vinkelrätt fiberriktningen än parallellt fiberriktningen. Krympningen parallellt fiberriktningen kan vanligtvis ses som försumbar [6]. Vid beräkning av deformationer i bruksgränstillståndet beaktas fukthalten med korrektionsfaktorn  $k_{def}$  som tar hänsyn till det belastade materialet, dess fukthalt och fukthaltens variation [6], enligt tabell 2.5.

Tabell 2.5: Korrektionsfaktor  $k_{def}$  för beräkning av långtidsdeformation i klimatklass 1, 2 och 3 [3].

Material	Klimatklass		
	1	2	3
Limträ	0.60	0.80	2.00

Enligt Eurokod [3], ska verifiering av hållfasthet hos enskilda bärverksdelar baseras utifrån antagandet om att linjärt samband råder mellan töjning och spänning för hela elementet. Brott uppstår då spänningen överskrider materialets hållfasthet. Om spänningen avtar, återgår materialet till sin ursprungliga form. Vid tryck får även ett icke-linjärt samband, elasto-plastiskt, användas [3]. Med detta menas att materialet uppvisar både plastiska och elastiska egenskaper. Ett elasto-plastiskt material har ett linjärt samband mellan spänning och töjning fram till en viss punkt, flytgränsen. Därefter är spänningen konstant under växande töjning. Har spänningen väl överskridit flytgränsen återgår materialet aldrig helt till sin ursprungsform då spänningen avtar, d.v.s. det har fått en permanent deformation. Brott uppstår då en viss del av materialet har plasticerat. Träet plasticeras på den tryckta sidan, vilket enligt Limträhandboken del 2 [6] beaktas i parametern  $k_c$  som används i ekvation 2.15.

### 2.2.5 Last

Lasten som en pelare utsätts för kan i huvudsak delas upp i två kategorier, axiell last och transversell last. Med axiell last menas en last som verkar parallellt med den längsgående axeln hos ett element. För pelare motsvarar den axiella lasten tryckkraften parallellt fiberriktningen. Den axiella lasten kan antingen verka centriskt eller excentriskt. Med centrisk last menas att kraften angriper elementet i samma axel som dess tyngdpunkt är belägen i. En excentrisk last är en last som angriper utanför dess tyngdpunkt och kan vara antingen avsiktligt eller oavsiktligt excentrisk. En avsiktlig excentrisk last kan till exempel bero på en konsol längst upp på en pelare i ett mellanbjälklag [8], och en oavsiktlig excentrisk last kan till exempel bero på ojämn deformation vid stora kontaktytor [6].

Transversella laster verkar till skillnad från axiella krafter vinkelrätt mot den längsgående axeln. För pelare förekommer transversella laster som antingen en punktlast eller utbredd last. Ett exempel för båda kan exempelvis vara vindlast, där den verkar som en utbredd last på ytterpelarna och en punktlast på mittpelarna, förutsatt att kraften förs vidare genom t.ex. ett mellanbjälklag. Både excentrisk axiella laster och transversella laster ger upphov till ett böjmoment.

## 2.3 Dimensionering i gränstillstånd

Dimensionering baserar sig på gränstillstånd [3], som anger de förhållanden som inte får överskridas för att relevanta prestandakrav som ställs på byggnaden ska gälla [6]. Allmänna dimensioneringsregler för materialparametrar beskrevs i avsnitt 2.2.4.

Gränstillstånden delas upp i brottgränstillstånd och bruksgränstillstånd. Brottgränstillståndet avser konstruktionens säkerhet, d.v.s. tillstånd som kan innebära kollaps eller brott i konstruktionen. Bruksgränstillståndet avser otillfredställande tillstånd i konstruktionen, t.ex. stora deformationer, oönskade vibrationer eller oönskade estetiska effekter [6]. För pelare är det rimligt att ställa upp dimensioneringen i brottgränstillståndet då pelare i konstruktioner ofta bär upp t.ex. mellanbjälklag, ytterväggar och tak, vilket vid brott eller kollaps kan orsaka allvarliga skador.

Enligt [3] ska dimensionering i brottgränstillståndet baseras på följande styvhetssegenskaper:

#### 1. Första ordningens teori, linjär elastisk:

- “Där fördelningen av krafter och moment inte beror av styvhetsfördelningen inom bärverket (t.ex. då alla bärverksdelar har samma tidsberoende i sina egenskaper) används medelvärden.”
- “Där fördelningen av krafter och moment beror av styvhetsfördelningen inom bärverket (t.ex. sammansatta bärverk som innehåller material med olika tidsberoende i sina egenskaper) används slutliga medelvärden tagna med hänsyn till den del av lasten som ger största spänning relativt hållfastheten.”

#### 2. Andra ordningens teori, linjär elastisk:

“Dimensioneringsvärden utan hänsyn till lastvaraktighet används.”

Eurokod [3], föreskriver alltså att dimensionering för träbaserade konstruktioner och element i brottgränstillstånd kan beräknas med första eller andra ordningens teori. Definitionen av första och andra ordningens teori, enligt [8], för linjär elastiska förhållanden är:

#### – Första ordningens teori:

För små deformationer och normalkrafter kan jämvikten ställas upp i odeformerat läge.



– Andra ordningens teori:

Då normalkrafterna är stora måste hänsyn tas till den utböjning som uppstår på grund av normalkraften. I detta fall ställs jämvikten upp i det deformerade läget.

Första ordningens teori lämpar sig för element där normalkrafterna är små och snittkrafterna kan beräknas med linjära samband. För att ta hänsyn till konstruktionens stabilitet används reduktionsfaktorer för bärförmågan hos de enskilda elementen, som t.ex. knäckningsfaktorn,  $k_c$ . Då elementet är mer påtagligt utsatt för deformationer, t.ex. vid stora laster, kan andra ordningens teori vara mer lämpligt att använda. Analyser enligt andra ordningens teori kan, enligt [2], även göras då materialets icke-linjära deformationsegenskaper beaktas. För denna typ av analys kan beräkningar göras med:

– Analytiska ekvationer:

Differentialekvationer ställs upp utifrån elementets förutsättningar, t.ex. påverkande laster, utböjningsform och inspänningsförhållanden. Differentialekvationer kan i slutändan ge ett dimensioneringsvärde som beaktar andra ordningens effekter, d.v.s. inga korrektionsfaktorer behöver användas.

– Approximativa ekvationer:

De approximativa ekvationerna är härledda ur differentialekvationerna och bygger istället på att förstoringfaktorer används för att ta hänsyn till andra ordningens effekter.

– Datorbaserade metoder, t.ex. finita elementmetoden:

De datorbaserade metoderna bygger på att ett program ämnat att lösa konstruktionsbaserade problem används. Beroende på vilken indata och vilka parametrar som programmet eller koden som ställs upp beaktar, fås ett mer eller mindre exakt värde på dimensioneringsvärdena.

Som nämnt ovan, i punkt 2, föreskrivs att dimensioneringsvärden ska användas vid analyser enligt andra ordningen [3]. Det framgår inte tydligt i texten vilka dimensioneringsvärden som ska användas. Enligt [1] ska även dimensioneringsvärdet av elasticitetsmodulen användas, utöver dimensioneringsvärden på hållfasthet. Det dimensionerande värdet på elasticitetsmodulen beräknas enligt

$$E_d = \frac{E_{mean}}{\gamma_M} \quad (2.9)$$

I [3] föreskrivs även ett värde på  $E$ -modulen som tar hänsyn till lastvaraktighet, deformationer och fukthalt, "den slutliga  $E$ -modulen",  $E_{mean,fin}$ . I brottgränstillståndet beräknas den enligt ekvation 2.10:

$$E_{mean,fin} = \frac{E_{mean}}{1 + \Psi_2 k_{def}} \quad (2.10)$$

Bells förslag [1], bygger på att låta  $E_d$  beakta lastvaraktigheten genom lastreduktionsfaktorn för kvasipermanent lastvärde,  $\Psi_2$ , och fukthalten vid långtidsdeformationer,  $k_{def}$  enligt ekvation 2.10

$$E_d = \frac{E_{mean}}{1 + \Psi_2 k_{def}} \quad (2.11)$$

$\Psi_2$  beaktar variabla laster i brottgränstillståndet samt långtidsverkande effekter, så som sprickbildning och nedböjning i bruksgränstillståndet. Den kan även användas för att konvertera kortvariga laster till permanenta laster då långtidseffekter av krypning beaktas [6]. I texten enligt Bell [1], använder han bestämda värden på  $\Psi_2$ . För korttidslast är  $\Psi_2$  lika med 0.2, för medellång last är  $\Psi_2$  lika med 0.5 och för permanent last är  $\Psi_2$  lika med 1.

Då datormetoder, enligt ovan, använder sig av indata som t.ex.  $E$ -modulen, kan det vara relevant att detta värde ska avspegla de parametrar som påverkar hållfastheten. Detta analyseras i kapitel 4. De  $E$ -moduler som används i denna uppsats framgår i tabell 2.6.

Tabell 2.6: Elasticitetsmoduler för olika val av analyser. Dimensionering i brottgränstillstånd.

Analys	Uttryck	Källa
Första ordningen	$E_{0.05}$	Eurokod
	$E_{mean,fin} = \frac{E_{mean}}{1 + \Psi_2 k_{def}}$	Eurokod
Andra ordningen	$E_d = \frac{E_{mean}}{\gamma_M}$	Eurokod
	$E_d = \frac{E_{mean}}{1 + \Psi_2 k_{def}}$	Förslag [1]

## 2.4 Dimensioneringsmetoder för rent tryck

### 2.4.1 Materialbrott

För en rak pelare som enbart belastas av en centrisk axiell last och antas gå till materialbrott innan knäckning kan ekvation 2.1 tillämpas [8],

$$N_R = A f_{cd} \quad (2.12)$$

där bärförmågan överskrids då materialets hållfasthet per ytenhet överskrids av den verkande spänningen. Ekvationen kan skrivas om för att erhålla följande brottkriterium

$$\frac{N}{A f_{cd}} < 1 \quad (2.13)$$

### 2.4.2 Eulerknäckning

Eulers teori förutsätter att en pelare som är initialt rak utsätts för en centrisk last, består av ett elastisk material med små deformationer samt att knäckning sker innan materialbrott. Eulerknäcklasten, som är den minsta lasten som ger knäckning (i plan), definieras enligt ekvation 2.2.

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2}$$

Figur 2.4 visar det teoretiska och rekommenderade (praktiskt tillämpbara värdet) på knäcklängder vid olika upplagsförhållanden. I verkligheten finns det inga initialt raka pelare utsatta för en helt centrisk last, varför Eulerknäcklasten bör uppfattas som ett övre gränsvärde för bärförmåga istället för ett dimensionerande värde.

Eulerknäcklasten kan beräknas antingen med analytisk metod enligt ovanstående, eller med hjälp av finita elementmetoden. Med finita elementmetoden delas pelaren upp i ett antal element, där normalkraft och moment kan beräknas för varje enskilt element. Generellt gäller det att ju fler element som pelaren delas upp i, desto högre blir noggrannheten i snittkrafterna. För en rak pelare påverkas inte noggrannheten av elementindelningen. Därför behövs inte pelaren delas in i ett stort antal element för att få hög noggrannhet i detta fall.

### 2.4.3 Första ordningens teori enligt Eurokod 5

Dimensionering av limträpelare enligt Eurokod 5 [3], grundar sig på att materialet är linjär-elastiskt. För att ta hänsyn till andra ordningens effekter används reduktionsfaktorn  $k_c$ . Villkoret som ska uppfyllas är att spänningen i det mest kritiska tvärsnittet ska vara mindre än dimensioneringsvärdet för tryckhållfastheten reducerat med faktorn  $k_c$ , enligt

$$\sigma_c = \frac{N}{A} \leq k_c f_{cd} \quad (2.14)$$

där  $\sigma_c$  är spänningen som pelaren utsätts för,  $N$  är normalkraften och  $A$  är tvärsnittsarean. Ekvationen kan även skrivas som

$$N_{c,Rd} = Ak_c f_{cd} \quad (2.15)$$

där  $N_{c,Rd}$  är den dimensionerande bärförmågan parallellt med fiberriktningen.

Reduktionsfaktorn  $k_c$  beaktar knäckningsrisken för pelaren och den är härledd ur numerisk simulering av en stor mängd olika pelare med olika geometriska fel och materialegenskaper som baserar sig på verkliga pelare [6]. I Eurokod 5 [3], anges  $k_c$  som funktion av  $\lambda_{rel}$  enligt

$$k_c = \begin{cases} 1 & \text{för } \lambda_{rel} \leq 0.3 \\ \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{rel}^2}} & \text{för } \lambda_{rel} > 0.3 \end{cases} \quad (2.16)$$

där  $k$  definieras enligt

$$k = 0.5 (1 + \beta_c (\lambda_{rel} - 0.3) + \lambda_{rel}^2) \quad (2.17)$$

$\beta_c$  är en faktor för bärverksdelar som beaktar krav på rakhet. För limträ kan denna sättas till 0.1.  $\lambda_{rel}$  definieras enligt

$$\lambda_{rel} = \sqrt{\frac{P}{P_c}} = \sqrt{\frac{\frac{f_{ck} A}{\pi^2 E_{0.05} I}}{(\beta L)^2}} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_{ck}}{E_{0.05}}} \quad (2.18)$$

och  $\lambda$  enligt

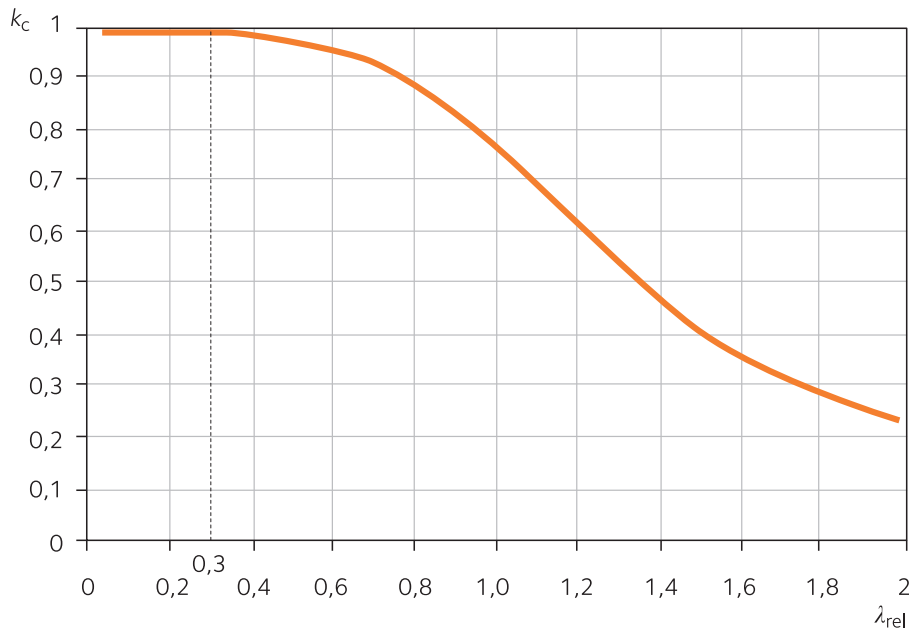
$$\lambda = \frac{\beta L}{i} \quad (2.19)$$

där  $i$  är tröghetsradien som beräknas enligt

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{h}{\sqrt{12}} \quad (2.20)$$

för rektangulära tvärsnitt med  $h$  som tvärsnittets mått i utböjningsriktningen.

Sambandet mellan  $k_c$  och  $\lambda_{rel}$  visas i figur 2.7.



Figur 2.7: Samband mellan  $k_c$  och  $\lambda_{rel}$  [6].

#### 2.4.4 Andra ordningens teori med sinusformad initialutböjning

Som nämnt tidigare finns det inga initialt helt raka pelare. Till skillnad från Eulerknäckning förutsätter denna metod en sinusformad initialutböjning med amplituden  $a_0$ . Som en förenklad metod enligt andra ordningens teori kan ett initialvärde för avvikelser från rak form  $a_0$ , definieras. Ett typvärde för limträkonstruktioner är  $a_0 = L/500$ , där  $L$  är pelarens längd. Utöver initialvärdet kommer belastningen enligt andra ordningens teori att ge upphov till en ännu större utböjning som kan skrivas som

$$v_{II,max} = \frac{P/P_c}{1 - P/P_c} a_0 \quad (2.21)$$

och andra ordningens moment fås ur

$$M_{II,max} = P \frac{1}{1 - P/P_c} a_0 \quad (2.22)$$

där  $P$  är den axiella lasten pelaren utsätts för. Brottkriteriet fås enligt Naviers formel, ekvation 2.5

Dessa ekvationer härleds i [8] genom att en jämvikt ställs upp för en ledat infäst pelare med sinusformad initialutböjning. Därefter används elastiska linjens ekvation tillsammans med jämviktsekvationen för att ställa upp differentialekvation för pelaren. Lösningen av differentialekvationen tillsammans med ekvation 2.2 ( $\beta = 1$  för ledat infäst pelare) ger slutligen ovanstående samband.

Precis som för Eulerknäckning kan dessa beräkningar utföras analytiskt enligt ovan, och med hjälp av finita elementmetoden. Användandet av finita elementmetoden liknar proceduren som beskrivs i avsnitt 2.4.2. Skillnaden är att pelaren som utgångspunkt modelleras med en sinusformad initialutböjning, vilket gör att brottlasten som räknas ut iterativt kommer att bli lägre.

## 2.5 Dimensionering för tryck och samtidigt böjmoment

För samtliga beräkningar förutsätts böjning endast ske i en riktning i taget. Pelaren är stagad tvärs böjningsriktningen och vippning förutsätts vara förhindrat.

### 2.5.1 Första ordningens teori enligt Eurokod 5

Då pelaren även belastas med en jämnt utbredd transversell last, utöver en axiell last, måste andra brottvillkor kontrolleras. Ekvationerna 2.23, 2.24 och 2.25 förutsätter att pelaren endast belastas av ett böjmoment kring en av sina axlar åt gången. Eftersom vippning förutsätts vara förhindrat kan brott ske på två sätt [6]:

1.  $\lambda_{rel} \leq 0.3$  – Pelaren går till materialbrott innan knäckning, då hållfastheten för materialet överskrids. Eftersom detta innebär en mer kompakt pelare, plasticeras delar av den tryckta sidan innan pelaren går till brott och plasticitetsteori kan tillämpas [10]. Detta ger som effekt att pelaren klarar en ökad tryckspänning i de plasticerade områdena, vilket kan ses av kvadraten i den första termen i ekvation 2.23.

$$\left(\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1 \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1$$

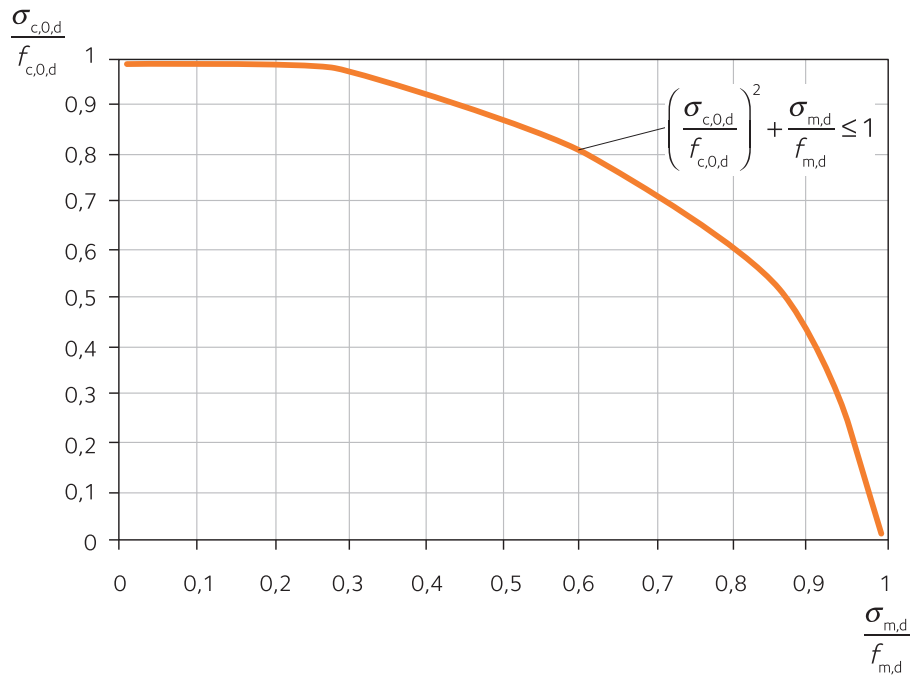
$\sigma_{cd}$  är den dimensionerande tryckspänningen och  $\sigma_{m,y,d}$  och  $\sigma_{m,z,d}$  är den dimensionerande böjspänningen av moment kring  $y$ - respektive  $z$ -axeln.

