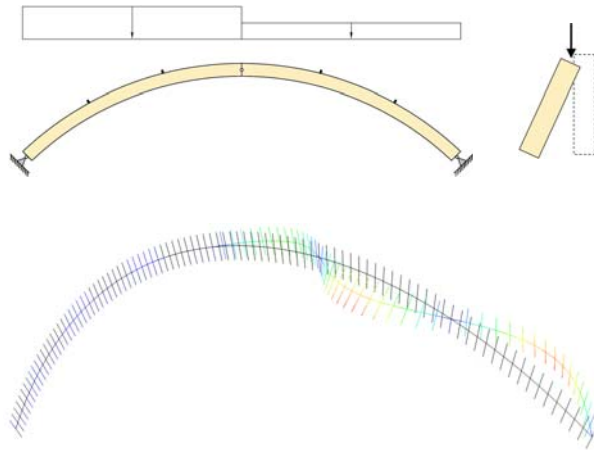




LUND  
UNIVERSITY



# ***SIDOSTABILITET FÖR LIMTRÄBÅGAR***

DAVID PERSSON

Structural  
Mechanics

*Master's Dissertation*



*Department of Construction Sciences*  
Structural Mechanics

ISRN LUTVDG/TVSM--10/5168--SE (1-93)  
ISSN 0281-6679

# SIDOSTABILITET FÖR LIMTRÄBÅGAR

Master's Dissertation by  
DAVID PERSSON

Supervisors:

Per Johan Gustafsson, Professor and  
Kent Persson, PhD, Div. of Structural Mechanics

Arne Emilsson, Limträteknik AB, Falun

Examiner:

Per-Erik Austrell, PhD,  
Div. of Structural Mechanics

Copyright © 2010 by Structural Mechanics, LTH, Sweden.  
Printed by Wallin & Dalholm Digital AB, Lund, Sweden, November, 2010 (*PI*).

For information, address:  
Division of Structural Mechanics, LTH, Lund University, Box 118, SE-221 00 Lund, Sweden.  
Homepage: <http://www.byggmek.lth.se>



# Förord

Detta examensarbete påbörjades hösten 2009 och utfördes till större delen under vår och sommar år 2010 vid Lunds Tekniska Högskola, avdelningen för Byggnadsmekanik. Arbetet har genomförts i samarbete med Arne Emilsson på Limträteknik AB i Falun och det är Arne som tillsammans med Prof. Per Johan Gustafsson arbetat fram problemställningen som ligger till grund för rapporten.

Jag skulle vilja ge ett stort tack till personalen på Byggnadsmekanik, speciellt Kent Persson och Per Johan Gustafsson som varit till enastående hjälp under arbetets gång. Jag vill också tacka mina föräldrar för stödet jag fått under alla år av studier samt alla de vänner som stått mig nära under min civilingenjörsutbildning.

Lund, november 2010

David Persson



# Abstract

Glulam arches with long span often have a very high and slender cross-section. This may cause lateral torsional buckling of the arch. A symmetrical loading doesn't usually become a problem, but if the arch is loaded asymmetrical there will be large bending moments that increases the risk of instability significantly.

Straight beams that are subjected to point loads or distributed loading will be subjected to compressive stresses in the upper edge of the beam. Such pressure will just like the case where a column is pressure-loaded have some instability risk. This is, however, rarely a problem even though large structures are used because the upper edge of a straight beam is almost exclusively stabilized by ridges or any type of coverings. However, in glulam arches both the normal forces and torque leads to a pressure in the unstayed lower edge of the arch which means a high risk of instability.

The Finite Element Method is a numerical approximation method where a physical problem is divided into elements so that approximations can be made for each element and therefore the whole problem can be solved. This will be used with the FE-software Abaqus to divide beams and arches into elements whereupon instability analysis can be performed. The instability analysis is made by eigenvalue analysis or a static nonlinear analysis and particularly shell or beam elements are used.

For simply supported, straight beams there are analytical equations for calculation of instability available. Analysis using the Finite Element Method for straight beams gives very good conformity with the analytical solutions. The effect of loading eccentricity on the stability was specially studied and this effect proved to be quite large.

For glulam arches, it is not as easy to find concrete analytical solutions, even though many of the conjunctions you find on a straight beam is also applicable to an arch. An analytical solution method is proposed but this presupposes that the connections to ridges or similar is very good. This method is based on dividing the arch into segments corresponding straight beams and controlling the instability on worst loaded beam. The method seems to give relatively well results at least in asymmetrical loading of the arch. How connections should be designed or how stiff they need to be is addressed in the report.





# Sammanfattning

Limträbågar med lång spännvidd har ofta ett väldigt högt och slankt tvärsnitt. Detta medför risk för vippningsinstabilitet. En jämnsymmetrisk belastning av bågen ställer oftast inte till något problem, men då bågen belastas osymmetriskt uppkommer stora böjmoment som ökar risken för instabilitet markant.

Raka balkar som belastas med punktlaster eller utbredda laster får ett tryck i balkens överkant. Ett sådant tryck medför precis som för fallet då en pelare är tryckt en viss instabilitetsrisk. Detta medför dock sällan ett problem trots att stora balkar används eftersom att överkanten i en rak balk nästan alltid är stabiliserad av åsar eller någon typ av beklädnad. I limträbågar medför dock såväl normalkrafter som moment ett tryck i bågens ostagade underkant vilket medför en stor instabilitetsrisk.

Finita elementmetoden är en numerisk approximativ metod där man delar upp det fysikaliska problemet i element så att approximationer kan göras för vardera element och således kan hela problemet lösas. Denna metod används tillsammans med Finita elementprogrammet Abaqus för att dela upp balk eller båge i mindre element varpå instabilitetsanalyser kan utföras. Dessa instabilitetsanalyser sker genom egenvärdeanalys eller en statisk olinjär analys och det är framför allt skal- eller balkelement som används.

För fritt upplagda raka balkar finns analytiska ekvationer för beräkning av instabilitet. Analyser med hjälp av Finita elementmetoden ger för raka balkar väldigt god överensstämmelse med de analytiska lösningarna. Speciellt studerades lastexcentricitetens inverkan på stabiliteten och denna inverkan visade sig vara ganska stor.

Vad gäller limträbågar är det inte lika lätt att hitta konkreta analytiska lösningar trots att många av de samband man hittar för en rak balk även är tillämpbara på en båge. En analytisk lösningsmetod är dock föreslagen men denna förutsätter att infästningsförhållandena mot sekundärbärverk är väldigt goda. Denna metod bygger på att man delar upp bågen i segment motsvarande raka balkar och kontrollerar instabiliteten för värst belastad balk. Metoden verkar ge relativt goda resultat inte minst vid ojämn belastning av bågen. Hur anslutningar bör utformas eller hur styva dessa behöver vara behandlas utförligt i rapporten.



# Symboler och beteckningar

## Latinska bokstäver

$A$	Balktvärsnittets area	(m <sup>2</sup> )
$b$	Bredden hos balktvärsnittet	(m)
$E$	Elasticitetsmodul	(Pa)
$e$	Excentricitet	(m)
$f$	Pilhöjd hos en båge	(m)
$f_m$	Dimensionerande böjhållfasthet	(Pa)
$f_c$	Dimensionerande tryckhållfasthet	(Pa)
$G$	Skjuvmodul	(Pa)
$h$	Höjden hos balktvärsnittet	(m)
$I_x$	Tröghetsmoment runt x-axeln	(m <sup>4</sup> )
$I_y$	Tröghetsmoment runt y-axeln	(m <sup>4</sup> )
$I_0$	Polärt tröghetsmoment	(m <sup>4</sup> )
$I_\omega$	Välvtröghetsmoment	(m <sup>6</sup> )
$k$	Fjäderstyvhet i längdled	(N/m)
$k$	Fjäderstyvhet för rotation	(Nm)
$k_c$	Reduktionsfaktor som beaktar risken för plan knäckning	(-)
$k_{crit}$	Reduktionsfaktor som beaktar risken för vippning	(-)
$k_r$	Reduktionsfaktor med hänsyn till lamellkrökningen	(-)
$K_y$	Vridstyvhets tvärsnittsfaktor	(m <sup>4</sup> )
$L$	Längd för rak balk eller pelare	(m)
$l$	Spännvidd för båge eller rak balk	(m)

$L_{crit}$	Kritisk längd för balk m.h.t. instabilitet	(m)
$L_e$	Sträcka mellan två sidostagade punkter i en balk	(m)
$M$	Moment	(Nm)
$M_{crit}$	Kritiskt moment m.a.p. instabilitet	(Nm)
$N$	Normalkraft	(N)
$P$	Punktlast	(N)
$P_{crit}$	Kritisk punktlast m.a.p. instabilitet	(N)
$q$	Jämnt utbredd last	(N/m)
$q_{crit}$	Kritisk jämnt utbredd last m.a.p. instabilitet	(N/m)
$R$	Radie för krökt balk eller båge	(m)
$s$	Bågens krökta längd	(m)
$s_0$	Snölastens grundvärde på mark	(N/m <sup>2</sup> )
$V$	Tvärkraft	(N)
$v$	Förskjutning av balk i vertikalriktning	(m)
$w$	Förskjutning av balk horisontellt, vinkelrätt mot balken	(m)
$z$	Skjuvcentrums avstånd från balktvärsnittets tyngdpunkt	(m)

## Grekiska bokstäver

$\delta$	Deformation i spikförband	(m)
$\varepsilon$	Töjning	(-)
$\lambda_m$	Slankhetstalet för ett balktvärsnitt	(-)
$\mu$	Formfaktor för snölast på tak	(-)
$\nu$	Tvärkontraktionstalet	(-)
$\sigma_m$	Böjspänning	(Pa)
$\sigma_c$	Normalspänning	(Pa)
$\varphi$	Vridning/vinkeländring av balktvärsnittet	(rad)
$\psi$	Vinkeln mellan upplagspunkterna i en krökt balk	(rad)

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Introduktion</b>	<b>1</b>
1.1	Bakgrund . . . . .	1
1.2	Syfte . . . . .	1
1.3	Metod . . . . .	2
1.4	Avgränsningar . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Instabilitet</b>	<b>3</b>
2.1	Raka balkar . . . . .	4
2.1.1	Limträhandboken . . . . .	7
2.1.2	Trækonstruktioner . . . . .	8
2.2	Krökta balkar . . . . .	9
2.2.1	Limträhandboken . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Trä, limträ och limträbågar</b>	<b>13</b>
3.1	Träets styvhetsegenskaper . . . . .	16
3.2	Limträ . . . . .	18
3.3	Limträbågar . . . . .	19
3.3.1	Geometri . . . . .	20
3.3.2	Laster . . . . .	20
3.3.3	Snittkrafter och upplagsreaktioner . . . . .	21
3.3.4	Anslutningsdetaljer . . . . .	24
3.3.5	Stomstabilisering av byggnad med limträbågar . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Finita elementmetoden och Abaqus</b>	<b>29</b>
4.1	Finita elementmetoden . . . . .	29
4.1.1	Egenvärdesanalys . . . . .	31
4.1.2	Statisk olinjär analys . . . . .	32
4.2	Abaqus . . . . .	33
4.2.1	Elementtyper . . . . .	34
4.2.2	Val av elementform och antal . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Instabilitet hos raka limträbalkar</b>	<b>39</b>
5.1	FEM-modellen . . . . .	39
5.1.1	Geometri och modell . . . . .	39

5.1.2	Laster . . . . .	40
5.1.3	Randvillkor . . . . .	41
5.2	Varierande geometri och materialdata . . . . .	41
5.2.1	Längd . . . . .	41
5.2.2	Tvärsnittshöjd . . . . .	43
5.2.3	Tvärsnittsbredd . . . . .	44
5.2.4	Träets styvhetsvärden . . . . .	45
5.3	Lastexcentricitetens inverkan . . . . .	47
5.4	Rak balk utsatt för moment och normalkraft . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Instabilitet hos limträbågar</b>	<b>53</b>
6.1	Analytisk beräkningsmetod . . . . .	53
6.2	FEM-modellen . . . . .	55
6.2.1	Geometri och modell . . . . .	55
6.2.2	Laster . . . . .	56
6.2.3	Randvillkor . . . . .	57
6.3	Varierande geometri och materialdata . . . . .	58
6.3.1	Spännvidd . . . . .	58
6.3.2	Krympning/förstoring av standardbågen . . . . .	59
6.3.3	Tvärsnittsbredd . . . . .	60
6.3.4	Tvärsnittshöjd . . . . .	61
6.3.5	Pilhöjd . . . . .	62
6.3.6	Träets styvhetsvärden . . . . .	63
6.4	Stabiliseringar vid jämnsymmetrisk belastning . . . . .	64
6.5	Stabiliseringar vid osymmetrisk belastning . . . . .	70
6.6	Jämförelse analytiska beräkningsmetoder och FEM . . . . .	74
6.7	Hur styv är en typisk anslutning? . . . . .	76
6.7.1	Styvhet hos takås . . . . .	76
6.7.2	Styvhet hos spikbeslag . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Hallbyggnad i Vikingstad</b>	<b>79</b>
7.1	Geometri, randvillkor och laster . . . . .	81
7.1.1	Geometri . . . . .	81
7.1.2	Randvillkor . . . . .	81
7.1.3	Laster . . . . .	82
7.2	FEM-modellen . . . . .	82
7.2.1	Elementindelning . . . . .	82
7.3	Linjär FEM-analys . . . . .	83
7.4	Statisk olinjär FEM-analys . . . . .	83
7.5	Slutsats . . . . .	85
<b>8</b>	<b>Slutsats</b>	<b>87</b>
<b>9</b>	<b>Förslag till fortsatt arbete</b>	<b>89</b>

# Kapitel 1

## Introduktion

### 1.1 Bakgrund

Limträbågar i konstruktioner med lång spännvidd har ofta ett rektangulärt tvärsnitt som är högt och tunt. För en båge med en spännvidd om ca 60 m kan tvärsnittet höjd typiskt vara 8-10 gånger dess höjd. Normalt stabiliseras dessa bågar med hjälp av takåsar eller takbeläggning som är fastsatta i bågens överkant, medan det i bågens underkant inte finns något stöd över huvud taget. Detta ger risk för instabilitet genom sidoutböjning av bågens underkant samt vridning av tvärsnittet. I dimensioneringsanvisningar som t.ex. Limträhandboken [5] menar man att anslutningen mot det sekundära bärverket eller takbeklädnaden är tillräcklig och att det räcker att kontrollera bågen för knäckning mellan två sidostabiliserade punkter. Dock kan det vara av intresse att i så fall kontrollera hur styv denna stabilisering måste vara. Även vippningsfenomenet är behandlat i Limträhandboken, men man förutsätter att anslutningarna mellan båge och sekundärbärverk eller takbeläggning är helt momentstyva vilket är väldigt komplicerat att få till i praktiken.

Särskilt tydlig blir risken för instabilitet då bågen utsätts för en osymmetrisk belastning, orsakad av t.ex. snölast. Vid en sådan belastning uppstår väldigt stora tryckspänningar i bågens ostagade underkant.

### 1.2 Syfte

Arbetet skall ge kunskap om instabilitet genom sidoutböjning eller vridning och om det finns risk för sådan instabilitet i typiskt utformade och belastade limträbågar. Målet är att komma fram till en rimlig och enkel metod för att beräkna eller uppskatta risken för instabilitet vid dimensionering av bågen. Arbetet bör ge instabilitetsanalysresultat för ett urval av bågar samt möjlighet att ungefärligt bedöma andra liknande bågar. Sammantaget ska detta ge en inblick i när sidostabilisering av bågens underkant behövs samt hur styva anslutningarna mot takbeklädnad eller sekundärbärverk behöver vara i bågens ovankant.

## 1.3 Metod

För ett urval av geometrier, lastfall och stabiliserande anslutningar kommer instabilitetsanalyser göras m.h.a. FEM-programmet Abaqus. Bågarna modelleras med balkelement och anslutningarna till anslutande konstruktionsdelar med fjädrar. Genom litteraturstudier samt eget utvecklingsarbete kommer vidare undersökas om det finns möjlighet att hitta någon förenklad analysmetod baserad på balkteori.

## 1.4 Avgränsningar

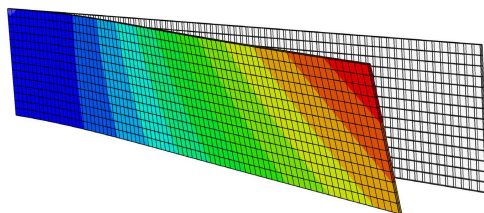
- Alla bågar är cirkelbågformade med en bestämd radie.
- Alla bågar är treledade, således behandlas ej momentstyvt inspända bågar.
- Flertalet studerade bågar har ett förhållande mellan pilhöjd och spännvidd ( $f/l$ ) på 0.20, dock undersöks pilhöjdens instabilitetspåverkan i ett avsnitt.
- Samma styvhetsegenskaper för trä används genom nästan hela rapporten, dock undersöks inverkan av styvhetsegenskaperna i en känslighetsanalys som görs för både raka och krökta balkar.
- Materialet har antagits vara linjärelastiskt och inverkan av långvarig belastning (krypning) och fuktvariation har inte studerats.
- Lastfördelningar från snölast anses vara helt plana enligt det som anges i BSV [2] och Limträhandboken [5].
- Vindlaster försummas, såväl tryckande som sugande.
- I stort sett endast linjära instabilitetsanalyser har utförts. Detta p.g.a. dess korta beräkningstid och enkla modellering jämfört med en geometriskt olinjär analys där inverkan av stora deformationer beaktas.
- Vid analys av limträbågar placeras lasterna i bågträsnittets tyngdpunkt och ingen lastexcentricitet beaktas.



# Kapitel 2

## Instabilitet

En balk av något slag som belastas vid plan böjning i sin styva riktning deformeras huvudsakligen i just belastningsplanet. Dock kan tvärsnittet i vissa fall vara så slankt att det vid belastning blir instabilt och istället böjer ut i sidled samt vrider sig, exempel figur 2.1. Fenomenet i fråga är det som kallas vippning och inträffar främst när styvheten i balkens veka riktning är liten jämfört med i den styva, i det omvända fallet förefaller risken mycket liten. För mycket slanka tvärsnitt kan detta instabilitetsfenomen uppkomma vid laster som ligger långt under balkens momentkapacitet m.h.t. brott i materialet vilket alltså gör det extremt viktigt att kontrollera detta. [16]



Figur 2.1: *Vippning av fast inspänd stålplåt utsatt för jämnt utbredd last i överkant (modellerad i Abaqus), rött = stor utböjning, blått = liten utböjning*

Vippning kan på många sätt liknas vid plan knäckning. Har man en teoretiskt perfekt balk som belastas med plan böjning fås inga deformationer i sidled förrän det kritiska momentet  $M_{crit}$  uppstår. Det kritiska momentet med hänsyn tagen till vippningsfenomenet beror förutom på böjstyvheten också på balkens vridstyvhet. [16]

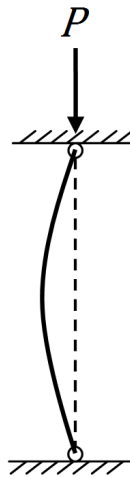
Det ska dock tilläggas att den s.k. fria vippningen som uppstår då man belastar en balk som inte på något sätt är fastsatt i någon annan konstruktionsdel är väldigt ovanlig. I det generella fallet är balken stagad på något sätt av sekundära konstruktioner som t.ex. takåsar eller beklädnadsplåt vilket då förhindrar snedställning samt till viss mån vridning av balken. Detta ställer dock krav även på de sekundära konstruktionerna, något som behandlas senare i rapporten.