2.  $\lambda_{rel} > 0.3$  – Detta kriterium används för slankare pelare. Knäckning kan förekomma om tryckhållfastheten multiplicerat med reduktionsfaktorn  $k_c$  överskrids. Här tillämpas elastiska förhållanden [10]. Pelaren går till brott då hållfastheten överskrids.

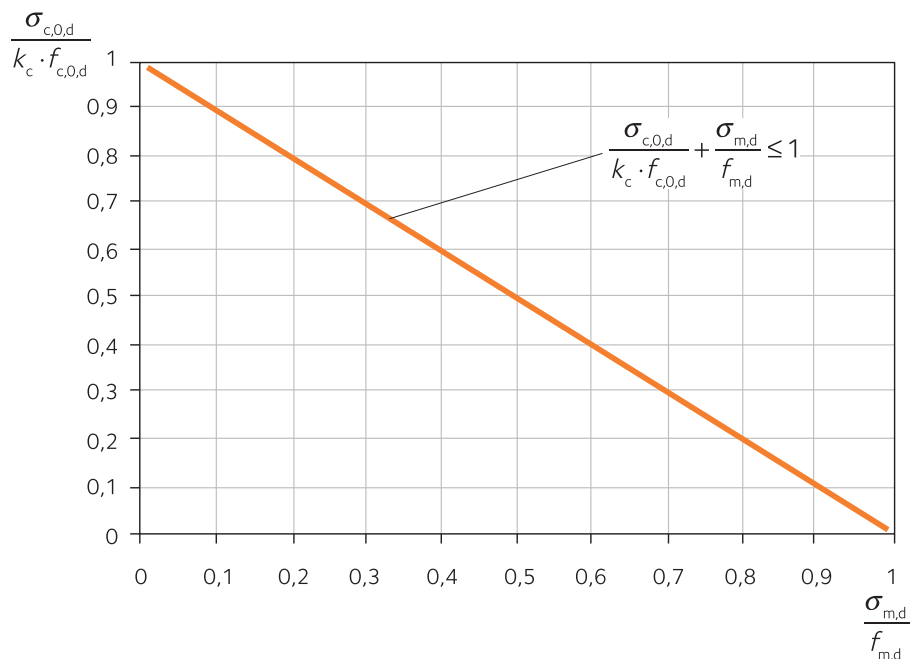
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_{cd}}{k_{c,y}f_{cd}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1 \\ \frac{\sigma_{cd}}{k_{c,z}f_{cd}} + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma_{cd}}{k_{c,y}f_{cd}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \\ \frac{\sigma_{cd}}{k_{c,z}f_{cd}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Faktorn  $k_m$  i ekvationerna 2.24 och 2.25 beaktar samverkan mellan tryck- och böjspänning. För fall då knäckning, orsakad av en tryckkraft, sker vinkelrätt mot böjmomentets riktning, får  $k_m$  sättas till 0.7 för rektangulära limträ tvärsnitt [6]. Oavsett vilken axel som momentet verkar kring ska kontroll göras i bägge riktningar. Då höjden varierar beroende på vilken knäckningsaxel som kontrolleras ska  $k_c$  räknas ut för respektive axel. Jämför man interaktionssambanden mellan de olika varianterna, då  $\lambda \leq 0.3$  och  $\lambda > 0.3$ , ser man tydligt hur figur 2.8 visar en större tryckkapacitet mot det linjära förhållandet i figur 2.9.



Figur 2.8: Interaktionssamband mellan tryck och böjmoment när  $\lambda \leq 0.3$  [3].



Figur 2.9: Interaktionssamband mellan tryck och böjmoment när  $\lambda > 0.3$  [3].

## 2.5.2 Andra ordningens teori med sinusformad initialutböjning

Likt metoden använd i avsnitt 2.4.4 förutsätter denna metod en sinusformad utböjning med amplituden  $a_0$ , där samma typvärde för avvikelse från rak form definieras,  $a_0 = L/500$ . Utöver initialutböjningen måste även mittutböjningen enligt första ordningens teori, orsakad av den utbredda lasten,  $q$ , tas hänsyn till. Mittutböjningen för en jämnt utbredd last varierar med pelarens inspänningsförhållanden. För en ledat infäst pelare fås maxvärdet för utböjningen [8], av

$$v_{max} = \frac{5qL^4}{384EI} \quad (2.26)$$

Med hjälp av ekvation 2.21

$$v_{II,max} = \frac{P/P_c}{1 - P/P_c} a_0$$

kan en uppskattning av utböjningen enligt andra ordningens teori,  $v_{II}$  bestämmas

$$v_{II} = \frac{1}{1 - P/P_c} v_I \quad (2.27)$$

där  $v_I$  är intialutböjningen,  $a_0$ , tillsammans med första ordningens utböjning orsakat av transversal-lasten.

Andra ordningens moment fås, enligt [8], som

$$M_{II} = M_I + P v_{II} \quad (2.28)$$

där  $M_I$  är första ordningens moment enligt

$$M_I = \frac{qL^2}{8} \quad (2.29)$$

Den approximativa metoden ger, enligt [8], resultat som förhåller sig nära den exakta lösningen, för fall där första ordningens utböjning är nära sinusformad. Denna metod är, likt metoden som beskrivs i 2.4.4, härledd ur differentialekvationer i [8], för fallet ledad infästning i båda ändar. Resultat som förhåller sig nära den exakta lösningen erhålls även för höga laster [8], vilket gör det till en bra metod då enstaka pelarfall ska kontrolleras. Finita elementmetoden kan användas även i detta fall. För pelare där utböjningen inte är nära sinusformad, t.ex. andra upplagsvillkor ger den approximativa metoden inte lika bra resultat. Därför görs beslutet att endast använda finita elementmetoden i detta fall.





## 3. Metod

Detta kapitel kommer att illustrera användning av metoder beskrivna i föregående kapitel. Som ett första steg beräknas brottlasten med analytiska och approximativa metoder. Därefter utförs beräkningen med hjälp av finita elementmetoden, där ett liknande värde av brottlast eftersträvas. Då ett liknande värde erhålls, kalibreras noggrannheten genom att pelaren delas in i fler element, tills det att brottlasten stämmer med fem värdesiffrors noggrannhet. Fördelen med att använda finita elementmetoden är att de randvillkor som ställs upp för pelaren, som t.ex. inspänningsförhållanden, enkelt kan modifieras, till skillnad från analytiska och approximativa metoder där ekvationen måste skrivas om från början.

### 3.1 Förutsättningar och indata

För tester med hand- och datorberäkningar används två referenspelare, referenspelare 1 (RP 1) och referenspelare 2 (RP 2), där val av virkesdimension och hållfasthetsklass hålls konstant. Upplagsförhållanden är ledat infäst, både nedtill och upptill. Pelaren kontrolleras först för enbart axiellt tryck, och därefter samtidigt axiellt tryck med en utbredd transversell last. Lasterna antas angripa pelaren centriskt. För samtliga lastfall förutsätts det att pelarna är utsatta för klimatklass 2 och att den kortvarigaste lasten är medellång. För jämförelsens skull används endast dimensionerande hållfasthetsvärden i alla beräkningar, då de karakteristiska värdena ej beaktar relevanta parametrar som t.ex. lastvaraktighet och fukthalt.

#### 3.1.1 Referenspelare

I tabell 3.1 presenteras de referenspelare som används i uppsatsen. De standardmått som används är hämtade ur Limträhandboken, del 1 [5].

Tabell 3.1: Data för referenspelare. Värden för böjning kring  $y$ - respektive  $z$ -axeln betecknas med index,  $y$  respektive  $z$ . Referenspelare 1 är en slank pelare, där risk för knäckning föreligger. Referenspelare 2 är en kompakt pelare, utan risk för knäckning.

Egenskap	Symbol	Referenspelare	
		1	2
Limträtyp		GL30c	GL30c
Inspänningsförhållande		Ledat infäst	Ledat infäst
Tvärsnittsmått (m)	$b \times h$	$0.115 \times 0.225$	$0.140 \times 0.405$
Längd (m)	$L$	6	2
Initialkrokighet (m)	$a_0$	0.012	0.0040
Faktor för knäcklängden	$\beta$	1	1
Tröghetsradie (m)	$i_y$	0.065	0.12
	$i_z$	0.033	0.040
Böjmotstånd ( $m^3 \times 10^{-4}$ )	$W_y$	9.70	38.27
	$W_z$	4.96	13.23
Tröghetsmoment ( $m^4 \times 10^{-4}$ )	$I_y$	1.09	7.75
	$I_z$	0.19	0.93
Korrektionsfaktor för klimatklass och lastvaraktighet	$k_{mod}$	0.80	0.80
Korrektionsfaktor för storlekseffekt	$k_h$	1.10	1.04
Dimensionerande tryckhållfasthet (MPa)	$f_{cd}$	15.68	15.68
Dimensionerande böjhållfasthet (MPa)	$f_{md}$	21.12	19.97
Elasticitetsmodul (MPa)	$E_{mean}$	13 000	13 000
	$E_{0.05}$	10 800	10 800
Dimensionerande elasticitetsmodul (MPa)	$E_d$	10 400	10 400
Slankhetstal	$\lambda_y$	92.38	17.11
	$\lambda_z$	180.74	49.49
Relativt slankhetstal	$\lambda_{rel,y}$	1.40	0.26
	$\lambda_{rel,z}$	2.74	0.75
Reduktionsfaktor för knäckning	$k_{cy}$	0.46	1.00
	$k_{cz}$	0.13	0.92

### 3.1.2 Calfem

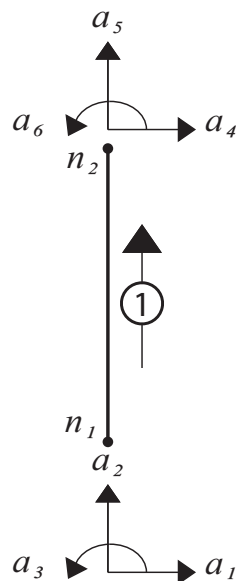
Utöver de indata som presenteras ovan måste vissa parametrar specificeras i Calfem [11]. Calfem är ett tilläggsprogram till Matlab [12], som hanterar finita elementberäkningar. Calfem använder sig av matriser för att utföra beräkningar. Dessa beräkningar utförs genom att fördefinierade funktioner i Calfem används. Funktionerna är härledda i [9]. För beräkningarna används tvådimensionella balkelement som beaktar andra ordningens teori. Beräkningarna utförs i flera steg:

1. I första steget definieras de villkor som gäller för varje enskilt element. Genom en  $Edof$ -matris definieras de element som analyseras, elementets riktning samt de frihetsgrader som hör till elementet. Genom en lastvektor,  $f$ , definieras de yttre krafter som verkar på elementet, där ett exempel på positiv riktning illustreras i figur 3.1. Upplagsvillkor definieras i en  $bc$ -matris (boundary conditions). De egenskaper som ska kopplas till elementet definieras i en  $ep$ -matris (element properties). I denna anges  $E$ -modul,  $A$  och  $I$ -värde. Dessutom definieras elementens koordinater med hjälp av  $Coord$ -matriser. Hur detta går till beskrivs lite mer utförligt nedan.
2. I det andra steget kopplas elementegenskaperna till en elementstyvhetmatris,  $Ke$ , genom att funktionen  $beam2g$  används. Denna funktion använder sig av  $x$ - och  $y$ -koordinaterna, elementegenskaperna samt en normalkraft som iterativt ökar fram tills följande villkor uppfylls

$$\frac{N - N_0}{N_0} < eps \quad (3.1)$$

där  $eps$  är 0.0001 och där  $N$  är den initiala normalkraften och  $N_0$  är den initiala normalkraften i den föregående iterationen. Därefter assembleras elementstyvhetmatriserna,  $K_e$ , för varje element med hjälp av topologimatrisen,  $Edof$ , in i en global styvhetmatris,  $K$ . Även lastvektorn assembleras in i den globala lastvektorn,  $f$ .

3. Med hjälp av  $K$ ,  $f$  och  $bc$  kan även nodförskjutningarna,  $a$  beräknas. Med hjälp av  $a$ ,  $ep$ ,  $x$ - och  $y$ -koordinaterna samt normalkraften,  $N$  för varje element kan snittkrafterna på ändpunkterna av elementet beräknas med funktionen  $beam2gs$ . Normalkraften,  $N$ , tvärkraften,  $V$ , och momentet,  $M$  fås ut, varav  $N$  och  $M$  analyseras i denna uppsats.



Figur 3.1: Calfem-modell för en pelare. Frihetsgraderna betecknas med  $a_1 - a_6$ . Noderna betecknas med  $n_1$  och  $n_2$ .

För analys av initialt raka pelare används ett bestämt antal noder och element. För beräkning av pelare med initialkrokighet definieras först initialkrokigheten, och därefter delas pelaren in i  $(n - 1)$  antal element och  $n$  antal noder. Antalet element som väljs beror på noggrannheten som eftersträvas. För att beräkna den sinusformade initialkrokigheten ställs först en nollmatris upp med  $n$  rader och två kolonner. Därefter beräknas  $x$ - och  $y$ -koordinaten för varje nod, där  $x$ -koordinaten placeras i kolonn ett och  $y$ -koordinaten i kolonn två. För att Matlab ska kunna räkna fram värden för varje nod ställs ekvationerna upp i en *for*-loop där antalet noder beskrivs enligt

$$i = 1 : n$$

$y$ -koordinaten beräknas enligt

$$y(i) = \frac{L(i - 1)}{(n - 1)} \quad (3.2)$$

och  $x$ -koordinaten beräknas enligt

$$x(i) = \frac{L}{imp} \sin\left(\frac{\pi}{L}y(i)\right) \quad (3.3)$$

där  $imp$  är imperfektionstalet. I detta kapitel är detta värde konstant, d.v.s. 500.

För ett exempel på beräkningar utförda med hjälp av Matlab och Calfem hänvisas till bilagor.

## 3.2 Limträpelare utsatt för rent tryck

I följande avsnitt testas metoder enligt avsnitt 2.4, och indata enligt avsnitt 3.1. Först presenteras lösningen med hjälp av handberäkning och därefter med datorberäkning. För de beräkningar som redovisas används RP 1. Pelaren är för samtliga fall stagad i veka riktningen.

### 3.2.1 Materialbrott

För en rak pelare som utsätts för ren normalkraft, då ingen hänsyn tas till knäckning, kan ekvation 2.12 användas för att beräkna brottlasten

$$N_R = Af_{cd} = 0.115 \cdot 0.225 \cdot 15.68 \cdot 10^6 = 405.72 \text{ kN}$$

Då finita elementmetoden används lämpar sig ekvation 2.13 bättre, då brottlasten istället beräknas iterativt.

$$\frac{N_R}{Af_{cd}} < 1$$

Brottlasten beräknas med Calfem till 405.72 kN.

### 3.2.2 Eulerknäckning

Eulerknäcklasten beräknas med hjälp av ekvation 2.2

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10.8 \cdot 10^9 \cdot 1.09 \cdot 10^{-4}}{(1 \cdot 6)^2} = 323.21 \text{ kN}$$

för en pelare utan intialkrokighet.

Värdet som beräknades med hjälp av Calfem, för en initialt rak pelare, blev 323.21 kN, vilket överensstämmer med det handberäknade värdet.

### 3.2.3 Första ordningens teori enligt Eurokod 5

Eftersom risken för knäckning enligt Eurokod [3], beaktas med faktorn  $k_c$  väljs RP 1, då den dimensionerande bärförmågan kraftigt reduceras i detta fall. För att räkna ut  $k_c$  används ekvationerna 2.16 – 2.20.

$$i = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{0.225}{\sqrt{12}} = 0.065 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{\beta L}{i} = \frac{6}{0.065} = 92.38$$

$$\lambda_{rel} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_{ck}}{E_{0.05}}} = \frac{92.39}{\pi} \sqrt{\frac{24.5 \cdot 10^6}{10800 \cdot 10^6}} = 1.40$$

$$k = 0.5 (1 + \beta_c (\lambda_{rel} - 0.3) + \lambda_{rel}^2) = 0.5 (1 + 0.1 (1.40 - 0.3) + 1.40^2) = 1.54$$

Då  $\lambda_{rel} > 0.3$  beräknas  $k_c$  enligt

$$k_c = \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{rel}^2}} = \frac{1}{1.54 + \sqrt{1.54^2 - 1.40^2}} = 0.46$$

Den dimensionerande tryckhållfastheten beräknas med ekvation 2.7

$$f_{cd} = k_{mod} \frac{f_{ck}}{\gamma_M} = 0.8 \cdot \frac{24.5 \cdot 10^6}{1.25} = 15.68 \text{ MPa}$$

Den dimensionerande bärförmågan beräknas därefter med ekvation 2.15

$$N_{c,Rd} = A k_c f_{cd} = 0.0026 \cdot 0.46 \cdot 15.68 \cdot 10^6 = 187.33 \text{ kN}$$

### 3.2.4 Andra ordningens teori med sinusformad initialutböjning

De analytiska beräkningarna bygger på ekvation 2.5

$$\frac{N}{A f_c} + \frac{M}{W f_m} < 1$$

och ekvation 2.22

$$M_{II,max} = P \frac{1}{1 - P/P_c} a_0$$

där momentet i första ekvationen ersätts av andra ordningens moment enligt ekvation 2.22. Om man sedan utvecklar de ingående parametrarna så erhålls följande ekvation

$$\frac{P}{b h f_c} + \frac{P \frac{1}{1 - P/P_c} a_0}{\frac{b h^2}{6} f_m} = 1 \quad (3.4)$$

Genom att lösa ut  $P$  erhålls en andragradsekvation

$$P^2 - \left( P_c + P_c \frac{f_{cd} A a_0}{W f_{md}} + f_{cd} A \right) P + f_{cd} A P_c = 0 \quad (3.5)$$

där  $f_c$  och  $f_m$  ersätts med den dimensionerande tryck- och böjhållfastheten,  $f_{cd}$  respektive  $f_{md}$ . För att förenkla ekvationen skrivs uttrycket om till

$$P^2 - aP + b = 0$$

där

$$a = 323.21 \cdot 10^3 + \frac{323.21 \cdot 10^3 \cdot 15.68 \cdot 10^6 \cdot 0.026 \cdot 0.012}{9.7 \cdot 10^{-4} \cdot 21.12 \cdot 10^6} + 15.68 \cdot 10^6 \cdot 0.026 = 8.057 \cdot 10^5$$

och

$$b = 15.68 \cdot 10^6 \cdot 0.026 \cdot 323.21 \cdot 10^3 = 1.31 \cdot 10^{11}$$

Andragradsekvationen löses med hjälp av  $PQ$ -formeln

$$P = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{8.057 \cdot 10^5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8.057 \cdot 10^5}{2}\right)^2 - 1.31 \cdot 10^{11}}$$

där två värden på  $P$  erhålls

$$P_1 = 579.39 \text{ kN}$$

$$P_2 = 226.33 \text{ kN}$$

Då värdet på  $P_1$  är högre än eulerknäcklasten utesluts detta värde och  $P_2$  blir värdet för brottlasten.