## Vippning av träbalkar

Enligt elasticitetsteori är en fritt upplagd balk stabil för belastningar upp till ett visst kritiskt värde. Denna teori förutsätter dock att den obelastade balken är perfekt rak och inte böjer sig längs någon axel. Detta är p.g.a. träets komplexa struktur svårt att uppnå men enligt Hooley och Madsen [9] kan man med relativt god noggrannhet göra ett antagande att en limträbalk är rak så länge inga dominerande fel finns inom tvärsnittet. Provningsar visar att imperfektioner som inte är onormalt stora spelar liten roll för den slutliga kritiska lasten. Men det har också visat sig att lite större imperfektioner spelar stor roll på slutresultatet vilket har gjort att man begränsat initialimperfektionernas storlek till *spännvidden*/300. [9]

## 2.1 Raka balkar

### Eulers knäckningslast



Figur 2.2: Sträva belastad med centrisk punktlast

För en enskild sträva som är perfekt rak, gjord av elastiskt material och är centriskt belastad finns det ett teoretiskt värde för dess bärförmåga. Denna bärförmåga kallas knäckningslasten,  $P_{crit}$  och är den största last strävan kan utsättas för innan den knäcker ut i sin vecka riktning. Knäckningslasten är mycket beroende av de aktuella infästningsförhållandena som påverkar den s.k. teoretiska knäckningslängden. För en sträva ledad i båda ändarna utsatt för en centrisk punktlast (figur 2.2) gäller:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \quad (2.1)$$

där:

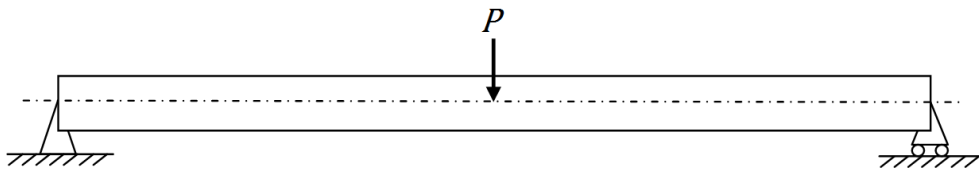
$E$  är elasticitetsmodulen i strävans längdriktning

$I_y$  Yttröghetsmomentet för böjning vinkelrätt planet enligt ekvation 2.6

$L$  är strävans längd

I figur 2.2 ovan motsvarar den teoretiska knäcklängden,  $l_c$  strävans längd eftersom att båda infästningspunkter är fritt ledade. Vid övriga infästningsförhållande är dock den teoretiska knäcklängden en annan. Värt att nämna är att knäcklängden är två gånger strävans längd då den är helt fast inspänd i sin ena ände och fri i sin andra samt halva strävans längd då den är fast inspänd i båda sina ändar.

### Vippling vid punktlast



Figur 2.3: *Balk belastad med punktlast*

Likvärdigt med knäckningslasten uppstår ett liknande fenomen när en balk med ett slant tvärsnitt belastas med en punktlast enligt figur 2.3. Vid ett visst värde på punktlasten,  $P_{crit}$  vippar balken ut i sin veka riktning. För en punktlast som på detta sätt angriper mitt på en fritt upplagd balk mellan två gaffellagrade stöd utan någon excentricitet gäller enligt Timoshenko och Gere [17] följande för den kritiska vipplingslasten:

$$P_{crit} = \frac{16.94\sqrt{EI_yGK_v}}{L^2} \quad (2.2)$$

Här finnes också att för små excentriciteter kan ett approximativt uttryck ges enligt följande:

$$P_{crit} = \frac{16.94\sqrt{EI_yGK_v}}{L^2} \left( 1 - \frac{1.74e}{L} \sqrt{\frac{EI_y}{GK_v}} \right) \quad (2.3)$$

där:

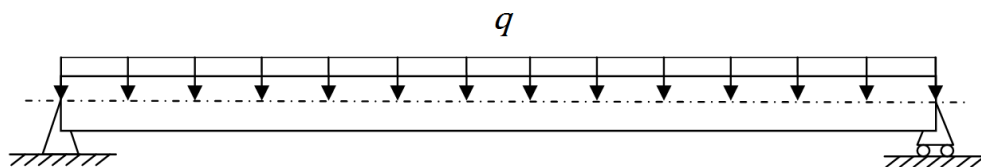
$G$  är skjuvmodulen

$K_v$  är en tvärsnittsfaktor enligt ekvation 2.7

$L$  är balkens längd

$e$  lastens excentricitet i höjddled

### Vippning vid jämnt utbredd last

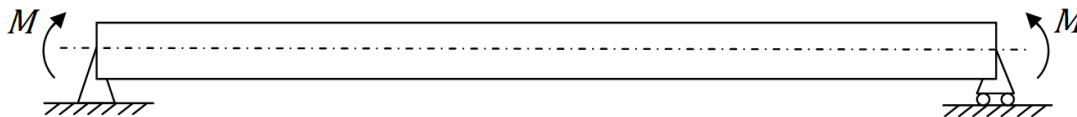


Figur 2.4: *Balk belastad med utbredd last*

För en jämnt utbredd centrisk placerad last som angriper en fritt upplagd balk mellan två gaffellagrade stöd gäller enligt Timoshenko och Gere [17] att den kritiska vippningslasten är:

$$q_{crit} = \frac{28.3 \sqrt{EI_y GK_v}}{L^3} \quad (2.4)$$

### Vippning vid konstant böjmoment



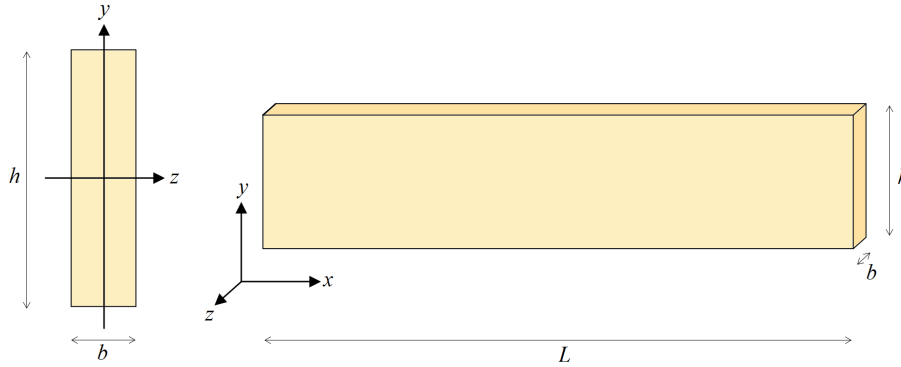
Figur 2.5: *Balk belastad med jämnt böjmoment*

För en fritt upplagd rak balk mellan två gaffellagrade stöd och belastad med ett konstant moment beräknas det kritiska vippningsmomentet,  $M_{crit}$  enligt följande:

$$M_{crit} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y \cdot GK_v} \quad (2.5)$$

### Tvärsnittsdata

Genom hela rapporten används samma hänvisningar gällande koordinataxlar och geometriska beteckningar enligt figur 2.6.



Figur 2.6: Axlar och tvärsnittsbeteckningar som används i rapporten

Yttröghetsmomentet för böjning vinkelrätt planet beräknas för tvärsnittet i figur 2.6 enligt:

$$I_y = \frac{b^3 h}{12} \quad (2.6)$$

$GK_v$  är balktvärsnittets vridstyvhet, jämförbart med  $EI$  och  $EA$  som är tvärsnittets böjstyvhet respektive drag-/tryckstyvhet. Vridstyvheten beror alltså på skjuvmodulen  $G$  samt tvärsnittsfaktorn  $K_v$ . Vridstyvhetens tvärsnittsfaktor för en slank balk med rektangulärt tvärsnitt beräknas enligt Limträhandboken [5] genom:

$$K_v = \frac{b^3 h}{3} \left(1 - 0.63 \frac{b}{h}\right) \quad (2.7)$$

Det linjära förhållandet mellan skjuvspänning och skjuvtöjning i ett material beskrivs skjuvmodul,  $G$ . För isotropa material kan sambandet mellan skjuvmodulen och elasticitetsmodulen  $E$  beskrivas enligt ekvation 2.8 nedan. Där  $\nu$  benämns tvärkontraktionstalet eller Poissons tal.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (2.8)$$

### 2.1.1 Limträhandboken

Slanka, raka balkar kan om de inte sidostabiliseras vippa ut om de utsätts för stora böjmoment, dessa moment kan vara långt lägre än böjbrottlasten och vippningssäkerheten måste därför beaktas. Detta görs genom att man multiplicerar den dimensionerande bärförmågan med en reduktionsfaktor för vippning,  $k_{crit}$ . Denna faktor bestäms enligt följande:

$$k_{crit} = \begin{cases} 1.0 & \text{för } \lambda_m \leq 0.75 \\ 1.56 - 0.75\lambda_m & \text{för } 0.75 < \lambda_m < 1.40 \\ 1/\lambda_m^2 & \text{för } 1.40 \leq \lambda_m \end{cases} \quad (2.9)$$

med slankhetstalet:

$$\lambda_m = \sqrt{\frac{f_m}{\sigma_{m,crit}}} = \sqrt{\frac{bh^2 f_m}{6M_{crit}}} \quad (2.10)$$

där:

$f_m$  är dimensionerande böjhållfasthet

$\sigma_m$  är maximal böjspänning

$M_{crit}$  är kritiskt vippningsmoment beräknat enligt elasticitetsteori (ekvation 2.5)

I de fall då balkens tryckta kant är stagad utav någon typ av sekundärkonstruktion som t.ex. takåsar beräknas det kritiska vippningsmomentet på samma sätt som i ekvation 2.5 förutom att man istället använder sig av längden mellan två sidostagade punkter. Även slankhetstalet förändras i detta fall och beskrivs:

$$\lambda_m = 0.07 \frac{\sqrt{L_e h}}{b} \quad (2.11)$$

där  $L_e$  är längden mellan två sidostagade punkter.