Brottlasten kontrolleras även med hjälp av andra ordningens teori och Calfem, där pelaren delas in i  $n$  antal noder och  $(n - 1)$  antal element. Brottvillkoret ställs upp enligt ekvation 2.5, likt ovan där de dimensionerande värdena för tryck- och böjhållfasthet,  $f_{cd}$  samt  $f_{md}$  används. För att göra analysen i Matlab ökas lasten stegvis tills följande brottkriterium är uppfyllt

$$if \quad abs \left( \frac{N(n_{max})}{f_{cd}A} \right) + abs \left( \frac{M(n_{max})}{f_{md}W} \right) > 1 \quad (3.6)$$

där  $abs$  är absolutbeloppet av värdet och  $n_{max}$  är noden i pelarens mittpunkt, då momentet är som störst där. Då summan till vänster överskrider 1.0, avbryts den iterativa beräkningen och  $P_{brott}$  erhålls. Beroende på antalet noder,  $n$ , samt laststegets storlek i de iterativa beräkningarna, fås olika noggrannhet på brottlasten enligt tabell 3.2. Laststegets storlek är 0.001 kN (1 N) för samtliga beräkningar i tabell 3.2.

Tabell 3.2: Olika värden på brottlasten beroende på antalet noder som pelaren beräknas för.

Antal noder (n)	Brottlast [kN]
3	233.27
11	226.61
51	226.34
101	226.33

Resultat med fem korrekta värdesiffror erhålls då pelaren delas in i 100 element. För koden som användes för dessa beräkningar hänvisas till bilagor.

### 3.2.5 Resultat

Då RP 1 och RP 2 enbart utsätts för axiellt tryck, under olika förutsättningar, fås värden på brottlasten enligt tabell 3.3. Indata framgår av tabell 3.1 och beräkningsmetoder för RP 1 visas i detta kapitel. Samma beräkningsmetoder används för RP 2.

Tabell 3.3: Sammanfattning av brottlaster, för referenspelarna 1 och 2, för olika beräkningsmetoder och förutsättningar.

Förutsättning	Metod	Brottlast RP 1 [kN]		Brottlast RP 2 [kN]	
		Handberäkning	FEM	Handberäkning	FEM
Initialt rak	Materialbrott	405.72	405.72	889.06	889.06
Initialt rak	Eulerknäckning	323.21	323.21	20652.63	20652.63
Initialt krokig	1:a ordn., Eurokod	187.33	-	889.06	-
Initialt krokig	2:a ordn.	226.33	226.33	847.91	847.91

Värdet för materialbrott är för RP 1 högre än värdet för Eulerknäckning, vilket antyder att pelaren kommer att gå till knäckning innan materialbrott, då den är initialt rak. Detta verkar rimligt då RP 1 är en slank pelare. För RP 2, som är mer kompakt, fås ett mycket högt värde för Eulerknäckning jämfört med materialbrott, vilket indikerar att denna pelare inte kommer att gå till knäckning. Då andra ordningens teori tillämpas med den approximativa metoden fås för RP 1 ett mycket exakt värde

jämfört med då finita elementmetoden tillämpas. Samma överensstämmelse fås för RP 2, med samma noggrannhet.

Jämför man de båda referenspelarna kan man se att analys enligt andra ordningens teori med finita elementmetoden ger ett något högre värde för RP 1, och något lägre värde för RP 2. Skillnaden är ungefär  $\pm 40$  kN för båda referenspelarna. Eftersom RP 2 har ett reducerat värde på brottlasten,  $k_c = 1$  då  $\lambda_{rel} \leq 0.3$ , medan finita elementmetoden tar hänsyn till andra ordningens effekter genom intialutböjningen, kan man i detta fall se att intialutböjningen har viss påverkan på brottlasten genom att analysen enligt andra ordningen ger en något lägre brottlast. För RP 1 ser man däremot att reduktionsfaktorn,  $k_c$  har haft en kraftig påverkan på brottlasten. Att värdet enligt finita elementmetoden är något högre kan delvis förklaras av att  $E_{0.05}$  använts för jämförelsens skull, men enligt [3] ska  $E_d$  användas, vilket ger ett något lägre värde. En hypotes är att eftersom  $k_c$  är beräknad genom numeriska simuleringar av en stor mängd pelare med olika geometriska fel och materialegenskaper, där pelarens plasticitet även beaktas [10], är det möjligt att ytterligare parametrar tas hänsyn till indirekt, som analysen enligt andra ordningen ej beaktar.

### 3.3 Limträpelare utsatt för samtidigt tryck och böjmoment

#### 3.3.1 Första ordningens teori enligt Eurokod 5

Eftersom brottkriteriet för pelare utsatta för axiell och transversell belastning bygger på att kvoterna för tryck- och momentkapacitet tillsammans ska vara lägre eller lika med 1, förutsätts det att pelarens fulla kapacitet är utnyttjad för att beräkna brottlasten. För RP 2 används ekvation 2.23

$$\left(\frac{\sigma_{cd}}{f_{cd}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1$$

där  $\lambda_{rel} \leq 0.3$ , och för RP 1 används ekvation 2.24

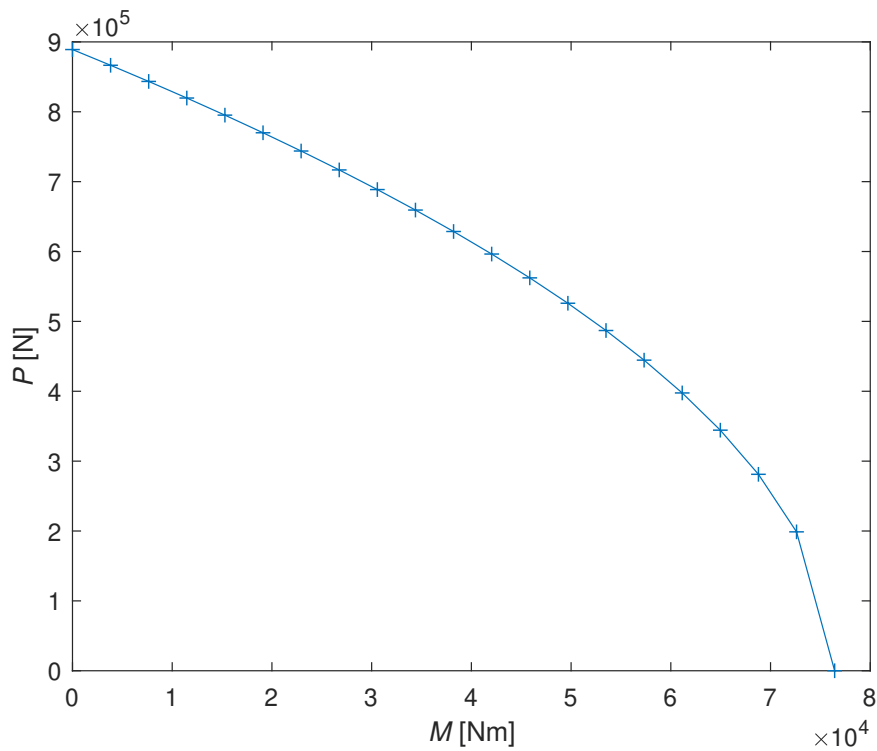
$$\begin{cases} \frac{\sigma_{cd}}{k_{c,y} f_{cd}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1 \\ \frac{\sigma_{cd}}{k_{c,z} f_{cd}} + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1 \end{cases}$$

där  $\lambda_{rel} > 0.3$ . För ekvation 2.24 kontrolleras först ekvationen på första raden, med  $k_{cy}$ , och ekvationen på andra raden, med  $k_{cz}$  och reduktionsfaktorn  $k_m$ . Då pelaren antas vara stagad i veka riktningen är den första ekvationen avgörande, då  $k_{cz}$  i detta fall är 1.

Brottlasten och momentet för RP 2 sammanställs i tabell 3.4 och illustreras därefter i figur 3.2. För RP 1 sammanställs brottlasten och momentet för de två varianterna i ekvation 2.24 i tabellerna 3.5 och 3.6, och illustreras därefter i figur 3.3. Variant 1 illustreras i tabell 3.5 och variant 2 i tabell 3.6. Tabell 3.6 och figur 3.3, är illustrerad för fallet att pelaren inte är stagad i veka riktningen.

Tabell 3.4: Förhållande mellan last,  $P$ , och moment,  $M$ , vid brott för RP 2 ( $\lambda_{rel} \leq 0.3$ ), enligt ekvation 2.23. Normalkraften,  $N$ , i ekvationerna representerar lastvärdet vid brott,  $P$ , på linjen.

Nyttjandegrad (%)		Last och moment	
$\left(\frac{N}{f_{cd}A}\right)^2$	$\frac{M}{f_{md}W}$	$P$ [kN]	$M$ [kNm]
0	100	0	76.43
10	90	281.14	68.79
25	75	444.53	57.32
50	50	628.66	38.21
75	25	769.95	19.11
90	10	843.43	7.64
100	0	889.06	0



Figur 3.2: Interaktionsdiagram för RP 2. Värden för  $P$  och  $M$  redovisas i tabell 3.4.

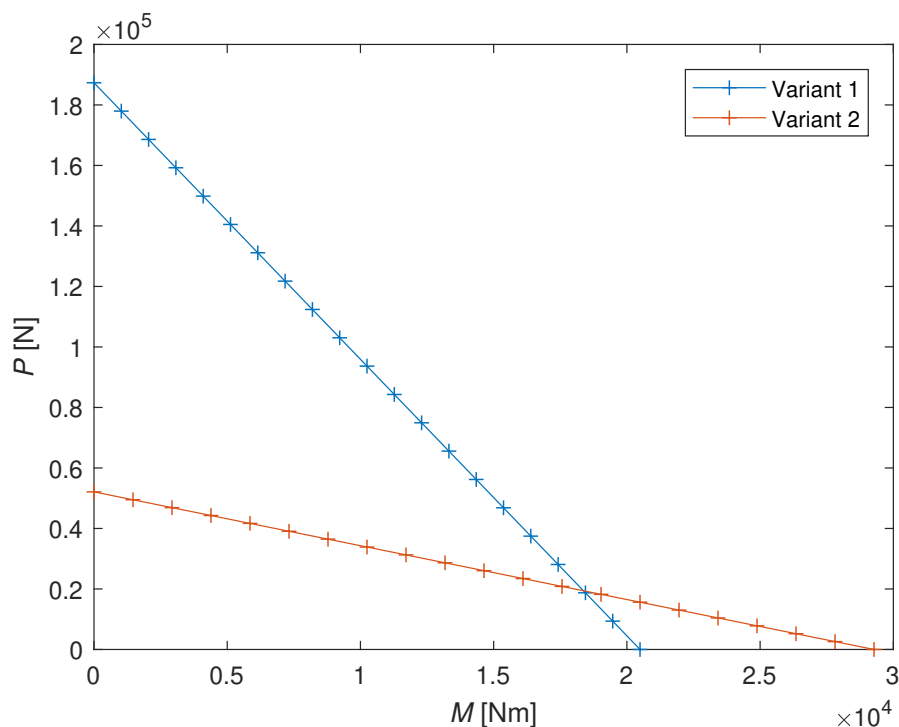


Tabell 3.5: Förhållande mellan last,  $P$ , och moment,  $M$ , vid brott för RP 1 ( $\lambda_{rel} > 0.3$ ), enligt ekvation 2.24, variant 1. Normalkraften,  $N$ , i ekvationerna representerar lastvärdet vid brott,  $P$ , på linjen.

Nyttjandegrad (%)		Last och moment	
$\frac{N}{f_{cd}Ak_{cy}}$	$\frac{M}{f_{md}W}$	$P$ [kN]	$M$ [kNm]
0	100	0	20.49
10	90	18.73	18.44
25	75	46.83	15.37
50	50	93.64	10.25
75	25	140.50	5.12
90	10	168.59	2.05
100	0	187.33	0

Tabell 3.6: Förhållande mellan last,  $P$ , och moment,  $M$ , vid brott för RP 1 ( $\lambda_{rel} > 0.3$ ), enligt ekvation 2.24, variant 2. Normalkraften,  $N$ , i ekvationerna representerar lastvärdet vid brott,  $P$ , på linjen.

Nyttjandegrad (%)		Last och moment	
$\frac{N}{f_{cd}Ak_{cz}}$	$k_m \frac{M}{f_{md}W}$	$P$ [kN]	$M$ [kNm]
0	100	0	29.28
10	90	5.21	26.35
25	75	13.02	21.96
50	50	26.05	14.64
75	25	39.07	7.32
90	10	46.89	2.93
100	0	52.10	0



Figur 3.3: Interaktionsdiagram för RP 1. De båda linjerna representerar varianterna i ekvation 2.24.

### 3.3.2 Andra ordningens teori med finita elementmetoden

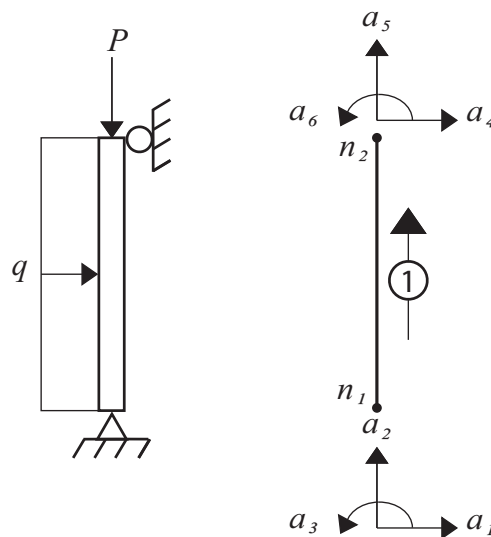
I avsnitt 2.5.2 togs beslutet att använda finita elementmetoden som beräkningsmetod för samtidigt tryck och böjmoment då andra ordningens teori beaktas. Detta görs likt avsnitt 3.2.4, d.v.s. pelaren delas in i  $n$  noder och  $(n-1)$  element. Normalkrafterna och momentet i pelaren beräknas för varje nod, där den kritiska punkten finns i pelarens mittpunkt, då momentet är som störst där för en ledat infäst pelare, enligt [8]. Även samma brottvillkor används, ekvation 3.6, där normalkraften och momentet i pelarmitten räknas ut direkt genom iterativa beräkningar. Skillnaden är att den transversella lasten beaktas, i Calfem, genom den fördefinierade funktionen  $eq$ .

En *for*-loop ställs upp i Matlab där brottlasten räknas ut för ett antal värden på den transversella lasten,  $eq$ , enligt

$$\text{for } transvers = 0 : 1 : 4.5$$

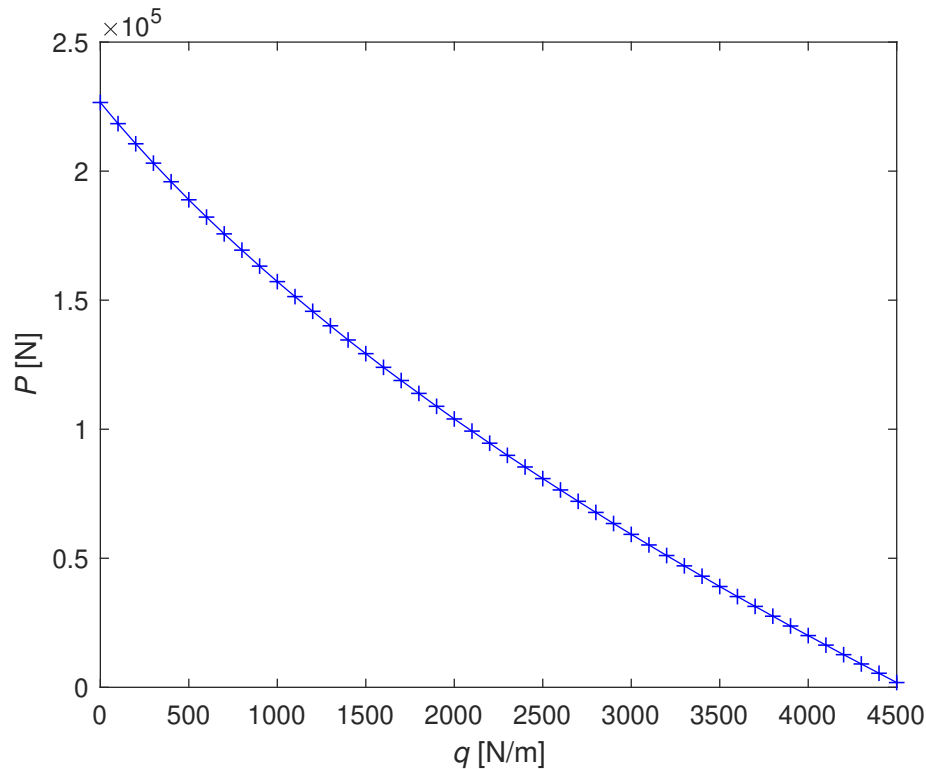
där “*transvers*” är multiplikationsfaktorn för den utbredda lasten som itereras. Grundvärdet,  $eq_0$ , för den utbredda lasten är  $10^3$  i N/m. Positivt värde definieras i modellen, enligt figur 3.4. Den högra illustrationen i figuren visar att pelaren är definierad nerifrån och upp, vilket ger positiv riktning åt höger för  $eq$ . Därefter multipliceras värdena enligt

$$eq = transvers \cdot eq_0$$



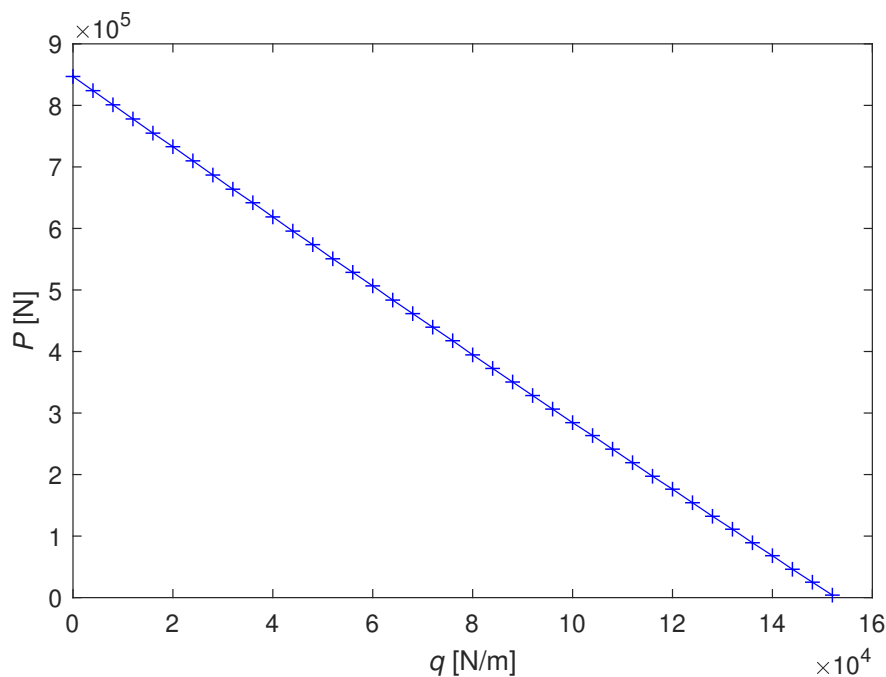
Figur 3.4: Figuren till vänster visar de axiella och transversella laster som påverkar pelarelementet. Figuren till höger definierar positiva riktningar för pelarelementet och dess frihetsgrader. Frihetsgraderna betecknas av  $a_1$  till  $a_6$  och noderna betecknas av  $n_1$  och  $n_2$ .

I figur 3.5 visas interaktionsdiagrammet för RP 1 och i figur 3.6 visas interaktionsdiagrammet för RP 2, i båda fallen med transversell last,  $q$ , på den horisontella axeln.



Figur 3.5: Interaktionsdiagram för RP 1, beräknat med finita elementmetoden, där den transversella lasten,  $q$ , jämförs med den axiella lasten,  $P$ .

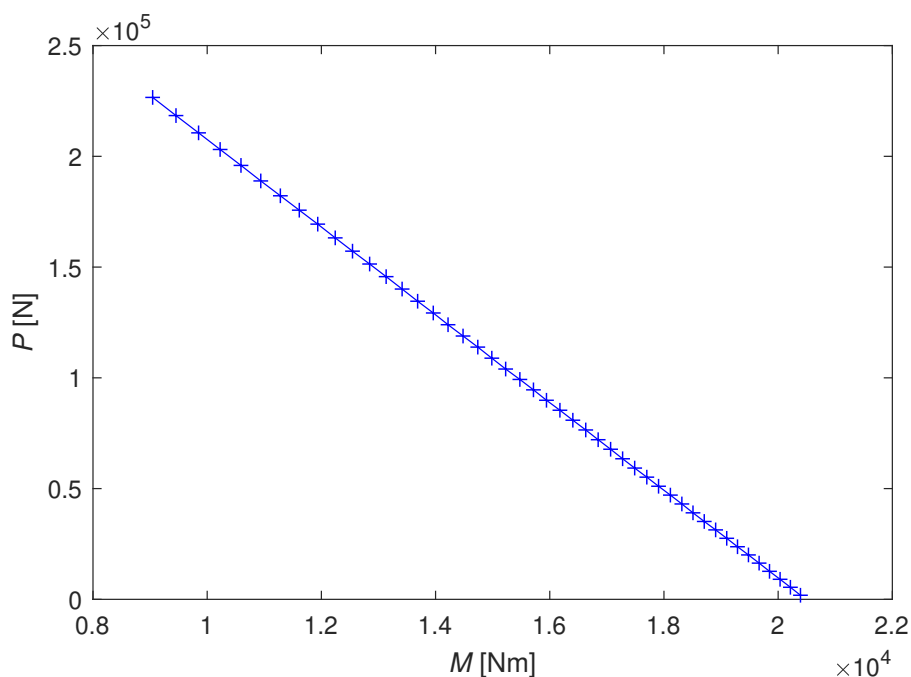
Man kan i figur 3.5 se att kurvan är något olinjär. På grund av brottkriteriets utformning förväntas interaktionsdiagrammet vara linjärt då det ritas med  $P$  och  $M$  på axlarna. Eftersom momentet får ett tillskott p.g.a. initialkrokighet blir det inte linjärt i detta fall då den transversella lasten visas på den horisontella axeln. RP 2 testas också med finita elementmetoden där sambandet i detta fall borde bli mer linjärt eftersom initialkrokigheten är mindre och pelaren mindre slank.



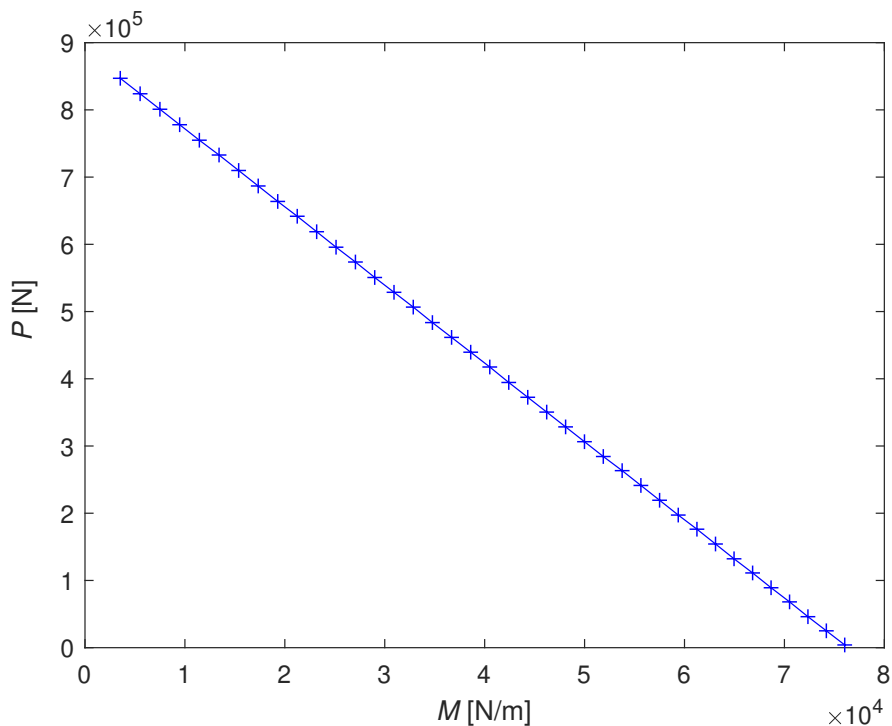
Figur 3.6: Interaktionsdiagram för RP 2, beräknat med finita elementmetoden, där den transversella lasten,  $q$  jämförs med den axiella lasten,  $P$ .

I figur 3.6 kan man se inte se någon nämnvärd effekt av initalkrokigheten.

I beräkningarna enligt första ordningens teori, avsnitt 3.3.1, jämförs momentet mot brottlasten. För att jämföra de båda metoderna visas sambandet mellan momentet och brottlasten för andra ordningens teori i figurerna 3.7 och 3.8.



Figur 3.7: Interaktionsdiagram för RP 1, beräknat med finita elementmetoden, där momentet jämförs mot lasten.



Figur 3.8: Interaktionsdiagram för RP 2, beräknat med finita elementmetoden, där momentet jämförs mot lasten.

För både RP 1 och RP 2 erhålls ett linjärt samband mellan  $P$  och  $M$ , enligt brottkriteriets utformning. När  $q$  sätts till 0 fås ändå ett moment p.g.a. initialkrokigheten, därför går inte kurvan ner till  $M = 0$ . Ur figur kan man urskilja skillnaden i moment då momentet är som lägst, d.v.s. då pelaren inte påverkas av någon transversell last. RP 1 har ett högre moment medan RP 2 har ett något lägre moment, vilket är rimligt då den maximala initiala deformationen av initialkrokigheten hos RP 1 är större, på grund av dess längd.

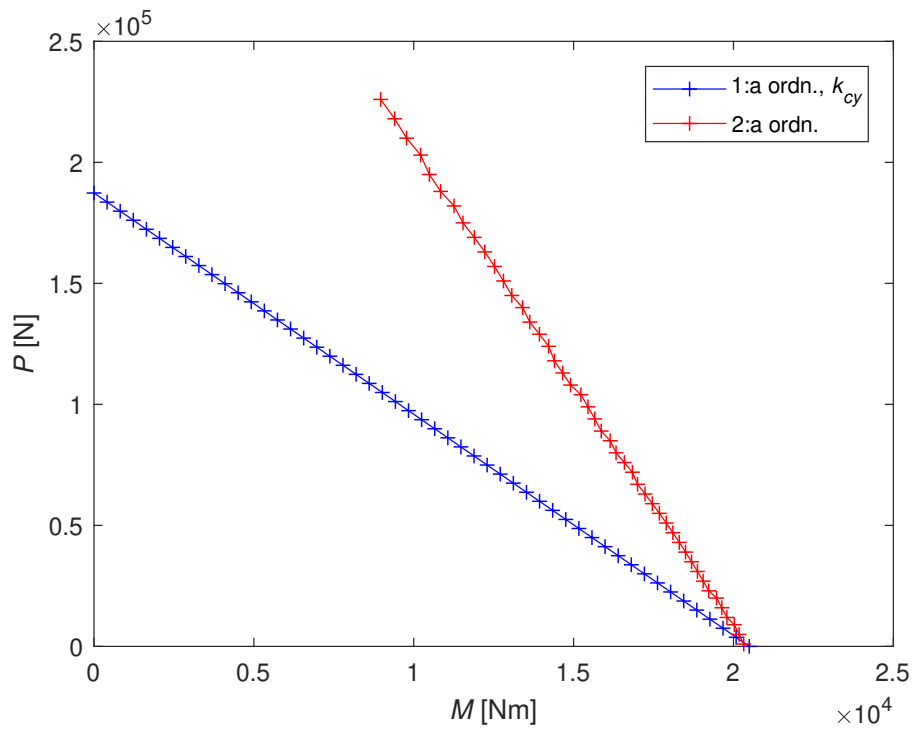
### 3.3.3 Resultat

Då många iterationer görs för att bestämma brottlasten i förhållande till den utbredda lasten presenteras resultatet lämpligast i diagram. De olika metoderna ställs upp i samma diagram för respektive referenspelare, där momentet jämförs mot brottlasten. Värt att notera är att elementindelningen, en avgörande faktor för noggrannheten enligt avsnitt 3.2.4, avgränsas till 10 element för samtliga diagram i denna uppsats. Detta valet beror främst på att iterationerna blir alldeles för tidskrävande för 100 element, men även att noggrannheten för 10 element, enligt tabell 3.2, anses vara tillräcklig då tre korrekta värdesiffror erhålls. Skillnaden mellan tre, och fem korrekta värdesiffror gör sig inte synliga i ett diagram.

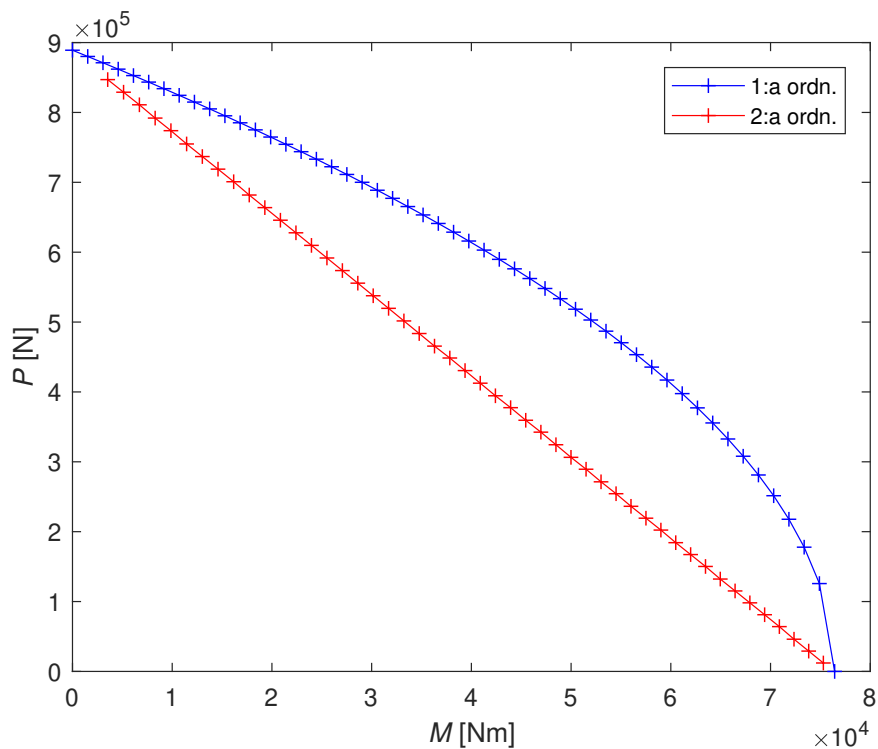
I figur 3.9 och 3.10 jämförs sambandet mellan brottlasten och momentet beräknat med första och andra ordningens teori, för RP 1 respektive RP 2. Den övergripande skillnaden är att beräkning enligt andra ordningens teori, ger två helt olika resultat beroende på vilken referenspelare som undersöks.

Då beräkningar görs för RP 1 ger metoden enligt andra ordningens analys en högre bärförmåga i förhållande till första ordningens analys. I punkten där metod enligt första och andra ordningen sammanfaller är normalkraften noll, vilket gör att de båda uttrycken blir likvärdiga. Detta beror på att andra ordningens effekter i denna punkt saknas, initialkrokigheten ger inget moment, och  $P = 0$ . Kurvorna är för  $P \neq 0$  inte direkt jämförbara. För första ordningens teori avses  $M$  första ordningens moment av transversell last, medan för andra ordningens teori avses andra ordningens moment, inklusive moment p.g.a. initialkrokighet.

För RP 2 erhålls ett annat samband, där istället beräkningen enligt andra ordningen underskattar bärförmågan, jämfört med beräkningen enligt [3]. Detta p.g.a. att träets plasticering vid tryck, till viss del tas hänsyn till i ekvation 2.23 medan beräkningarna enligt andra ordningens teori ej gör det. Här hade ytterligare tester behövts göras för att undersöka hur träets plasticering ska tas hänsyn till vid andra ordningens analys.



Figur 3.9: Interaktionsdiagram för beräkningar enligt första och andra ordningens teori, för RP 1. Variant 1 och 2 syftar på de olika metoderna som används i ekvation 2.24.



Figur 3.10: Interaktionsdiagram för beräkningar enligt första och andra ordningens teori, för RP 2.

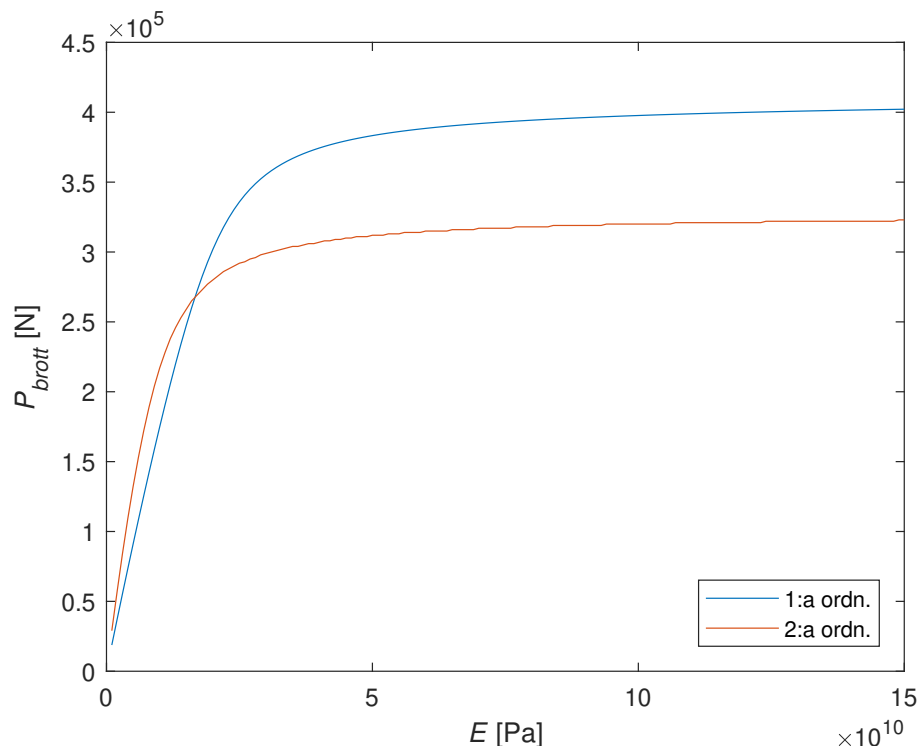
## 4. Parameterstudie

I följande kapitel undersöks olika parametrar som påverkar bärförmågan hos en limträpelare. Kapitlet delas upp i två huvudsektioner, en där pelaren utsätts för rent axiellt tryck, och en där pelaren utsätts samtidigt tryck och böjmoment. Resultaten visas i diagram och analyseras därefter i texten. Där inget annat anges används indata enligt tabell 3.1.

### 4.1 Pelare utsatt för rent tryck

#### 4.1.1 Elasticitetsmodul

För att undersöka hur elasticitetsmodulen påverkar brottlasten, för en pelare med initialkrokighet, analyseras RP 1 för olika värden på elasticitetsmodulen. I figur 4.1 jämförs två beräkningsmetoder, nämligen första ordningen, enligt avsnitt 3.2.3, och andra ordningen enligt avsnitt 3.2.4.



Figur 4.1: Samband mellan  $P_{brott}$  och  $E$  för RP 1.

Figur 4.1 visar sambandet upp till mycket stora värden på elasticitetsmodulen. Man kan tydligt se hur kurvan för brottlasten, efter att elasticitetsmodulen uppnått ett visst värde, börjar plana ut. Detta beror på att ju större värdet på elasticitetsmodulen blir, desto mindre blir deformationerna, och i sin tur andra ordningens effekter. För ekvation 2.5, då ett tillräckligt stort värde på elasticitetsmodulen

används, blir andra ordningens moment försumbart. Momentet,  $M$  kan då skrivas som  $Na_0$  enligt [8], där  $Na_0$  är första ordningens moment och  $a_0$  blir det konstanta värdet på utböjningen på grund av pelarens stora styvhet. Med omskrivning av ekvation 2.5 får man ekvationen för brottlasten

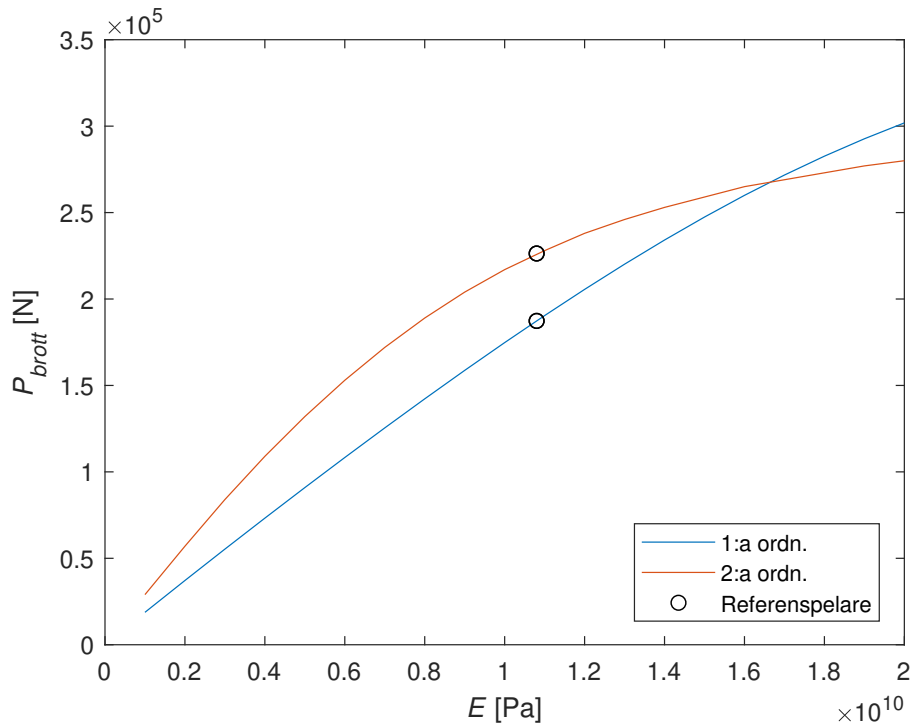
$$\frac{N}{Af_{cd}} + \frac{Na_0}{Wf_{md}} \leq 1 \quad (4.1)$$

vilket för RP 1 ger

$$N = \frac{1}{\frac{1}{0.115 \cdot 0.225 \cdot 15.68 \cdot 10^6} + \frac{0.012}{9.70 \cdot 10^{-4} \cdot 21.12 \cdot 10^6}} = 327.81 \text{ kN}$$

vilket stämmer med platånivån i figur 4.1.