När balkens tryckta kant istället är stagad längs hela sin längd genom t.ex. takplåt anser man att ingen vippningsrisk förekommer och reduktionsfaktorn sätts till  $k_{crit} = 1.0$ .

## 2.1.2 Trækonstruktioner

Även i den danska boken Trækonstruktioner [12] reducerar man böjhållfastheten med en faktor  $k_{crit}$  som beräknas på samma sätt som i ekvation 2.9 eller 2.11 enligt Limträhandboken. Det nämns också att instabilitetsfenomenet kan avhjälpas om den tryckta kanten av balken stabiliseras på ett effektivt sätt.

Vid samtidigt moment och normalkraft ska för  $\lambda_{rel} \leq 0.75$  kravet enligt ekvation 2.12 uppfyllas.  $\lambda_{rel}$  betecknas det relativa slankhetstalet och beräknas enligt ekvation 2.13 för rektangulära tvärsnitt.

$$\frac{\sigma_c}{k_c f_c} + \frac{\sigma_m}{f_m} \leq 1 \quad (2.12)$$

$$\lambda_{rel} = \frac{\sqrt{12} \cdot l_c}{\pi h} \sqrt{\frac{f_c}{E}} \quad (2.13)$$

där:

$\sigma_c$  är normalspänning i aktuellt snitt

$k_c$  är reduktionsfaktor för knäckning

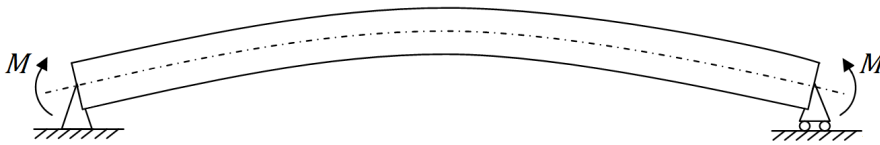
$f_c$  är dimensionerande tryckhållfasthet

För  $\lambda_{rel} \geq 0.75$  gäller istället:

$$\frac{\sigma_c}{k_c f_c} + \left( \frac{\sigma_m}{k_{crit} f_m} \right)^2 \leq 1 \quad (2.14)$$

Ekvation 2.12 och 2.14 ovan förutsätter instabilitet vinkelrätt balkens plan och beaktar inte knäckning i balkens plan.

## 2.2 Krökta balkar



Figur 2.7: Krökt balk belastad med jämnt böjmoment

För krökta balkar blir vippningsfenomenet däremot lite mer komplicerat och svårare att lösa analytiskt. Det finns dock ett analytiskt samband för knäckning vinkelrätt planet för en fritt upplagd krökt balk mellan två gaffellagrade stöd, utsatt för ett jämnt böjmoment. Detta är beskrivet av bland annat Walter D. Pilkey [15] och lyder:

$$M_{crit} = \frac{EI_y + GK_v}{2R} \pm \sqrt{\left( \frac{EI_y + GK_v}{2R} \right)^2 + \frac{EI_y GK_v}{R^2} \frac{\pi^2}{\psi^2}} \quad (2.15)$$

där:

$R$  är den krökta balkens radie

$\psi$  är vinkeln mellan den krökta balkens upplagspunkter

När  $R \rightarrow \infty$  får ekvation 2.15 utseendet enligt ekvation 2.5 som alltså gäller för raka balkar. Det gäller även att när  $\psi = \pi$ , d.v.s. bågen är en halvcirkel, så blir det kritiska momentet,  $M_{crit} = 0$ . Minustecknet i ekvation 2.15 gäller då bågens överkant är tryckt och är alltså ett allvarligare fall än om underkanten skulle vara det, förutsatt att ingen stabilisering finns.

### 2.2.1 Limträhandboken

I limträhandboken [5] väljer man att se limträbågen som ett statistiskt oföränderligt system, d.v.s. man räknar bara enligt första ordningens teori och reducerar dess hållfasthetsvärden med hjälp av slankhetsberoende faktorer. Dessa faktorer bestäms på samma sätt som slankhetsfaktorerna för en rak pelare som utsätts för både böjning och tryck. Dimensioneringskriteriet lyder:

$$\frac{\sigma_c}{k_c f_c} + \frac{\sigma_m}{k_{crit} f_m} \leq k_r \quad (2.16)$$

där:

$\sigma_c$  är tryckande normalkraft med utgångspunkt från hjässan

$k_c$  är en reduktionsfaktor som bestäms med hänsyn till risken för plan knäckning i eller vinkelrätt ramplanet

$f_c$  är dimensionerande tryckhållfasthet

$\sigma_m$  är böjspänning

$k_{crit}$  är en reduktionsfaktor som bestäms med hänsyn till vippningsrisk

$f_m$  är dimensionerande böjhållfasthet

$k_r$  är en faktor som bestäms med hänsyn till lamellkrökningen

Som beskrivet ovan bestäms faktorn  $k_c$  antingen med hänsyn till knäckning i eller vinkelrätt planet, dvs. om bågen anses helt stabiliserad i sidled blir istället knäckningen i planet aktuell att beakta. Denna bestäms på samma sätt som för en tryckt pelare med knäcklängden,  $l_c$  enligt följande:

$$l_c = 0.58 \cdot \sqrt{1 + 6 \left( \frac{f}{l} \right)^2} \quad (2.17)$$

där  $f$  är bågens pilhöjd, d.v.s. höjden från upplagspunkterna till centrum på hjässan, se figur 3.4 på sida 19.

Vad gäller knäckning vinkelrätt bågens plan bortser man helt från reduktionsfaktor i de fall då man har takbeklädnad längs hela bågens överkant. I de fall då man använder sig av takåsar eller liknande bestäms reduktionsfaktorn  $k_c$  på samma sätt som för en tryckt pelare med en knäcklängd lika med båglängden mellan två punkter förhindrade av sidoutböjning.



Reduktionsfaktorn med hänsyn till vippning,  $k_{crit}$  bestäms enligt ekvation 2.9 på sida 7.

För ett cirkulärt bågelement, upplagd på två gaffellagrade stöd och belastad med ett jämn moment kan vippningsmomentet beräknas enligt ekvation 2.18. Denna ekvation är snarlik Pilkeys ekvation 2.15 på sida 9.

$$M_{crit} = \frac{\pi}{s} \sqrt{EI_y \cdot GK_v} \pm \frac{EI_y + GK_v}{2R} \quad (2.18)$$

Där  $s$  är båglängden som beräknas enligt ekvation 3.7 på sida 20. Minustecknet i ekvation 2.18 gäller precis som i ekvation 2.15 när balkens överkant är tryckt och plustecknet när den är dragen.

I Limträhandboken kontrolleras alltså normalkraft och moment var för sig med antagande om att anslutningarna är tillräckligt styva och alltså medför s.k. gaffellagringar. Detta är dock ett väldigt optimistiskt antagande som kommer studeras senare i rapporten.