För metod enligt första ordningens teori, avsnitt 3.3, kan man i figur 4.1 se att värdet går mot materialbrottlasten för en pelare utsatt för rent tryck, 405.72 kN. Detta beror på att då  $E$ -modulen ökar, blir pelaren styvare och styvare, vilket resulterar i att  $k_c$  går mot 1.0.



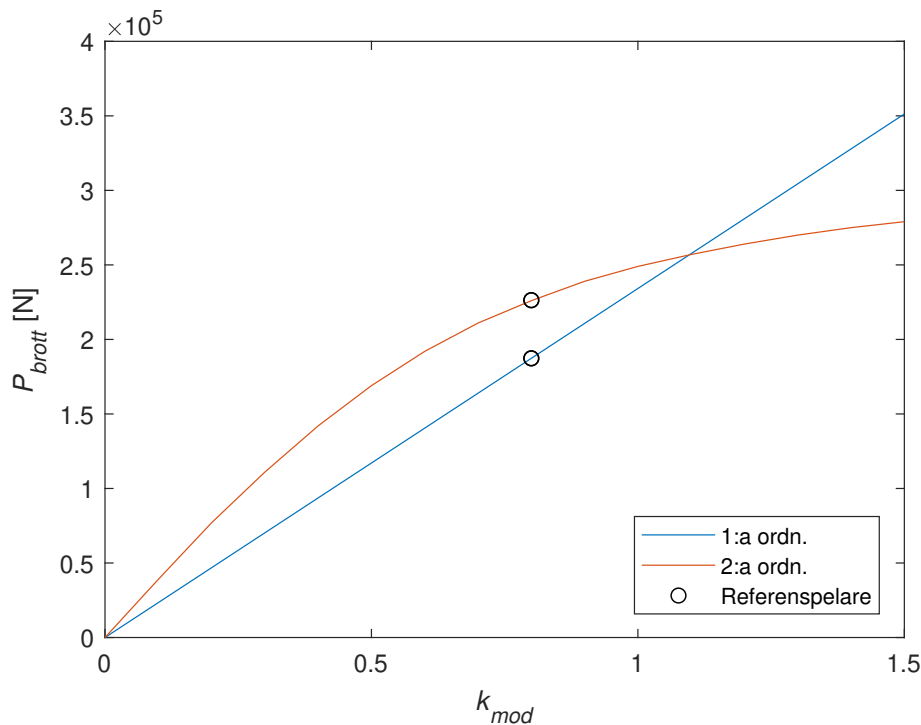
Figur 4.2: Detalj ur figur 4.1. Samband mellan  $P_{brott}$  och  $E$  för RP 1.

Figur 4.2 visar en detalj ur figur 4.1, för  $E$ -värden mellan 0 och 20 GPa. Det kan noteras att för  $E$ -värden mellan 0 och 15 GPa ger andra ordningens teori högre bärförmåga än första ordningens teori.

#### 4.1.2 Lastvaraktighet och fukthalt

Fukthalten beaktas i den nuvarande utformningen av Eurokod 5 [3], genom korrektionsfaktorerna  $k_{mod}$  och  $k_{def}$ , enligt tabell 2.4 och 2.5.  $k_{mod}$  används då den dimensionerande hållfastheten beräknas. Eftersom den dimensionerande hållfastheten är en av de indata som används för att göra beräkningarna enligt finita elementmetoden, enligt avsnitt 3.2.4, är det relevant att kontrollera hur detta värde påverkar bärförmågan. Beräkning enligt första och andra ordningens teori jämförs i figur 4.3, där värdet på  $k_{mod}$  varierar.





Figur 4.3: Samband mellan  $P_{brott}$  och  $k_{mod}$ . Metod enligt första ordningens teori jämförs med andra ordningens teori, då värdet på  $k_{mod}$  varierar.

Det linjära sambandet för metod enligt första ordningens teori beror på att den dimensionerande tryckhållfastheten,  $f_{ck}$ , och därav den dimensionerande bärförmågan,  $N_{c,Rd}$ , beror linjärt av korrektionsfaktorn  $k_{mod}$ . Det olinjära sambandet för metod enligt andra ordningens teori kan förklaras med hjälp av omskrivning av brottkriteriet, ekvation 2.5, där andra ordningens moment skrivs som  $Pe$

$$\frac{N}{Af_c} + \frac{M}{Wf_m} \leq 1$$

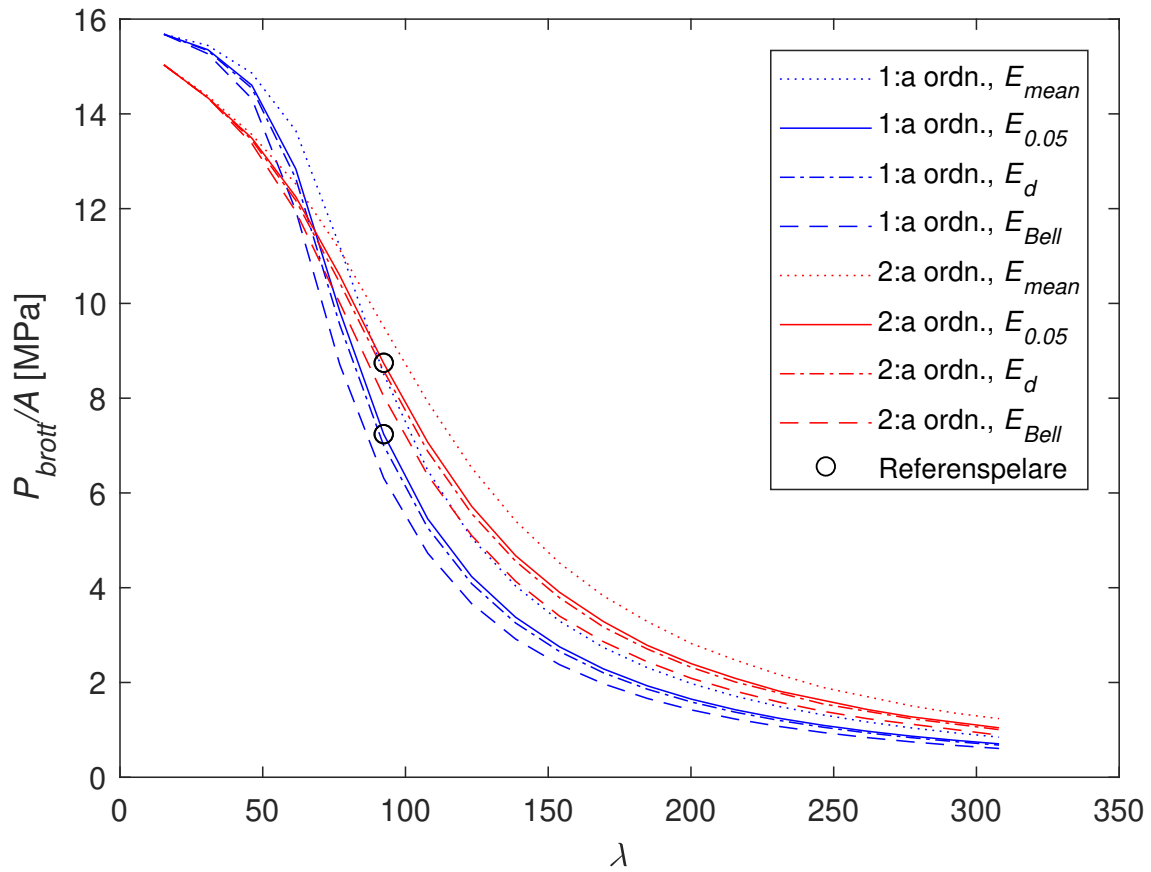
där  $M$  är andra ordningens moment. Då andra ordningens moment beror olinjärt på last och tryckkraft erhålls ett olinjärt samband då  $k_{mod}$  visas på den horisontella axeln.

Som nämnt tidigare ger andra ordningens effekter upphov till ett tillskottsmoment som enligt Bell [1], ofta är anledningen till brott. Momentet beror på att pelaren deformeras då den utsätts för axiellt tryck. Deformationen, i sin tur, påverkas i högsta grad av fukttinnehåll och lastvaraktighet. Bell [1] menar att elasticitetsmodulen (och skjuvmodulen) borde avspegla dessa parametrar på något sätt. Bell föreslår ett alternativt värde på den dimensionerande  $E$ -modulen, enligt ekvation 2.11. Den nuvarande utformningen av Eurokod [3], föreskriver dimensioneringsvärdet av elasticitetsmodulen, enligt 2.9, för beräkningar enligt andra ordningens teori. För att analysera skillnaderna mellan att använda de olika  $E$ -modulerna analyseras bärförmågan relativt tvärsnittsarean för första och andra ordningens teori för respektive  $E$ -modul. Figur 4.4 illustrerar sambandet för RP 1 och figur 4.5 illustrerar sambandet för RP 2. De heldragna linjerna representerar referenspelarna, och markeringarna visar de beräknade värdena, enligt tabell 3.3. I båda diagrammen varierar  $\lambda$  genom att längden på pelarna varierar. Eftersom längden varierar blir tvärsnittsarean i detta fall faktorn som utgör skillnaden för referenspelarna. Längden för pelarna varierar mellan 1 m och 20 m för samtliga analyser. För figurerna 4.4, 4.5, 4.6 och 4.7 gäller förutsättningar enligt kapitel 3:

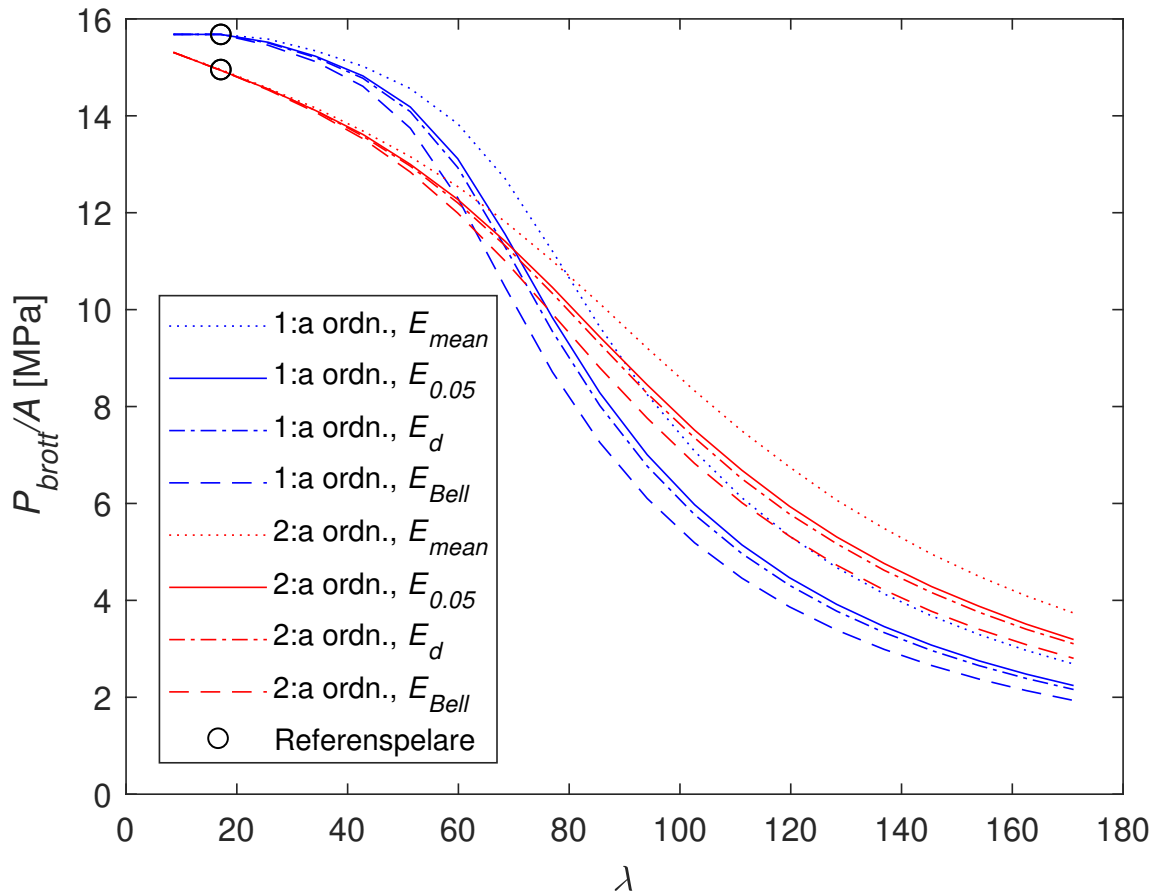
$$\Psi_2 = 0.5$$

$$k_{def} = 0.8 \quad \text{för klimatklass 2}$$

$$k_{mod} = 0.8 \quad \text{för medellång last och klimatklass 2}$$



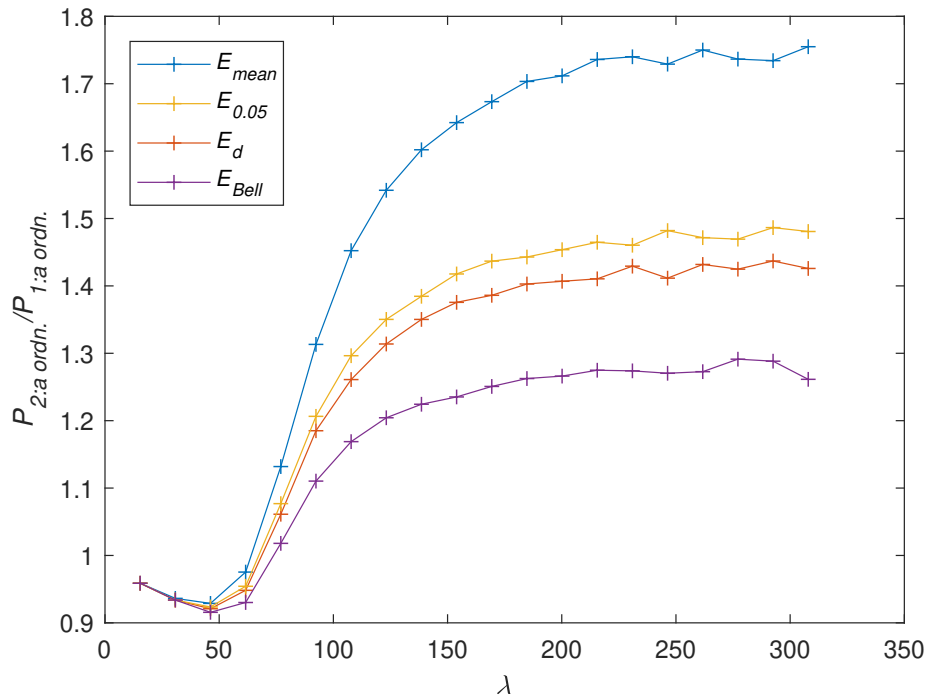
Figur 4.4: Samband mellan  $P_{brott}/A$  och  $\lambda$  för RP 1, utsatt för rent tryck.  $E_{0.05}$  är fem-percentilvärdet,  $E_{mean}$  är medelvärdet,  $E_d$  är det dimensionerande värdet enligt Eurokod [3] och  $E_{Bell}$  är Bells [1] förslag på  $E_d$ .



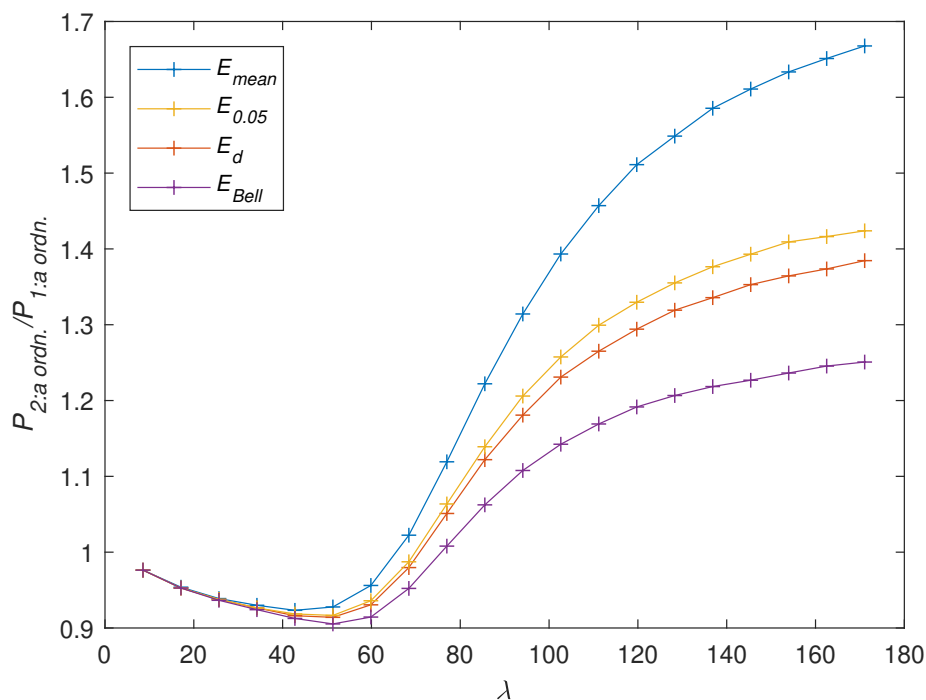
Figur 4.5: Samband mellan  $P_{brott}/A$  och  $\lambda$  för RP 2, utsatt för rent tryck.  $E_{0.05}$  är fem-percentilvärdet,  $E_{mean}$  är medelvärdet,  $E_d$  är det dimensionerande värdet enligt Eurokod [3] och  $E_{Bell}$  är Bells [1] förslag på  $E_d$ .

I sin text [1] nämner Bell att det inte är någon större skillnad mellan  $E_{0.05}$  och  $E_d$ . Man kan se att det inte råder någon större skillnad på bärförmågan relativt tvärsnittsarean, beräknad för  $E_{0.05}$  och  $E_d$ , för respektive metod. I figur 4.5 kan man se att kurvan för första ordningens analys planar ut för små värden på  $\lambda$ . Detta beror på att då  $\lambda_{rel} \leq 0.3$  är värdet på  $k_c = 1$ .

I figurerna 4.4 och 4.5 kan man även se att för små värden på  $\lambda$  (kort pelare), erhålls en lägre bärförmåga (relativt tvärsnittsarean) för analys enligt andra ordningen än för första ordningen. Då pelarens längd ökar ger analysen enligt andra ordningen en högre bärförmåga jämfört med analysen enligt första ordningen. Bells förslag [1], " $E_{Bell}$ ", ger för analys enligt andra ordningen, det värde som mest liknar analys enligt första ordningen. Detta förtydligas i figurerna 4.6 och 4.7, där kvoten mellan  $P_{2:a\ ordn.}$  och  $P_{1:a\ ordn.}$  visas, d.v.s. förhållandet mellan bärförmågan för första ordningens analys jämfört med andra ordningens analys.



Figur 4.6: Samband mellan kvoten av  $P_{2:a \text{ ordn.}}$  beräknad med andra ordningens teori, och  $P_{1:a \text{ ordn.}}$  beräknad med första ordningens teori, där  $E_{0.05}$  använts, för figur 4.4.



Figur 4.7: Samband mellan kvoten av  $P_{2:a \text{ ordn.}}$  beräknad med andra ordningens teori, och  $P_{1:a \text{ ordn.}}$  beräknad med första ordningens teori, där  $E_{0.05}$  använts, för figur 4.5.

Bell [1] menar att om det är rimligt att elasticitetsmodulen avspeglar sina påverkande parametrar borde även instabilitetsfaktorn  $k_c$  beakta fukthalt och lastvaraktighet. Ett förslag enligt honom är att i den nuvarande utformningen, i ekvation 2.18, låta det relativa slanketstalet bero på dimensioneringsvärdet av elasticitetsmodulen istället

$$\lambda_{rel} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_{ck} (1 + \Psi_2 k_{def})}{E_{mean}}} \quad (4.2)$$

Då analys enligt andra ordningen i detta fall, se avsnitt 3.2.4, inte använder sig av slankhetstalet som indata, påverkar denna förändring endast dimensionering av första ordningens analys, enligt 3.2.3.

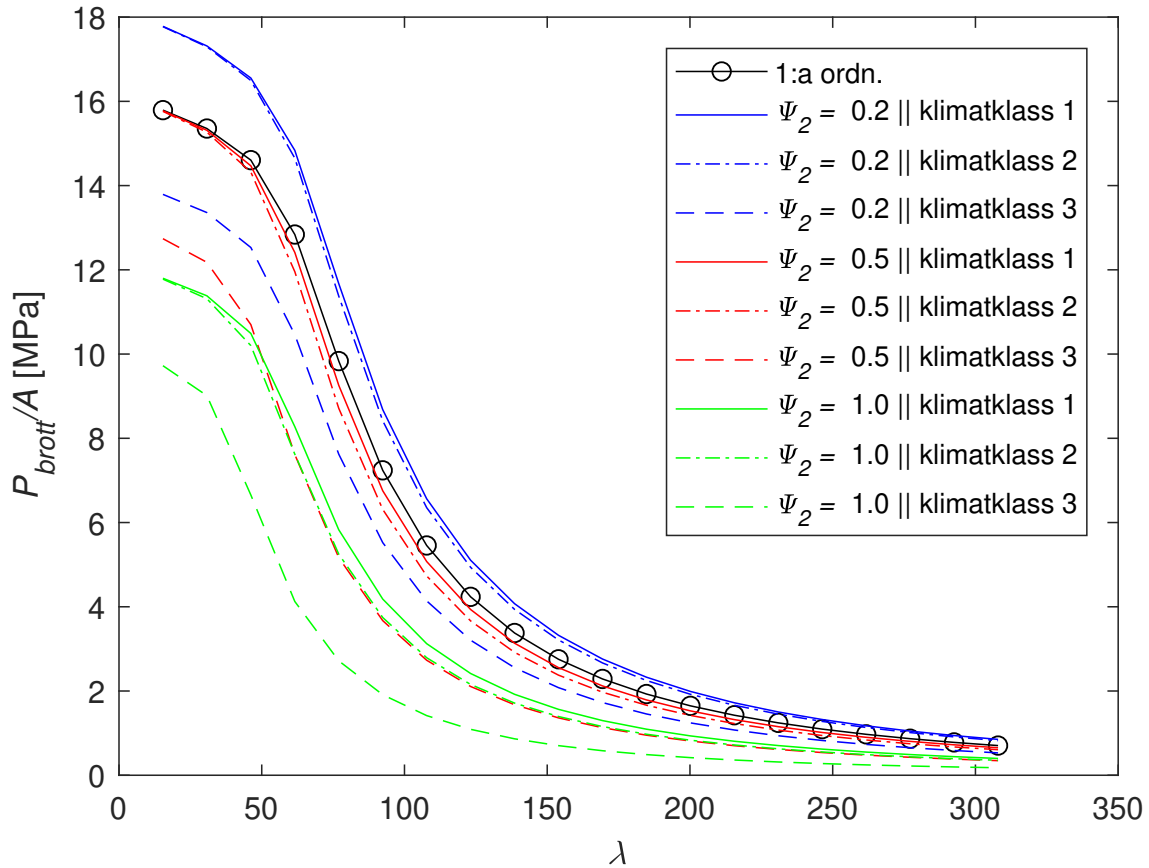
Precis som ovan, varierar längden på pelaren, från 1 m till 20 m. Samtliga analyser görs för klimatklass 2. I en första analys jämförs olika värden för  $\psi_2$  och  $k_{def}$  där även  $k_{mod}$  varierar beroende på lastvaraktighet och klimatklass, enligt tabell 2.4. Följande indata, enligt tabell 4.1, gäller för figur 4.8

Tabell 4.1: Värden på  $k_{mod}$  och  $k_{def}$  då olika klimatklasser och lastvaraktigheter förekommer.

<b>k-faktorer</b>	<b>Klimatklass</b>	$\Psi_2 = 0.2$	$\Psi_2 = 0.5$	$\Psi_2 = 1$
$k_{mod}$	1	0.9	0.8	0.6
	2	0.9	0.8	0.6
	3	0.7	0.65	0.5
$k_{def}$	1	0.6	0.6	0.6
	2	0.8	0.8	0.8
	3	2.0	2.0	2.0

I figur 4.8 visas olika värden på  $k_{mod}$  och  $k_{def}$  för de kurvor som analyseras i figur 4.8.  $k_{mod}$  beror på lastvaraktigheten och klimatklassen, enligt tabell 2.4  $k_{def}$  beror på klimatklassen, enligt tabell 2.5.

De blå linjerna visar korttidslast, de röda linjerna visar medellång last och de gröna linjerna visar permanent last. Den svarta linjen markerad med cirklar visar metod enligt första ordningens analys, med indata enligt tabell 3.1.



Figur 4.8: Jämförelse mellan analyser enligt första ordningen för olika värden på  $\Psi_2$ ,  $k_{def}$ , och  $k_{mod}$ , för RP 1.

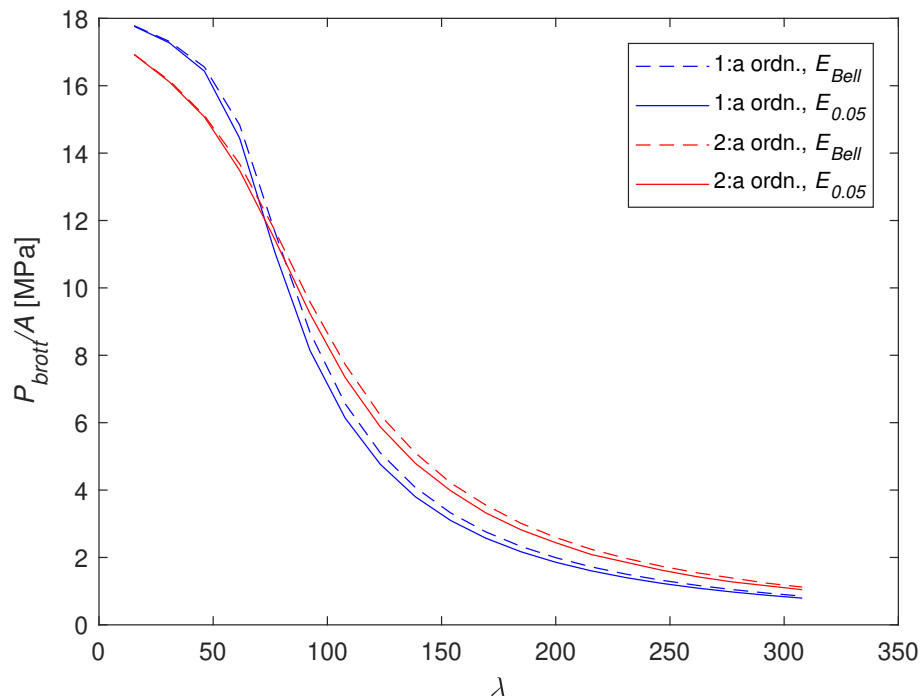
Av figuren kan man urskilja att lastvaraktigheten har stor inverkan på bärförmågan, medan klimatklassen inte har någon större inverkan, förutom i det mest ogynsamma fallet. Beräkning av  $\lambda_{rel}$  enligt första ordningens teori (traditionell metod [3], ekvation 2.18, jämfört med Bells metod [1], visar något högre bärförmåga då samma lastförhållanden och klimatklass som i kapitel 3 används.

En intressant aspekt är att undersöka hur analys enligt första ordningen förhåller sig till andra ordningen, då man tar hänsyn till lastvaraktighet och fukthalt genom Bells förslag [1]. Genom modifiering av  $E$ -modulen kan man ta hänsyn till lastvaraktighet och fukthalt för andra ordningens analys med ett FEM-baserat program, medan man genom modifiering av  $\lambda_{rel}$  tar hänsyn till lastvaraktighet och fukthalt för traditionella metoder enligt första ordningen. För figurerna 4.9, 4.10 och 4.11 analyseras de mest gynsamma och ogynsamma förhållandena samt förhållandena enligt kapitel 3, för RP 1. De mest gynsamma förhållandena gäller för figur 4.9:

$$\Psi_2 = 0.2$$

$$k_{def} = 0.6 \quad \text{för klimatklass 1}$$

$$k_{mod} = 0.9 \quad \text{för korttidslast och klimatklass 1}$$



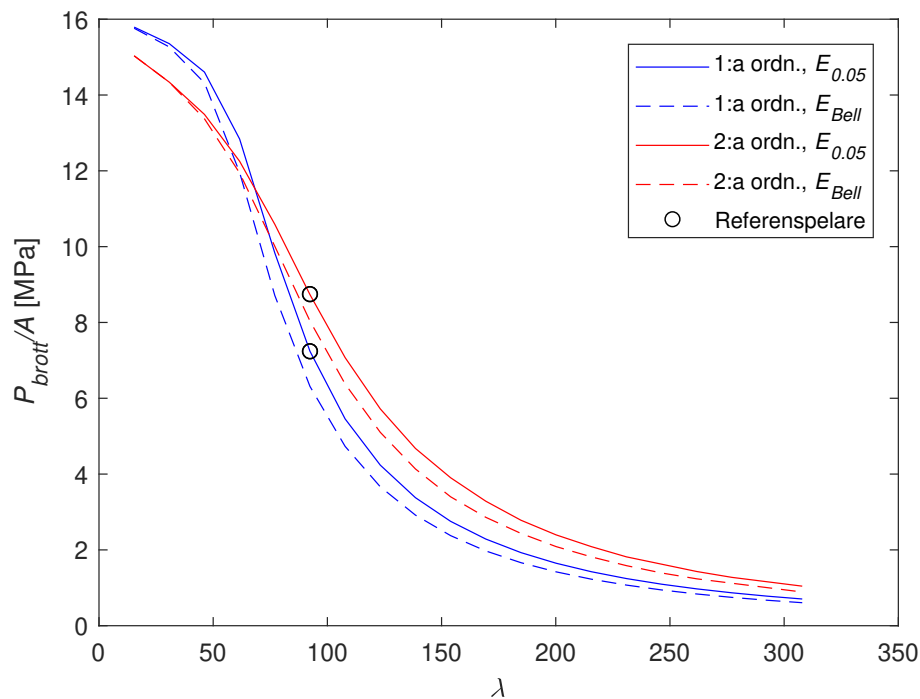
Figur 4.9: Jämförelse mellan olika beräkningsmetoder för första och andra ordningens teori.

För figur 4.10 kontrolleras förhållandena enligt kapitel 3:

$$\Psi_2 = 0.5$$

$$k_{def} = 0.8 \quad \text{för klimatklass 2}$$

$$k_{mod} = 0.8 \quad \text{för medellång last och klimatklass 2}$$



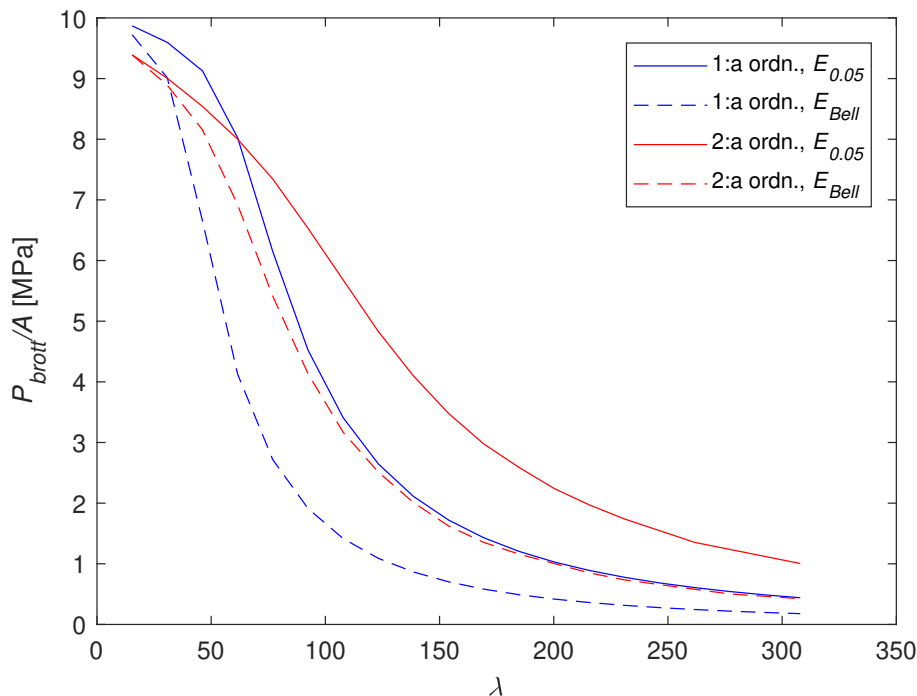
Figur 4.10: Jämförelse mellan olika beräkningsmetoder för första och andra ordningens teori. Markeringarna avser värden för RP 1, enligt första och andra ordningens teori.

I figur 4.11 kontrolleras förhållandena för det mest ogynnsamma fallet:

$$\Psi_2 = 1.0$$

$$k_{def} = 2.0 \quad \text{för klimatklass 3}$$

$$k_{mod} = 0.5 \quad \text{för permanent last och klimatklass 3}$$



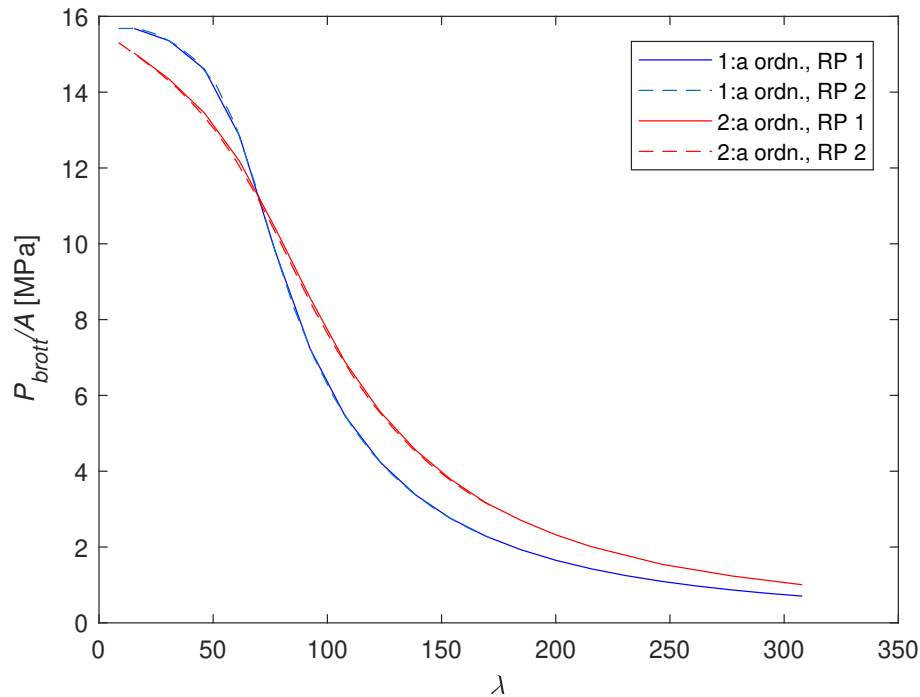
Figur 4.11: Jämförelse mellan olika beräkningsmetoder för första och andra ordningens teori. Permanent last, och klimatklass 3 gäller.

Man kan se i figur 4.9, att för korttidslast och klimatklass 1, d.v.s. de mest gynnsamma förhållandena, ger metoderna enligt [1], en högre bärförmåga än då  $E_{0.05}$  används. Detta beror på att  $E_d$ , enligt [1], är något lägre än  $E_{0.05}$  under de mest gynnsamma förhållandena. Då klimatklassen samt lastvaraktigheten blir mer ogynnsam blir bägge metoderna kraftigt reducerade vad gäller bärförmågan. Pelarens längd är en bidragande faktor till hur stor skillnaden i bärförmåga mellan första och andra ordningens teori blir i detta fall. Endast för väldigt ogynnsamma förhållanden förhåller sig analys enligt andra ordningens teori lägre än den traditionella metoden enligt Eurokod [3].

### 4.1.3 Pelarens geometri

För att kontrollera om tvärsnittet utgör någon skillnad på bärförmågan då första och andra ordningens teori jämförs, analyseras RP 1 och RP 2, till skillnad från avsnitt 4.1.2, i samma figur, där längden varieras. Då detta avsnitt avser att belysa skillnaden mellan de olika tvärsnitten, och inte jämföras med tidigare värden, används de värden på styvhetsparametrar som föreskrivs i [3]. Första ordningen beräknas med  $E_{0.05}$  enligt avsnitt 3.2.3 och andra ordningen beräknas enligt avsnitt 3.2.4, där  $E_d$  används istället för  $E_{0.05}$ .





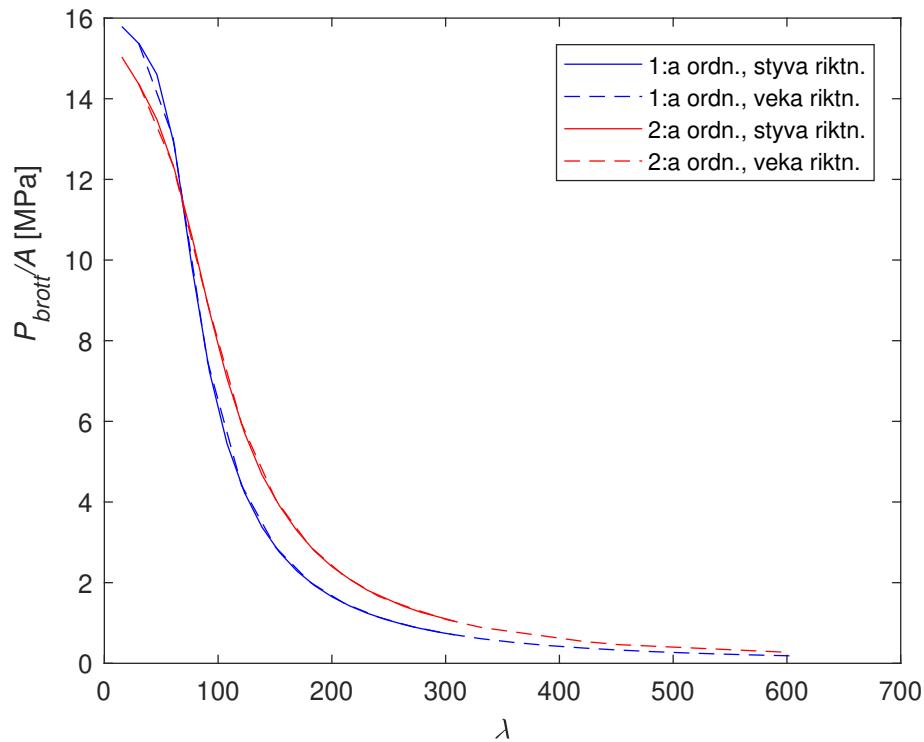
Figur 4.12: Jämförelse mellan första och andra ordningens analys för RP 1 och RP 2. Förhållanden enligt kapitel 3.