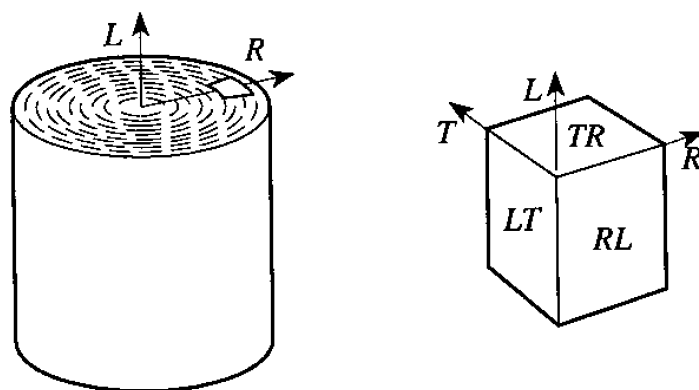


# Kapitel 3

## Trä, limträ och limträbågar

Trä som byggnadsmaterial har ett flertal användningsområde, det används som stomkonstruktion, golvbeläggning, beklädnad, skivmaterial m.m. Materialet produceras av naturen och har därför stora skiftningar p.g.a. olika träslag, fuktkvot och inte minst dess varierande egenskaper i sina olika riktningar. Träet har tre huvudriktningar enligt följande:

- Longitudinell riktning - stammens längdriktning/fiberriktning
- Radiell riktning - vinkelrätt årsringarna och fiberriktningen
- Tangentiell riktning - parallellt årsringarna, vinkelrätt fiberriktningen



Figur 3.1: Träets huvudriktningar och symmetriplan [10]

Som visat i figur 3.1 finns tre symmetriplan enligt följande:

- Longitudinell/Tangentiella planet
- Radiella/Longitudinella planet
- Tangentiella/Radiella planet

Trä har upp till sin sträckgräns ett linjärelastiskt beteende där det i linjära stadiet kan beskrivas med *Hookes lag* för linjäritet i en dimension enligt följande:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.1)$$

där:

$\sigma$  är spänningen

$E$  är elasticitetsmodulen

$\varepsilon$  är töjningen

På samma sätt kan en vidareutveckling av *Hookes lag* också användas för 3-dimensionella system, detta brukar kallas för *Hookes generaliserade lag*:

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon \quad (3.2)$$

där:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{26} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_{61} & D_{62} & \cdots & D_{66} \end{bmatrix}; \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Då trä har tre symmetriplan där alla anses parallella med koordinatplanen fås  $\mathbf{D}$ -matrisen enligt följande:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Vilket gäller för ett ortotropt material, vilket har nio oberoende koefficienter. Trä kan för enkelhetens skull anses ha lika egenskaper i dess radiella och tangentiella riktning vilket gör att  $\mathbf{D}$ -matrisen kan reduceras till:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{11} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{31} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(D_{11} - D_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Denna typ av material kallas transversellt isotropt och har alltså fem oberoende koefficienter [14].

### 3.1 Träets styvhetssegenskaper

Då trä är ett material med styvhetssegenskaper som kan variera mycket från prov till prov är det också svårt att besluta sig för vilka egenskaper man ska ge materialet vid analys. Berbom Dahl har i sin doktorsavhandling [6] från 2009 jämfört tabelldata från nio olika källor med olika styvhetsvärden för gran och kommit fram till ett medelvärde för materialets parametrar. Resultatet blev enligt följande med  $E$  och  $G$  angivet i MPa:

Tabell 3.1: Medelvärdet av materialdata för gran enligt Berbom Dahl [6]

$E_L$	$E_R$	$E_T$	$\nu_{LR}$	$\nu_{LT}$	$\nu_{RL}$	$\nu_{RT}$	$\nu_{TL}$	$\nu_{TR}$	$G_{RL}$	$G_{LT}$	$G_{TR}$
10991	716	435	0.42	0.48	0.05	0.50	0.03	0.28	682	693	49

Efter vidareutveckling av ekvation 3.2 samt 3.3 tillsammans med ekvation 3.5 kan man få fram en ekvation för de elastiska förhållandena för trä enligt följande:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_R \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{RL} \\ \gamma_{LT} \\ \gamma_{TR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{RL}}{E_R} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & -\frac{\nu_{TR}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{RT}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RL}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TR}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_R \\ \sigma_T \\ \tau_{RL} \\ \tau_{LT} \\ \tau_{TR} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

För trä antages ofta att:

$$\nu_{LR} = \nu_{LT} \quad , \quad \nu_{RT} = \nu_{TR} \quad , \quad \nu_{RL} = \nu_{TL}$$

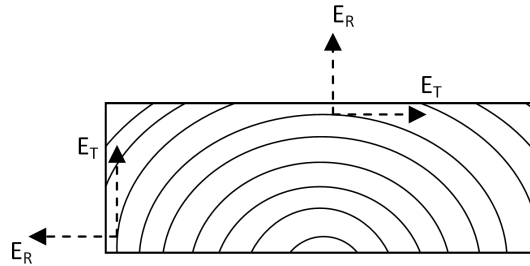
Utifrån kravet att styvhetsmatrisen i ekvation 3.6 måste vara symmetrisk fås vidare att:

$$\frac{\nu_{LR}}{E_L} = \frac{\nu_{RL}}{E_R} \quad , \quad \frac{\nu_{LT}}{E_L} = \frac{\nu_{TL}}{E_T} \quad , \quad \frac{\nu_{RT}}{E_R} = \frac{\nu_{TR}}{E_T}$$

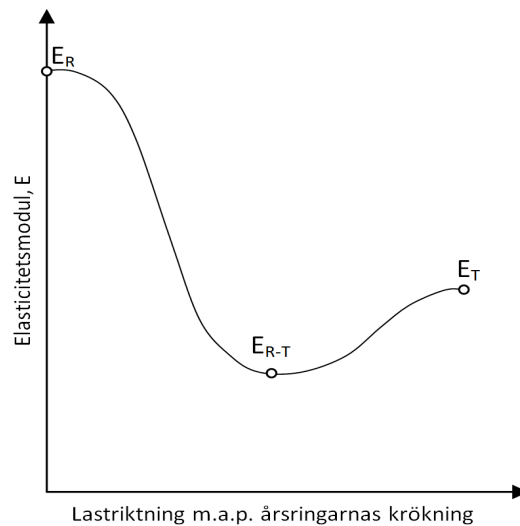
Utifrån dessa samband och givna värden på elasticitetsmodulerna kan således värden för de tre återstående tvärkontraktionstalen finnas.

P.g.a. träets något komplexa uppbyggnad med årsringar blir det ofta svårt att definiera i vilken vinkel belastningen kommer i det tangentiella/radiella planet (figur 3.2). Värdena för elasticitetsmodulerna är annorlunda för tangentiell respektive radiell riktning men i vinklar mellan dessa kan de vara ännu lägre enligt figur 3.3. Ett rimligt antagande som hamnar relativt bra på den säkra sidan är dock att använda

sig av den radiella elasticitetsmodulen för dem båda. D.v.s. att  $E_R = E_T$  i ekvation 3.6 ovan. Värdena för  $G_{RL}$  och  $G_{LT}$  kan också de förenklat sättas lika med varandra eftersom att dessa plan teoretiskt sett bör ha liknande skjuvmoduler.



Figur 3.2: Olika riktningar inom en träkropp



Figur 3.3: Elasticitetsmodulens variation m.a.p. belastningsriktning

I Boverkets Konstruktionsregler (BKR) [3] har man endast föreskrivit Elasticitetsmodulerna i virkets fiberriktning samt en som kan liknas vid ett viktat värde av elasticitetsmodulerna mellan den radiella och tangentiella riktningen. Man har också angivit skjuvmodulen i tvärsnittets plan. I rapporten har det som Boverket benämner styvhetsvärden för deformationsberäkningar använts som grundvärden eftersom att dessa ansågs spegla verkligheten mest korrekt. Styvhetsvärdena för deformationsberäkningar grundar sig på medelvärden av de styvheter som tagits fram vid materialprover. Vid vanliga brottberäkningar används dock ofta det som benämns styvhetsvärden för styrkeberäkningar, dessa värden motsvarar 5%-fraktilen vid framtagning av värden ur materialprover. Det ska alltså beaktas att ganska höga styvhetsvärden använts i rapporten men då instabilitetslasterna visar sig vara linjära mot styvhetsvärden blir indata enkel att justera.

Tabell 3.2: *Karakteristiska styvhetsvärden för deformationsberäkningar av L40 enligt BKR [4]*

$E_L$	$E_{R/T}$	$G_{RL}$
13 000 MPa	450 MPa	850 MPa

För att i rapporten använda sig av rimliga styvhetsvärden utöver de som beskrivs i tabell 3.2 ovan ligger det då nära till hands att knyta samman Boverkets styvhetsvärden med förhållandena i ekvation 3.6 samt medelvärden enligt Berbom Dahl [6]. Som elasticitetsmoduler används rakt av Boverkets värden. Den tangentiella samt radiella elasticitetsmodulen sätts alltså till samma eftersom att det är svårt att särskilja dem. Även Boverkets skjuvmodul verkar ha ett rimligt värde och används för de två planen parallella med fiberriktningen. Skjuvmodulen vinkelrätt fiberriktningen kan approximativt sättas till 60 MPa utifrån förhållandet mellan Berbom Dahls styvhetsvärden och Boverkets. Ur tabell 3.1 kan man välja tvärkontraktionstalen  $\nu_{LR} = \nu_{LT}=0.45$  och  $\nu_{RT} = \nu_{TR}=0.40$  och således med hjälp av ekvation 3.6 få att  $\nu_{RL} = \nu_{TL}=0.015$ . Sammanfattningsvis fås alltså styvhetsvärde för limträvirke av gran, L40 enligt tabell 3.3 nedan. Dessa värden används vid samtliga beräkningar i rapporten.