I figur 4.12 kan man se viss skillnad mellan linjerna för RP 1 och RP 2 för både första och andra ordningen. För första ordningen, då  $E$ , och  $f_{cd}$  är konstanta, är brottspänningen,  $P_{brott}/A$ , oberoende av bredden och höjden, vilket egentligen ska ge exakt likartade linjer för RP 1 och RP 2. Skillnaderna mellan linjerna beror på att mätpunkterna för RP 1 ger en något "kantigare" linje då den går mot större värden på  $\lambda$ .

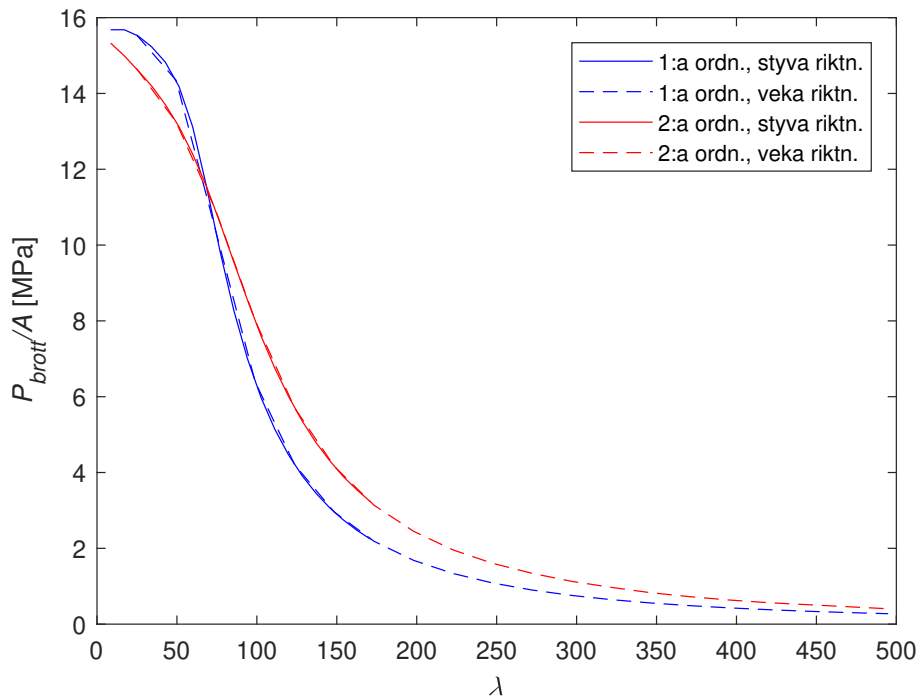
För andra ordningen, om  $E$ ,  $f_{cd}$  och  $f_{md}$  hade varit konstanta skulle linjerna varit exakt lika. Däremot erhålls en liten skillnad mellan RP 1 och RP 2 då böjhållfastheten,  $f_{md}$ , för referenspelarna skiljer sig något på grund av att  $k_h$  är något mindre för RP 2.

#### 4.1.4 Styva eller veka riktningen

För att kontrollera inverkan av knäckning i veka respektive styva riktningen jämförs brottlasten i enlighet med tidigare analyser i detta kapitel mot  $E$ -modulen samt  $\lambda$ . För figurerna 4.13 – 4.16 gäller samma förutsättningar som i kapitel 3. För samtliga figurer analyseras första ordningens teori mot andra ordningens teori.



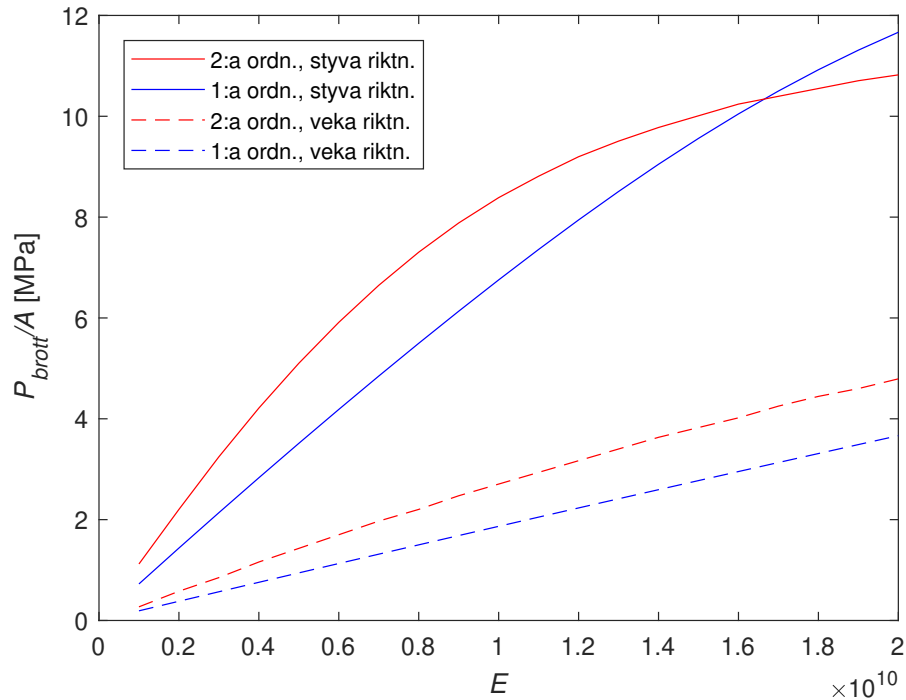
Figur 4.13: Samband mellan brottlast och  $\lambda$  för första och andra ordningens analys där styva och veka riktningen jämförs. RP 1 analyseras.



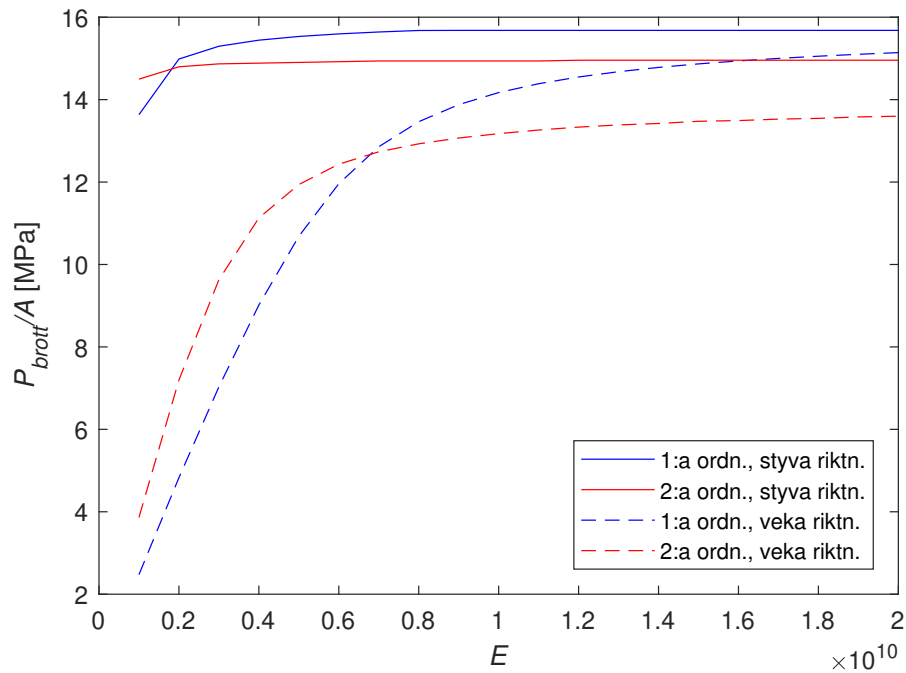
Figur 4.14: Samband mellan brottlast och  $\lambda$  för första och andra ordningens analys där styva och veka riktningen jämförs. RP 2 analyseras.

Figur 4.13 skiljer sig inte mycket från figur 4.12, i avsnitt 4.1.3. Då pelaren är stagad tvärs knäckningsriktningen är det ingen större skillnad mellan de båda analyserna, mer än att kurvorna går mot

större värden på  $\lambda$ , då veka riktningen analyseras. Samma samband som för avsnitt 4.1.3 erhålls, d.v.s. att första ordningen per definition är lika, och att värdena för andra ordningen skiljer sig något.



Figur 4.15: Samband mellan brottlast och  $E$ -modul för första och andra ordningens analys där styva och veka riktningen jämförs. RP 1 analyseras.



Figur 4.16: Samband mellan brottlast och  $E$ -modul för första och andra ordningens analys där styva och veka riktningen jämförs. RP 2 analyseras.

I figurerna 4.15 och 4.16 kan man se att skillnaderna i bärförmåga mellan styva och veka riktning-

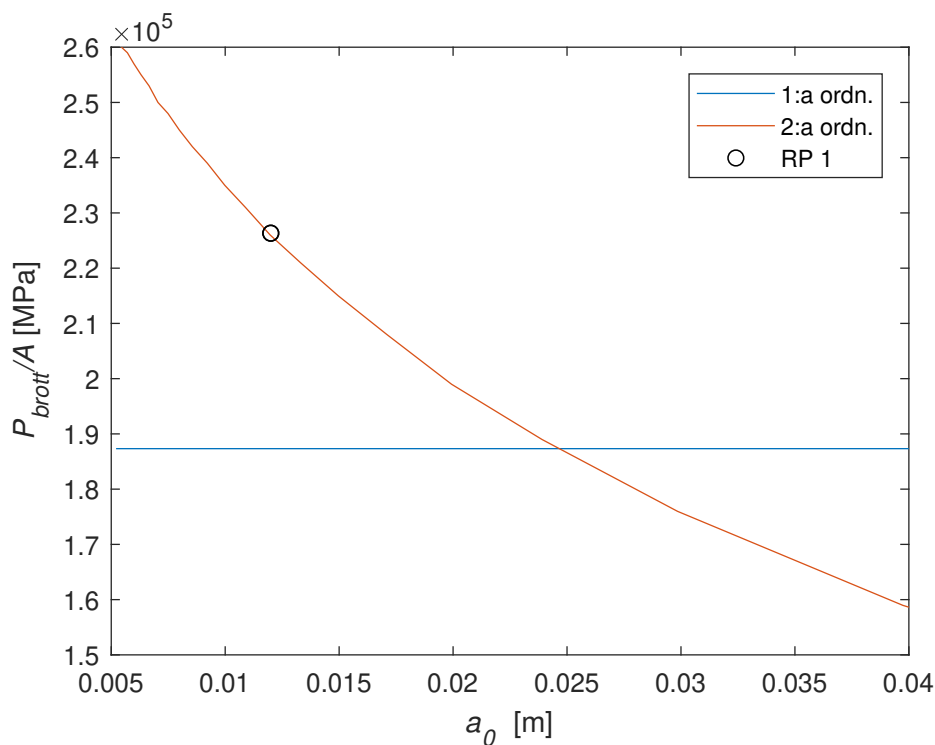
en är något större för RP 1 än för RP 2, då  $E$ -modulen går mot ett större värde.

I figur 4.16 kan man även se att för RP 2 får andra ordningens effekter mindre påverkan vid ett lägre värde på  $E$ -modulen, enligt avsnitt 4.1.1, då platåvärdet för bärförmågan uppnås tidigare. Som följd av detta skiljer sig även skärningspunkten mellan kurvorna. En skillnad mellan RP 1 och RP 2 är att för de nominella värdena för limträ, ger analys enligt andra ordningen en högre bärförmåga för RP 1 men en lägre bärförmåga för RP 2. Detta sambandet gäller för styva riktningen. I den veika riktningen gav analys enligt första ordningens teori en lägre bärförmåga för RP 1 och en högre bärförmåga för RP 2, för de nominella värdena på  $E$ -modulen.

### 4.1.5 Initialkrokighet

Initialkrokighet tas inte hänsyn till direkt då metod enligt första ordningens teori, avsnitt 3.2.3, används. Istället används bland annat korrektionsfaktorn,  $k_c$ , där imperfektionerna indirekt tas hänsyn till. Detta på grund av att  $k_c$  är härledd ur teoretiska tester där realistiska geometriska imperfektioner simulerats, enligt [10]. I Calfem modelleras pelaren med en initialkrokighet, som i detta fall antas vara sinusformad, enligt avsnitt 3.1.2. I figur 4.17 kan man se att för värden på  $a_0$  mellan 0.005 m och ungefär 0.025 m, d.v.s. då värdet i nämnaren är lägre än 240, ger analys enligt andra ordningen en högre bärförmåga. För figur 4.17 gäller följande förutsättningar:

$$k_{mod} = 0.8 \quad \text{för medellång last och klimatklass 2}$$



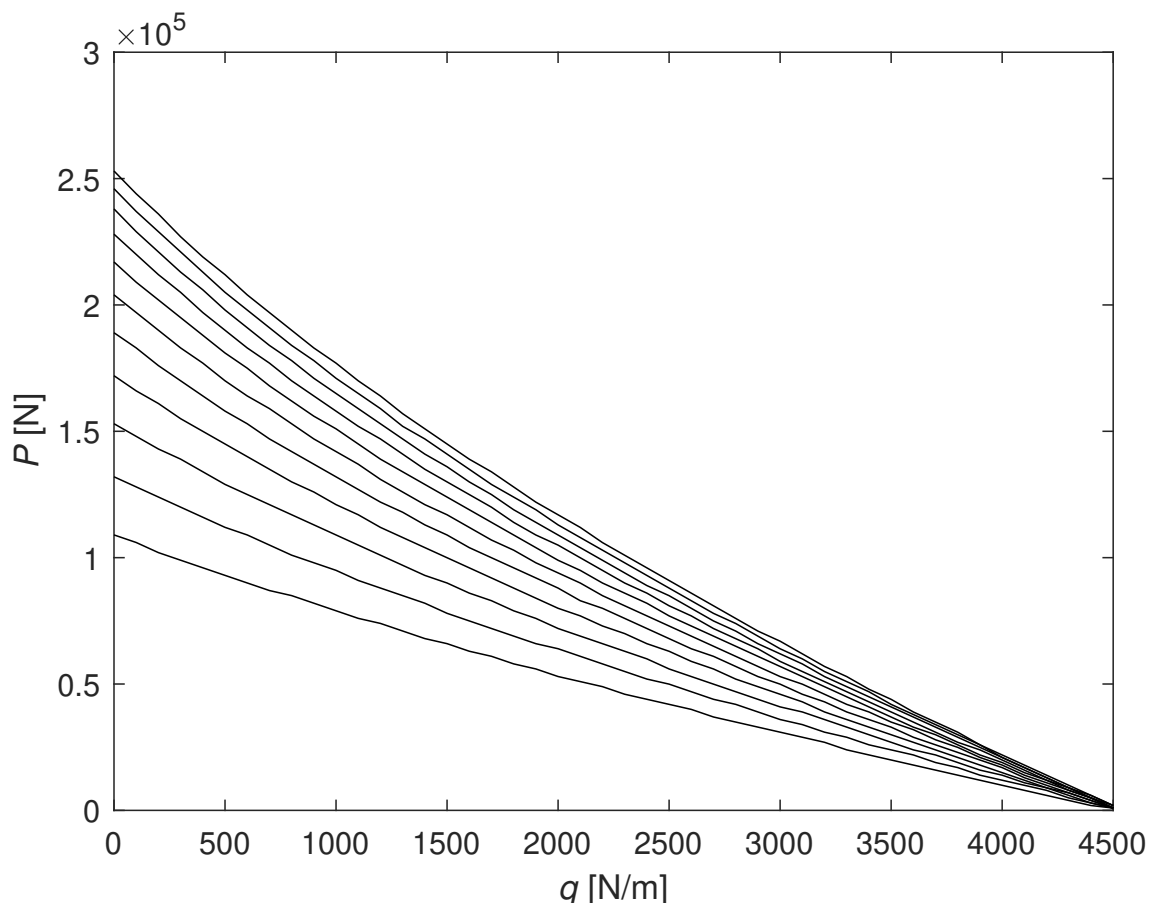
Figur 4.17: Samband mellan brottlaster och initialkrokighetens amplitud för RP 1. Initialkrokighetens amplitud,  $a_0$ , anges i meter. Markeringen anger brottlaster för RP 1, då andra ordningens analys utförs med indata från kapitel 3.

## 4.2 Pelare utsatt för samtidigt tryck och böjmoment

### 4.2.1 Relation mellan tryck och böjning

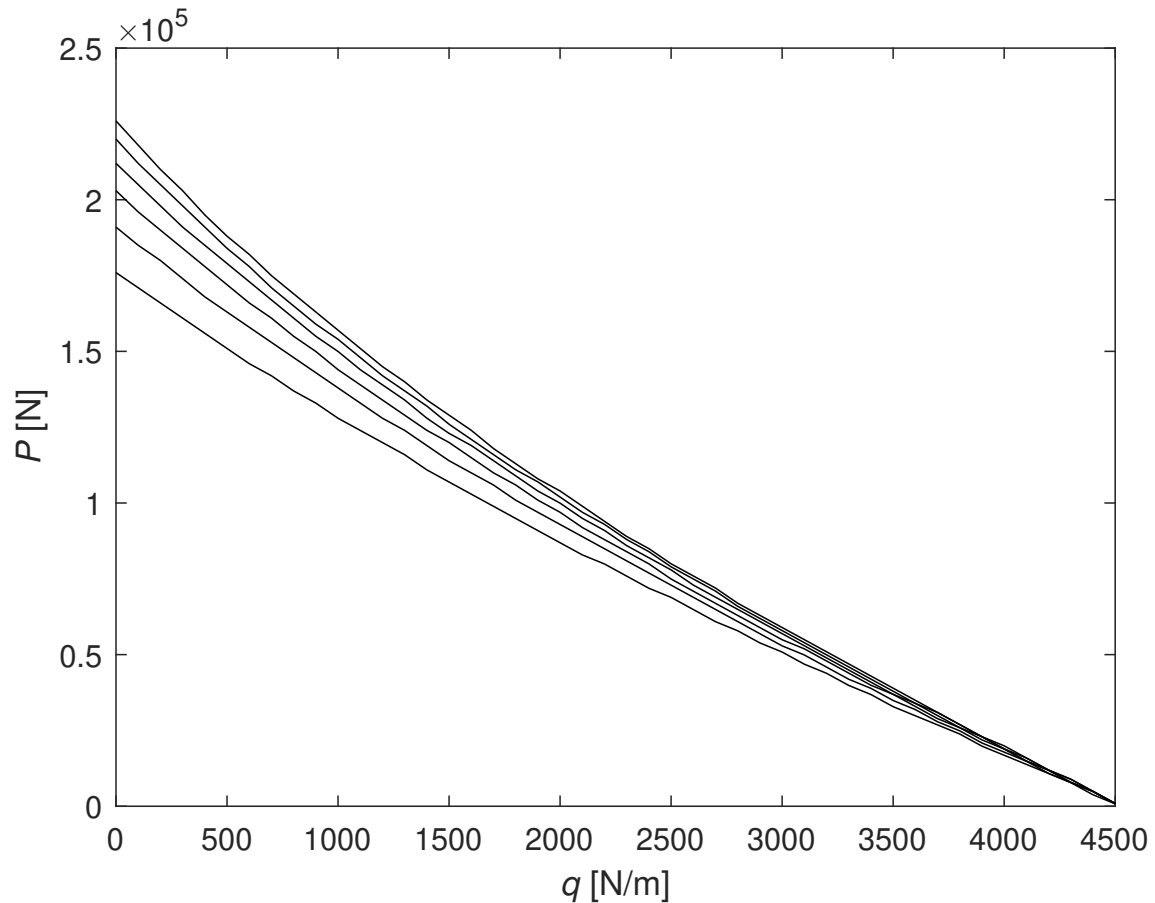
Eftersom andra ordningens effekter förstärks då en utbredd last appliceras, då deformationerna ökas ytterligare, kontrolleras i en första analys de parametrar som påverkar deformation. I figur 4.18 visas förhållandet mellan brottlast och utbredd last, då  $E$ -modulen ökas. Varje kurva motsvarar, nedifrån och upp, ett värde på  $E$ -modul mellan 4 000 MPa och 14 000 MPa, med 1 000 MPa mellanrum. Dessa värden motsvarar något lägre och högre värden än de ytterlighetsvärden som finns för limträ. I figur 4.19 varieras istället initialkrokigheten. Varje kurva motsvarar, nedifrån och upp, ett värde på  $a_0$  mellan  $L/200$  och  $L/500$ , där linje motsvarar en ökning med 60 i nämnaren.  $L/500$  är ett typvärde som används för limträkonstruktioner [6], och  $L/200$  är något lägre än skärningspunkten som beräknades i avsnitt 4.1.5. För figur 4.18 och 4.19 används andra ordningens teori, och förutsättningar enligt kapitel 3 gäller:

$$k_{mod} = 0.8 \quad \text{för medellång last och klimatklass 2}$$



Figur 4.18: Samband mellan bärförmåga och transversell last där  $E$ -modulen varieras, för RP 1. Varje kurva motsvarar ett värde på  $E$ -modulen. Den översta linjen representerar  $E = 14\,000$  MPa och den nedersta representerar  $E = 4\,000$  MPa.