Tabell 3.3: *Styvhetsvärden för L40 med  $E$  och  $G$  angivet i MPa*

$E_L$	$E_R$	$E_T$	$\nu_{LR}$	$\nu_{RT}$	$\nu_{RL}$	$G_{RL}$	$G_{LT}$	$G_{TR}$
13 000	450	450	0.45	0.40	0.015	850	850	60

## 3.2 Limträ

Limträtekniken kom till Sverige i början av 1900-talet men fick inte sitt ordentliga genombrott i byggbranschen förrän en bit in på 1960-talet. Idag produceras runt 30 000 m<sup>3</sup> limträvirke per år i Sverige där större delen av detta går till husbyggnadssektorn. Limträet har tack vare goda limningstekniker i kombination med goda hållfasthetsegenskaper och en låg vikt fått ett stort genomslag. Övriga fördelar som kan nämnas är ett tilltalande utseende, högt brandmotstånd och goda värmeisolerande egenskaper.[5]

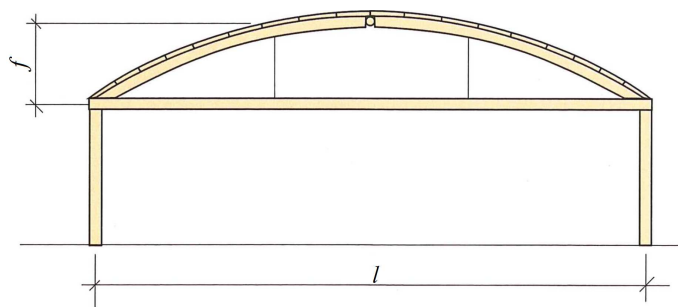
Limträelementen är uppbyggda av lameller av konstruktionsvirke som limmats och fingerskarvats ihop. Denna teknik möjliggör att väldigt stora konstruktionselement kan skapas. P.g.a. dess uppbyggnad fås väldigt goda styvhetssegenskaper och dess styrka i förhållande till egenvikten är till och med högre än för stål.[5]



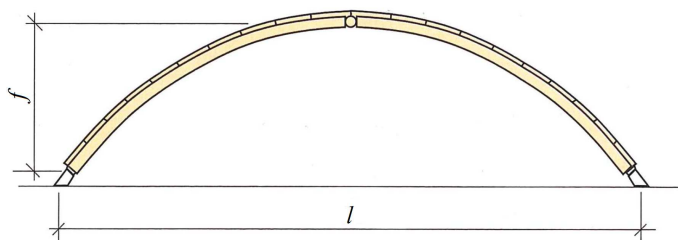
### 3.3 Limträbågar

Limträ kan framställas i olika former och storlekar, och är väl lämpat för bågkonstruktioner. Vanligtvis utförs dessa bågkonstruktioner av massiva rektangulära tvärsnitt men även I-tvärsnitt och lådtvärsnitt används. [5]

Bågens form väljs ofta så att momenten blir så små som möjligt vilket också medför att bågens tvärsnittsmått blir litet jämfört med en rak balk med samma spännvidd. Det är dock omöjligt att kringgå stora moment i bågen eftersom att olika lastfördelningar ger stora skillnader i momentfördelning. Oftast väljs parabel- eller cirkelform för bågarna men även elliptisk eller andra former kan förekomma där det behövs. För att uppta de horisontella lasterna som uppkommer vid belastning av en båge utförs de ofta med ett dragband vid upplag på pelare eller med markfundament då de står direkt på marken, se figur 3.4(a) och 3.4(b). Vanligast förekommande är att bågarna utförs med 3 leder, d.v.s. ledad vid upplag samt i nock. Dock förekommer det även bågar som är utförda helt momentstyva [5].



(a) Båge med dragband



(b) Båge med markfundament

Figur 3.4: Två lösningar för limträkonstruktioner med bågar [5]

### 3.3.1 Geometri

Båglängden,  $s$  för en cirkelbåge med spännvidden,  $l$  och pilhöjden,  $f$  (se figur 3.4) är enligt Limträhandboken [5]:

$$s = 2f \cdot \left( 1 + \left( \frac{l}{2f} \right)^2 \right) \frac{\pi}{360} \arcsin \left( \frac{\frac{l}{f}}{1 + \left( \frac{l}{2f} \right)^2} \right) \quad (3.7)$$

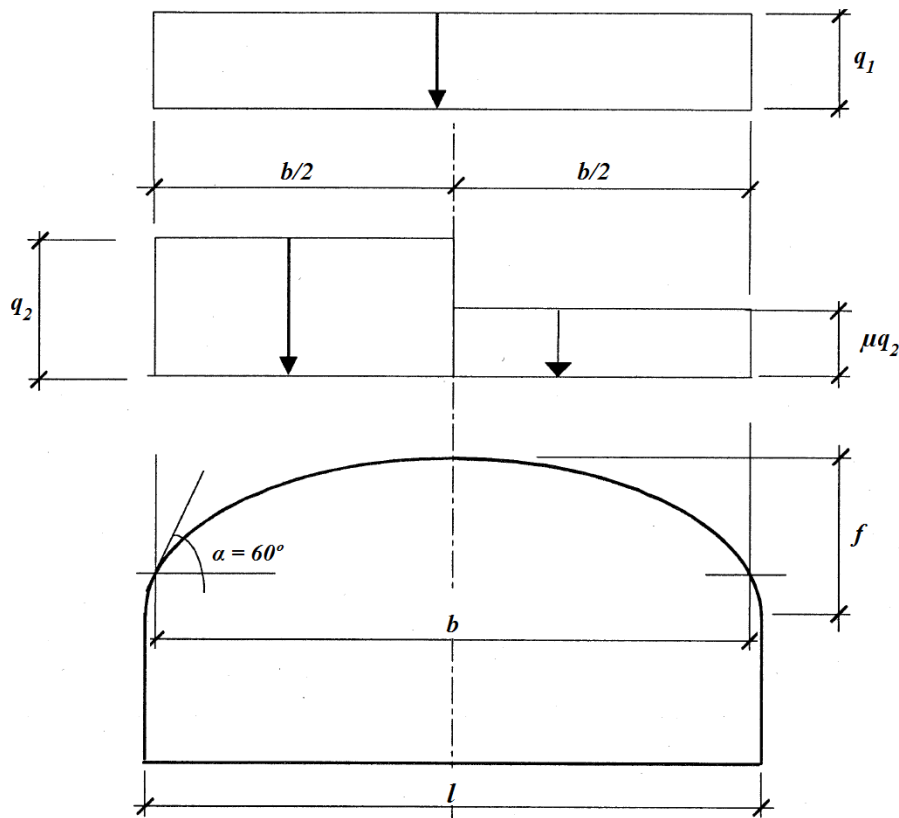
Vilket för en båge med förhållandet  $f/l = 0.20$  ger  $s = 1.10347 \cdot l$

Radien kan på motsvarande sätt beräknas ur [5]:

$$R = \frac{l^2}{8f} + \frac{f}{2} \quad (3.8)$$

### 3.3.2 Laster

Enligt BSV [2] finns det två snölastfall för en båge. I det ena fallet anses lasten vara helt jämsymmetriskt fördelad över hela bågen medan den i det andra fallet är större på den ena båghalvan enligt figur 3.5. I båda fallen infaller lasten helt vertikalt. Även vindlaster spelar viss roll för bågar eftersom att det vid blåst uppstår tryckande eller dragande krafter vinkelrätt bågens verkningslinje, dessa beaktas dock inte i denna rapport.

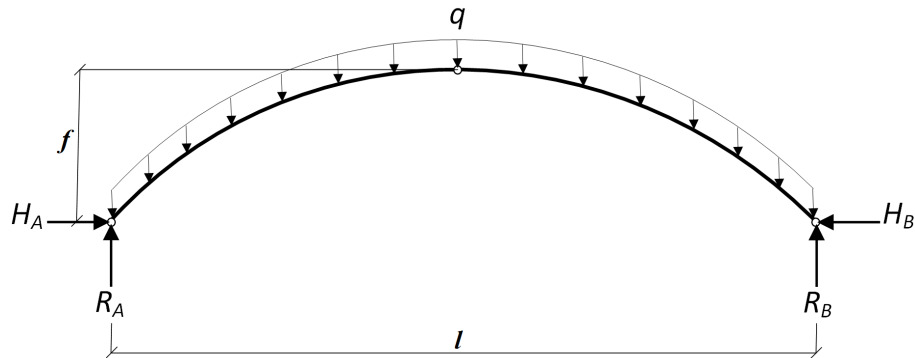


Figur 3.5: Lastfall för snölast på bågtak [2]

Som visas i figur 3.5 anses att taklutningar över  $60^\circ$  inte har någon last ifrån snö eftersom att den här inte blir kvarliggande. Enligt BSV [2] är formfaktorn  $\mu = 0.5$ , dock studeras i denna rapport även inverkan av en större eller mindre formfaktor ur stabilitetssynpunkt. I övrigt gäller att  $q_1 = 0.8 \cdot s_0$  och  $q_2 = (0.8 + 2f/b)s_0$  dock  $0.8 + 2f/b \leq 1.3$  där  $s_0$  är snölastens grundvärde på mark. Lasten i den ena båghalvan blir alltså större vid en ojämn lastfördelning än vid en jämn.

### 3.3.3 Snittkrafter och upplagsreaktioner

För att ta fram de moment och normalkrafter som en båge utsätts för är det lämpligt att använda sig av någon form av mjukvara som t.ex. Ramanalys eller likvärdigt. Relativt enkelt kan man dock få fram intressanta snittkrafter med analytiska metoder vid enklare lastfördelningar. De maximala snittkrafterna för de två aktuella lastfallen enligt BSV [2] behandlas på nästkommande sida. Dessa gäller för tredelade cirkelbågar med  $0.14 < f/l < 0.20$  och är endast användbara vid överslagsberäkningar [5].



Figur 3.6: Beteckningar vid beräkning av snittkrafter och upplagsreaktioner

### Jämnt fördelad last

Vertikal upplagsreaktion:

$$R_A = R_B = \frac{q_1 l}{2} \quad (3.9)$$

Horisontell upplagsreaktion:

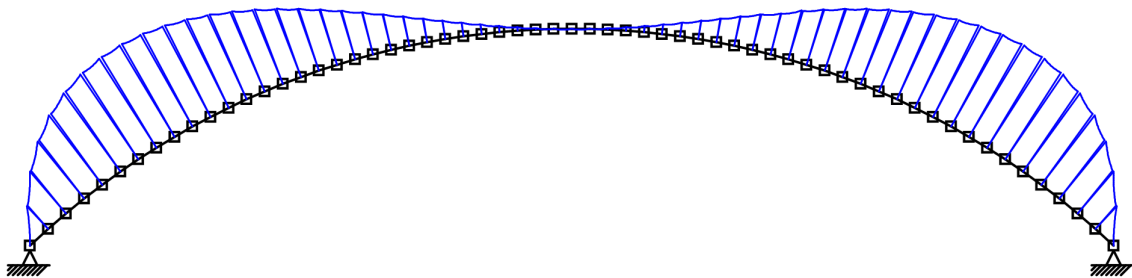
$$H_A = H_B = \frac{q_1 l^2}{8f} \quad (3.10)$$

Maximal normalkraft:

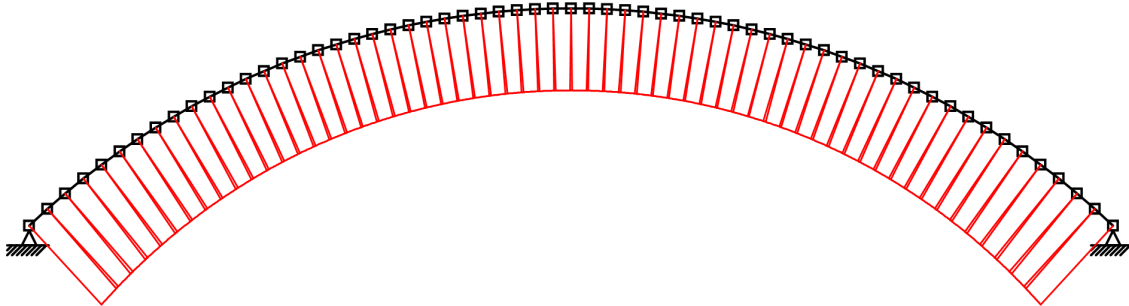
$$N_{max} = \sqrt{R^2 + H^2} \quad (3.11)$$

Maximalt moment:

$$M_{max} = \frac{q_1 f^2}{11} \quad (3.12)$$



Figur 3.7: Momentfördelning vid jämn last



Figur 3.8: Normalkraftsfördelning vid jämn last

Figur 3.7 och 3.8 ovan visar moment- och normalkraftsfördelningen för en båge med spännvidden,  $l = 60$  m och pillhöjden,  $f = 12$  m utsatt för en utbredd last på  $q_1 = 10$  kN/m. För denna geometri och lastfördelning uppstår det maximala momentet vid ungefär  $x = 0.15l$  och uppgår till ca 130 kNm, detta moment skapar tryck i bågens underkant och drag i dess överkant. Dock blir överkanten sammantaget tryckt eftersom att normalkraften också den medför tryck. Normalkrafterna är relativt jämnt fördelade över tvärsnittet men en viss variation finns, vid stöd uppgår de till ca 505 kN och till 395 kN i nock.

### Ojämnt fördelad last, $\mu = 0.5$

Vertikal upplagsreaktion:

$$R_A = \frac{7q_2l}{16} \quad (3.13)$$

$$R_B = \frac{5q_2l}{16} \quad (3.14)$$

Horisontell upplagsreaktion:

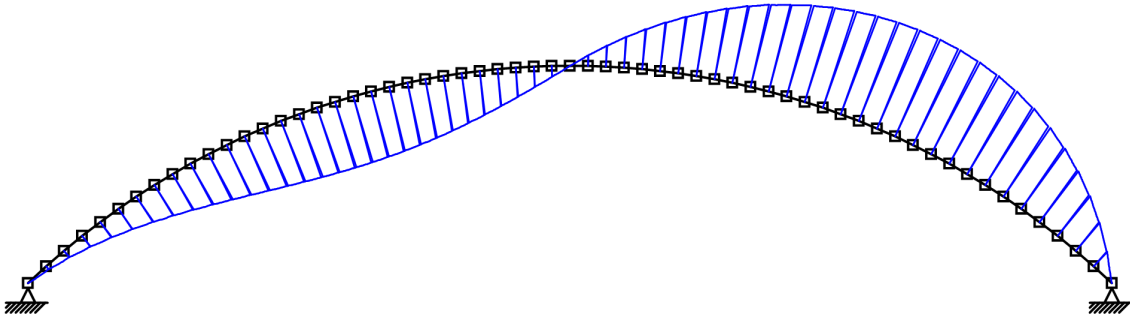
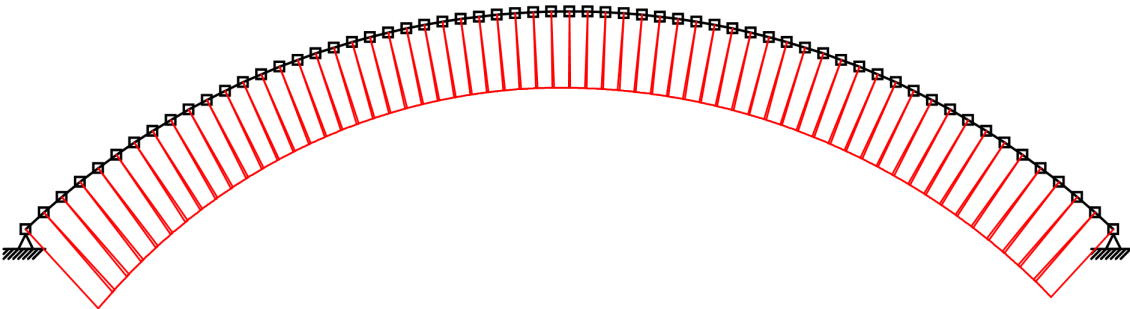
$$H_A = H_B = \frac{3q_2l^2}{32f} \quad (3.15)$$

Maximalt moment (för  $x = 0.25l$ ) Observera att detta beskriver momentet i den båghalva med den dubbla lasten och alltså det moment som ger drag i bågens underkant. Momentet i motsatt båghalva blir oftast högre:

$$M_{max} = \frac{q_2l^2}{128} \quad (3.16)$$

Tillhörande normalkraft (för  $x = 0.25l$ ):

$$N_{max} = H \sqrt{1 + \left(\frac{2f}{l}\right)^2} \quad (3.17)$$

Figur 3.9: *Momentfördelning vid ojämn last*Figur 3.10: *Normalkraftsfördelning vid ojämn last*

Figur 3.9 och 3.10 ovan visar moment- och normalkraftsfördelningen för en båge med spännvidden,  $l = 60$  m och pilhöjden  $f = 12$  m utsatt för en ojämnt fördelad utbredd last. Den vänstra båghalvan belastas med en last på  $q = 10$  kN/m medan den högra belastas med halva denna, d.v.s. formfaktorn är  $\mu = 0.5$ . Som kan ses i figur 3.9 blir momentfördelningen för denna lastfördelning väldigt annorlunda jämfört med då en helt jämn lastfördelning användes. Det uppstår ett mycket större moment i den högra båghalvan än vid en jämn belastning. Något som också måste beaktas är att det även uppstår ett motsatt moment som nu istället ger tryck i bågens överkant. Det maximala momentet som uppstår i den vänstra båghalvan uppstår ungefär vid  $x = 0.3l$  och uppgår till ca 245 kNm. I den högra båghalvan uppgår momentet vid  $x = 0.8l$  till ca 380 kNm, d.v.s. nästan tre gånger så stort som vid en helt jämn lastfördelning. Normalkrafterna blir som störst i det vänstra stödet där de uppgår till ca 415 kN, i det högra stödet är de ca 355 kN och i mitten 295 kN. Slutsatsen för detta blir alltså att momenten ökar markant vid en ojämn lastfördelning medan normalkrafterna förblir ungefär de samma.

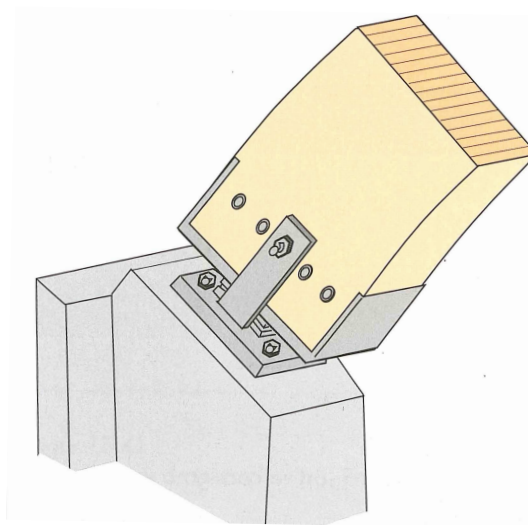
### 3.3.4 Anslutningsdetaljer

Hur anslutningarna i limträbågen utformas kan ha stor betydelse för hur stabil bågen blir. Som nämnts tidigare kommer enbart 3-ledade bågar att studeras här.

Utformningen av dessa leder är ganska lika från fall till fall. Däremot kan anslutningarna mot sekundärbärverk i form av takåsar eller liknande variera stort, både takåsarnas utformning och beslagen som de hålls fast med. Detta kan ha väldigt stor inverkan på instabilitetslasten, något som kommer att hanteras senare i rapporten.