Figur 4.18 visar på olinjära förhållanden för såväl låga som höga värden på  $E$ -modulen, där det framgår tydligare för de höga värdena. Då  $P_{brott}$  går mot 0 går  $q$  mot ett gemensamt värde för alla värden på  $E$  eftersom  $E$  bara påverkar andra ordningens effekter, som är obefintliga här.



Figur 4.19: Samband mellan axiell- och transversell last, där initialkrokigheten varierar, för RP 1. Varje kurva motsvarar ett värde på initialkrokigheten. Den översta linjen representerar  $a_0 = L/500$  och den understa linjen representerar  $a_0 = L/200$ .

Även figur 4.19 visar på olinjära förhållanden för de kurvor som analyseras, där det framgår tydligare för de översta kurvorna, d.v.s. då initialkrokigheten minskar. Inverkan av initialkrokighet minskar för minskande  $P$ , och för  $P = 0$  finns ingen inverkan eftersom initialkrokighet här inte orsakar något tillskottsmoment.

## 5. Slutsats

I detta kapitel sammanfattas främst de slutsatser som dras i kapitel 4 men även kapitel 3. I kapitel 4 har främst metod enligt första ordningens teori jämförts med andra ordningens teori för att tydliggöra skillnaderna mellan beräkningsmetoderna och inverkan av olika parametrar då de olika beräkningsmetoderna används, med undantag för avsnitt 4.2.1 där det endast kontrolleras för andra ordningens teori.

### 5.1 Huvudsakliga observationer

#### 5.1.1 Elasticitetsmodul

- Enligt avsnitt 4.1.1 kan man se att för de värden på  $E$ -moduler som används för limträ ger beräkning enligt andra ordningen en högre bärförmåga än enligt första ordningen för RP 1.

Då  $E$ -modulen går mot ett stort värde har andra ordningens effekter ingen inverkan på pelarens bärförmåga.

#### 5.1.2 Lastvaraktighet och fukthalt

- Då  $k_{mod}$  varieras för att ta hänsyn till fukthalten och lastvaraktigheten, ger, enligt avsnitt 4.1.2, beräkning av andra ordningens teori en högre bärförmåga än enligt första ordningen, för de värden på  $k_{mod}$  som används enligt [3], för RP 1.
- Generellt i avsnitt 4.1.2 erhålls en lägre bärförmåga av analyserna enligt andra ordningen för kortare pelare, och en högre bärförmåga för längre pelare, jämfört med analyserna av första ordningen. Något som skulle kunna förklaras av att  $k_c$  beaktar pelarens plasticitet.
- Då analys enligt första ordningen jämförs med analys enligt andra ordningen, i figurerna 4.6 och 4.7, kan man se att för större värden på pelarens slankhetstal,  $\lambda$ , erhålls stora skillnader på bärförmågorna, för RP 1 och RP 2. Elasticitetsmodulens medelvärde,  $E_{mean}$ , ger enligt förväntan det högsta värdet, men är inte relevant att använda. Fem-percentilen av elasticitetsmodulen,  $E_{0.05}$ , och den dimensionerande elasticitetsmodulen,  $E_d$ , ger nästan lika stora värden, som störst en ökning mellan 40 – 45 % jämfört med bärförmågan för första ordningens teori. Bells förslag för elasticitetsmodulen,  $E_{Bell}$ , ger som störst en ökning mellan 20 – 30 % jämfört med bärförmågan för första ordningens teori. Dessa värden gäller för klimatklass 2, samt att kortvarigaste lasten är medellång.
- Då Bells förslag för analys enligt första ordningen jämförs med hans förslag för analys enligt andra ordningen, erhålls mindre skillnader i bärförmåga då lastvaraktigheten och klimatpåverkan är mindre ogynnsamma. Man kan notera att för mycket ogynnsamma förhållanden, permanent last och klimatklass 3, ger analys enligt första ordningen med  $E_{0.05}$  och analys enligt andra ordningen med  $E_d$ , enligt Bell, likartade resultat för slanka pelare. En möjlig tolkning av detta

är att  $k_c$  har kalibrerats för att ge överensstämmelse med andra ordningens teori för mycket ogynnsamma förhållanden.

### 5.1.3 Pelarens geometri

- Då tvärsnittets inverkan analyseras genom att RP 1 och RP 2 jämförs för första och andra ordningens analys, konstateras det att brottspänningen,  $P_{brott}/A$  för första ordningen är oberoende av att bredden och höjden varieras, då  $E$  och tryckhållfastheten  $f_{md}$  hålls konstanta. För andra ordningen erhålls en minimal skillnad på grund av att böjhållfastheten,  $f_{md}$ , är olika för RP 1 och RP 2 på grund av inverkan av storlekseffekten,  $k_h$ .

### 5.1.4 Styva eller veka riktningen

- Då knäckning i veka respektive styva riktningen jämförs erhålls för analysen mot slankhetstalet,  $\lambda$ , samma samband som då inverkan av pelarens geometri analyserades. Detta beror på att då pelaren är stagad, varieras endast höjden och bredden då veka och styva riktningen varieras.

Då analysen utförs mot  $E$  erhålls skillnader i bärförmåga för andra ordningens analys jämfört med första ordningens analys. De nominella värdena på  $E$ -modul för limträ ger en lägre bärförmåga för RP 2 och en högre bärförmåga för RP 1, då andra ordningens teori används. Detta beror på att analys enligt första ordningen går mot ett högre gränsvärde, då initialkrokighet ej beaktas här. Dessutom har andra ordningens effekter för RP 2 mindre inverkan redan vid låga värden på  $E$  då denna pelare är mer kompakt.

### 5.1.5 Initialkrokighet

- Standardvärdet för intialkrokighet hos limträkonstruktioner ( $L/500$ ) ger ett något högre värde på bärförmåga för andra ordningens analys jämfört med första ordningens analys, då RP 1 analyseras. Då intialkrokigheten blir större än ungefär  $L/240$  ger andra ordningens analys ett lägre värde på bärförmåga. Eftersom analys enligt första ordningen ej beaktar initialkrokighet explicit, erhålls ett linjärt samband mellan brottlast och initialkrokighet.

### 5.1.6 Relation mellan tryck och böjning

- Det olinjära förhållandet mellan  $P$  och  $q$  blir tydligare för större värden på  $E$ . En pelare med ett högre värde på  $E$  klarar av en större transversell last än en pelare med ett lägre värde på  $E$ , då pelarna belastas med en lika stor axiell last. Då pelaren endast belastas av en transversell last, går  $q$  mot ett gemensamt värde då andra ordningens effekter blir obefintliga.

I figur 4.19 erhålls ett liknande förhållande. För högre värden på  $P$  har initialkrokigheten en större inverkan, och då  $P$  går mot noll, går  $q$  mot ett gemensamt värde, då intialkrokigheten i detta fall inte orsakar något tillskottsmoment.

## 5.2 Avslutande diskussion

Eurokod föreskriver att dimensionerande styvhetsvärden värden bör användas vid beräkning enligt andra ordningens teori, men skillnaden mellan  $E_{0,05}$  som används för första ordningens teori och  $E_d$  som används för andra ordningens teori är minimal för limträ. Bells förslag på elasticitetsmodulen,  $E_{Bell}$ , ger i förhållande till det dimensionerande värdet enligt [3],  $E_d$ , en något reducerad bärförmåga. Skillnaderna mellan  $E$ -modulerna är tydligare då pelaren går mot ett slankare värde. För något ogynnsamma förhållanden (klimatklass 2, och medellång lastvaraktighet), beräknas med  $E_d$ , enligt



[3], upp till 45 % större bärförmåga och med  $E_{Bell}$ , enligt [1], upp till 30 % större bärförmåga då andra ordningens analys jämförs med första ordningens analys. Detta indikerar att  $E$ -modulen bör beakta lastvaraktighet och fukthalt då analys enligt andra ordningen utförs, för att inte riskera att göra en grov överskattning jämfört med första ordningens analys. Detta styrks i figurerna 4.9–4.11 där skillnaderna mellan första och andra ordningens analys ökar då klimatklassen och lastvaraktigheten blir mer ogynnsamma. För maximalt ogynnsamma förhållanden är andra ordningens analys med  $E_{Bell}$  nästan likvärdig första ordningens analys med  $E_{0.05}$ .

I avsnitten 4.1.3 och 4.1.4 dras samma slutsats för givet slankhetstal, d.v.s. att då pelarens tvärsnittsarea varierar mot längden, erhålls ingen skillnad i bärförmåga för första ordningen analys och minimal skillnad i bärförmåga för andra ordningens analys, under förutsättning att pelaren är stagad tvärs belastningsriktningen.

Man kan i de analyser som utförs se en viss skillnad i hur den beräknade bärförmågan förhåller sig mellan första och andra ordningens analys då  $\lambda$  varierar. För lägre värden på  $\lambda$  ger första ordningen en högre bärförmåga, och för högre värden på  $\lambda$  en lägre bärförmåga, i förhållande till andra ordningen. En bidragande faktor till skillnaden mellan metoderna skulle kunna vara plasticitetens inverkan på korrektionsfaktorn  $k_c$ .

### 5.3 Förslag på fortsatta studier

- Endast två referenspelare analyseras i denna rapport. Referenspelarna använder nominella värden på höjd och bredd men längden är anpassad för att erhålla ett lämpligt värde på  $k_c$ . En intressant aspekt hade varit att studera vilka längder och dimensioner som är vanligast i praktiken, för att avgöra vilka referenspelare som är av störst relevans att studera.
- Denna studie analyserar enbart ledat infästa pelare, där en sinusformad initialkrokighet antas. Ett intressant fall hade varit att undersöka hur en fast inspänd pelare förhåller sig, vilket initialkrokighet som ska antas.
- Denna studie tar ej hänsyn till vridknäckning och böjvridknäckning, då arbetet hade blivit för omfattande. En intressant aspekt hade varit att inkludera dessa fenomen i beräkningarna.
- För fallet samtidigt tryck och böjmoment, tas vid analys enligt andra ordningen ej hänsyn till pelarens plasticitet. Ytterligare studier hade behövts genomföras för att ta reda på hur plasticiteten kan beaktas då analys enligt andra ordningen utförs.
- Då endast teoretiska tester utförs blir det svårt att avgöra vilken metod som bäst uppskattar bärförmågan. Ytterligare jämförelser för att tydliggöra hur de olika metoderna förhåller sig till den verkliga bärförmågan hade lämpligtvis kunnat göras mot redan existerande experimentella resultat, eller nya experimentella tester.



## 6. Referenser

### Litteraturförteckning

- [1] Bell, Kolbein. *Norwegian comments and proposals concerning Structural analysis and instability*. The Norwegian National mirror committee. 2017-12-27.
- [2] Swedish Standards Institute (2009). *Eurokod 0 Grundläggande dimensioneringsregler för bärverk*. Swedish Standards Institute, Stockholm.
- [3] Swedish Standards Institute (2009). *Eurokod 5 Dimensionering av träkonstruktioner*. Swedish Standards Institute, Stockholm.
- [4] Swedish Standards Institute (2013). *SS-EN 14080 Träkonstruktioner – Limträ och limmat konstruktionsvirke – Krav*. Swedish Standards Institute, Stockholm.
- [5] Föreningen Sveriges Skogsindustrier (2016). *Limträhandboken Del 1 Fakta om limträ*. Föreningen Sveriges Skogsindustrier, Stockholm.
- [6] Föreningen Sveriges Skogsindustrier (2016). *Limträhandboken Del 2 Projektering av limträkonstruktioner*. Föreningen Sveriges Skogsindustrier, Stockholm.
- [7] Isaksson, T., Mårtensson, A., Thelandersson, S. (2017). *Byggekonstruktion*. Interak, Polen. Studentlitteratur, Lunds Universitet. ISBN 978-91-44-11836-9.
- [8] Heyden, S., Dahlblom, O., Olsson, A. och Sandberg, G. (2017). *Introduktion till strukturmekniken*. Interak, Polen. Studentlitteratur, Lunds Universitet. ISBN 978-91-44-08406-0.
- [9] Dahlblom, O., Olsson, K-G.(2015). *Strukturmekanik Modellering och analys av ramar och fackverk*. Eurographic, Danmark. Studentlitteratur, Lunds Universitet. ISBN 978-91-44-10786-8.
- [10] Blaß, H.J., Sandhaas, C. (2017). *Timber engineering – Principles for design*. Karlsruhe, Tyskland. Vetenskaplig publicering. Karlsruher Institut für Technologie (KIT). ISBN 978-3-7315-0673-7.
- [11] Austrell, P-E., Dahlblom, O., Lindemann, J., Olsson, A., Olsson, K-G., Persson, K., Petersson, H., Ristinmaa, M., Sandberg, G. och Wernberg, P-A. (2004). *Calfem – A finite element toolbox Version 3.4*. Lund, Sverige. Studentlitteratur, Lunds Universitet. ISBN 91-8855823-1.

### Programvaror

- [12] MATLAB and Statistics Toolbox Release R2017b, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States.



## 7. Bilaga A

### Matlab kod

```
1 %% Andra ordningens teori (FEM. Pelare utsatt for enbart axiellt
   tryck)
2
3 clear all
4
5 format long
6
7 clc
8
9 %% Indata
10
11 % Materialegenskaper
12 E = 10800e6;
13
14 b = 0.115;
15
16 h = 0.225;
17
18 L = 6;
19
20 A = b*h;
21
22 I = (b*h^3)/12;
23
24 W = (b*h^2)/6;
25
26 ep = [E A I];
27
28 n =101; % Antal noder (antalet undersokta
   punkter , ska vara udda)
29 nmax = round (n/2); % Nodpunkten dar momentet ar som
   storst
30
31 imp = 500; % Imperfektionstal (L/500 for
   limtra)
32
33 fck = 24.5e6;
34 fmk = 30e6;
```

```

35
36 gamma_M = 1.25;
37 k_mod = 0.8;
38 k_h = min( ((0.600/h)^0.1), 1.1);
39
40 fcd = (fck * k_mod)/gamma_M;
41 fmd = (fmk * k_mod * k_h)/gamma_M;
42
43 % Inforande av noll-koordinatmatrix
44 Coord = zeros(n,2);
45
46 % Inforande av lastvektor
47 f0 = zeros(n*3,1);
48 f0(3*n-1) = -1e3;
49
50 % Upplagsvillkor
51 bc = [1 0;
52       2 0;
53       n*3-2 0];
54
55 %% Iteration av koordinater
56
57     for i = 1:n
58         Coord(i,2) = L/(n-1)*(i-1);
59         Coord(i,1) = (L/imp)*sin((pi/L)*Coord(i,2));
60     end
61
62 % Generering av topologimatrix utifran n
63     for i = 1:n-1
64         Edof(i,:) = [i 3*i-2 3*i-1 3*i 3*i+1 3*i+2 3*i+3];
65     end
66
67 % Generering av Elementens koordinater och frihetsgrader
68     for i = 1:n
69         Dof(i,:) = [3*i-2 3*i-1 3*i];
70     end
71
72 [Ex, Ey] = coordxtr(Edof, Coord, Dof, 2);
73
74 % Okning av last till det gar till BROTT
75 j = 0;
76
77 %% Iteration av paverkande last
78
79     for alpha = 226:0.001:227
80         j = j+1;
81
82         N = zeros(1,n-1)+(0.01);
83         N0 = ones(1,n-1);
84

```

```

85     M = zeros(1,n-1)+(0.01);
86     M0 = ones(1,n-1);
87
88
89     % Iteration for konvergens
90     eps = 0.0001;
91
92     m = 0;
93
94     while (abs((N(1)-N0(1))/N0(1)) > eps)
95         m = m+1;
96
97         % Inforande av styvhetsmatris
98         K = zeros(n*3);
99
100        f = f0*alpha;
101
102    % Generering av styvhetsmatris
103        for i = 1:n-1
104            Ke = beam2g(Ex(i,:),Ey(i,:),ep,N(i));
105
106            K = assem(Edof(i,:),K,Ke);
107        end
108
109        [a,r] = solveq(K,f,bc);
110
111        Ed = extract(Edof,a);
112
113        for i = 1:n-1
114            es = beam2gs(Ex(i,:),Ey(i,:),ep,Ed(i,:),N(i));
115
116            esi = es(1,1);           %Brottlast
117
118            N0(i) = N(i);
119            N(:,i) = (esi);
120
121            esi2 = es(1,3);         %Brottmoment
122
123            M0(i) = M(i);
124            M(:,i) = (esi2);
125        end
126
127        if ( m > 20)
128            disp([" Alpha= ",num2str(alpha), ...
129                ": The solution doesn't converge:"])
130            break
131        end
132
133    end
134    Kred = red(K,bc(:,1));           % For knackning

```

```
135     if ((abs(N(nmax)/(fcd*A)) + abs(M(nmax)/(fmd*W))) > 1
136         || (det(Kred)<=0) ) % Brott villkor
137         disp(["Alpha= ", num2str(alpha), ...
138             ": N/f_c * A + M/f_m*W < 1, Material failure"])
139         break
140     end
141     if (m > 20)
142         break
143     end
144     disp(["Alpha = ", num2str(alpha), " is OK! ", int2str
145         (m), ...
146         " iterations are performed."])
147     disp([" "])
148 end
```