### Anslutning i bågfoot

För limträbågar med stora spännvidder är kraven väldigt stora på infästningen vid bågfooten. Beslaget i figur 3.11 är den vanligaste typen av anslutning som används mot fundament och är väl anpassat att användas i utomhusmiljö. Detta beslag medför en helt och hållet momentfri led vilket är gynnsamt för limträtvärsnittet. Beslaget dimensioneras för normal- och tvärkrafter, för beskrivning av detta hänvisas till Limträhandboken [5]. Vid modellering i Abaqus anses beslaget även vara ledat för böjning av bågen vinkelrätt planet. Detta för att det inte är dimensionerat att ta stora moment i denna riktning. Dock anses beslaget vara låst för rotationer runt bågens längdaxel för att förhindra stelkroppsrörelser då inga andra låsningar finns vinkelrätt bågens plan.

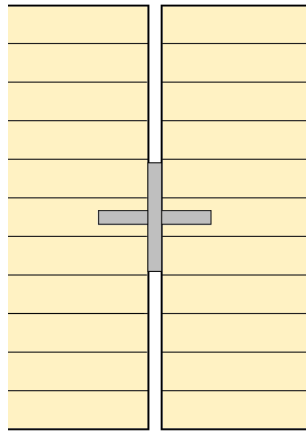


Figur 3.11: *Principskiss för fotbeslag med vipplager* [5]

### Anslutning i nock

Nockanslutningar utförs i vanliga fall främst av spikningsplåtar som placeras på vardera sida om skarven. Dock blir tvärkraften så pass stor för bågar med stora spännvidder att det är opraktiskt att använda sig av enbart denna metod eftersom att det då ställer stora krav på plåttvärsnittet och spikinfästningarna. En lösning på detta problem är att man placerar någon typ av mellanlägg i bågarnas centrumlinje, mellan de båda båghalvorna och låter dessa samverka med spikningsplåtarna. Detta mellanlägg kan framställas på en rad olika sätt, t.ex. genom en bit I-balk eller hopsvetsade plattstänger som i figur 3.12. Mellanlägget anses vid detta utförande

uppta hela tvärkraften samtidigt som spikningsplåtarna dimensioneras för de horisontella dragkrafterna. Vid en sådan lösning överförs bara begränsat med moment som kan försummas vid beräkningar. Vid instabilitetsanalys kan man i värsta fallet också anse att anslutningen är ledad för rotationer runt tvärsnittets y-axel eftersom att spikningsplåtarna enbart dimensioneras för normalkrafter uppkomna i balkens plan. Inga rotationskillnader runt bågens längdaxel anses dock kunna ske mellan båghalvorna.

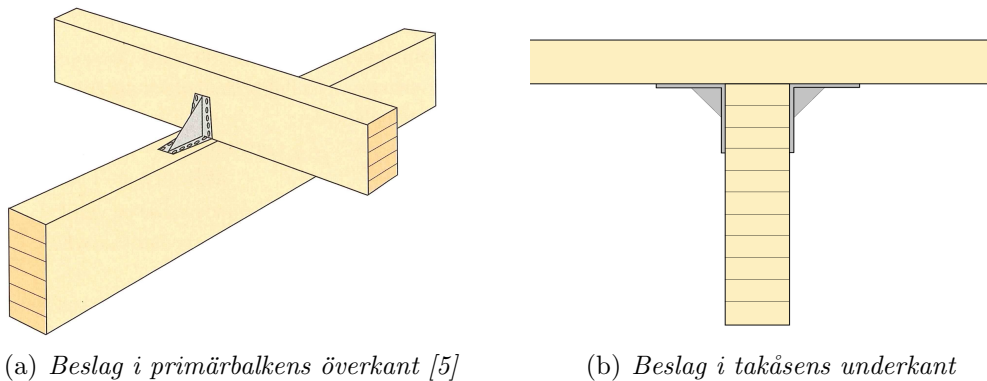


Figur 3.12: *Principskiss förnockbeslag med mellanlägg av plattstänger*

### Anslutning mot takåsar eller ytbeklädnad

För anslutning av takåsar mot primärbalkar finns en rad olika alternativ. De vanligaste är anslutning med vinkelbeslag (figur 3.13), eller så kallade takåsbeslag. Anslutningar av denna typ placeras ofta på vardera sida om takåsen för ökad stabilitet. Beslagen överför krafter huvudsakligen genom kontakttryck och med hjälp av beslagsspik, s.k. kamspik. En alternativ placering av vinkelbeslagen är att de placeras på undersidan av takåsen samt på sidan av primärbalken vilket ger en bättre momentstyvhet i anslutningen vilket kan vara önskvärt, se figur 3.13(b). Viktigast är dock att anslutningen medför en god stabilisering för primärbalken vinkelrätt bågens plan, d.v.s. att anslutningen och takåsarna är tillräckligt styva att klara av de sidolaster som uppstår, detta behandlas vidare senare i rapporten. Ytterligare ett antal takåsanslutningar värda att nämna är inlimmad bult, balksko eller skråspikning/skråskruvning som innebär att man spikar eller skruvar snett från vardera sida i takåsen ner i primärbalken. Ingen av de senare nämnda alternativen har dock god momentstyvhet utan medför enbart stabilisering vinkelrätt bågens plan.

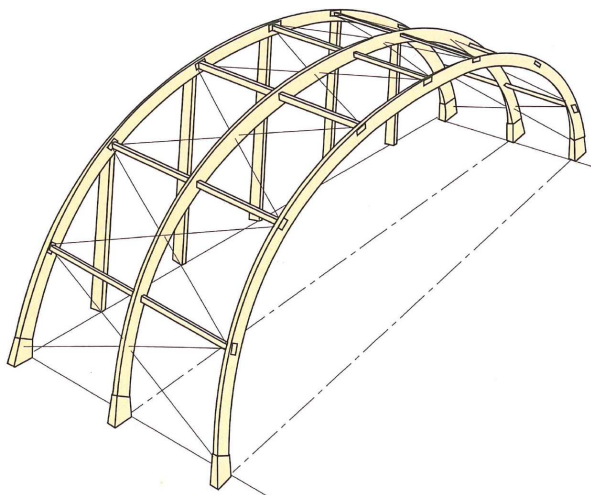




Figur 3.13: Takåsinfästningar med vinkelbeslag

### 3.3.5 Stomstabilisering av byggnad med limträbågar

För en byggnadsstomme räcker det inte att kontrollera stabiliteten hos enstaka element utan även stommens totalstabilitet är viktig. Om man förutsätter sidostabilisering av den enskilda bågens överkant måste givetvis denna sidostabilisering på något sätt vara sammanknuten med något stabiliserande element. För mindre limträbågar ger ofta takbeklädnaden tillräcklig stabilisering, men för större konstruktioner är det nödvändigt att komplettera med ytterligare stabiliseringar. I konstruktioner med raka element kan denna stabilisering fås med hjälp av momentstyva anslutningar eller krysstag. För limträbågar är det svårt att utföra momentstyva anslutningar och därför är stabilisering m.h.a. krysstag dominerande. Dessa krysstag utförs ofta av rundstål. Ett exempel på stabilisering m.h.a. krysstag visas i figur 3.14: Rundstålen tar dragkrafter och sekundärbalkarna mellan bågarna tar främst tryckkrafter.



Figur 3.14: Totalstabilisering av bågkonstruktion

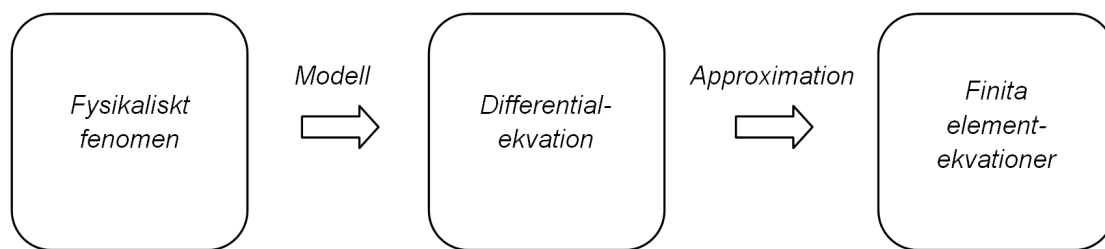


# Kapitel 4

## Finita elementmetoden och Abaqus

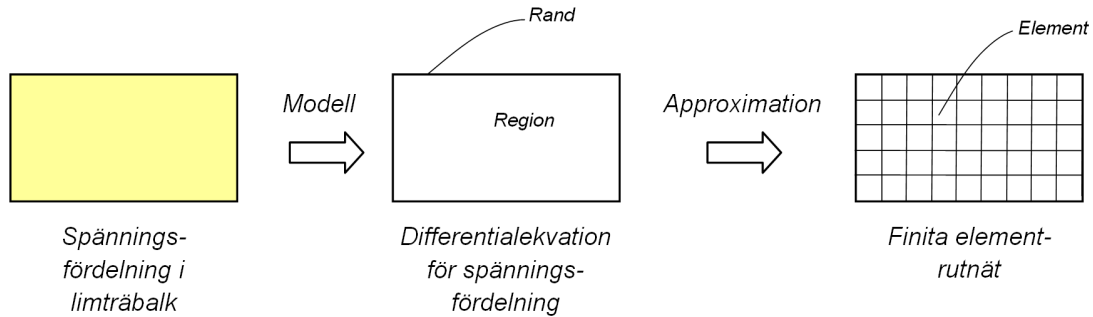
### 4.1 Finita elementmetoden

Flertalet fysikaliska fenomen som uppstår i mekanikens värld kan beskrivas med hjälp av differentialekvationer. Dock är problemen ofta av en sådan omfattning att ekvationerna blir för avancerade för att kunna lösas med analytiska metoder. Finita elementmetoden är en numerisk approximativ metod att lösa differentialekvationer. En enkel bild av hur detta fungerar visas i figur 4.1.



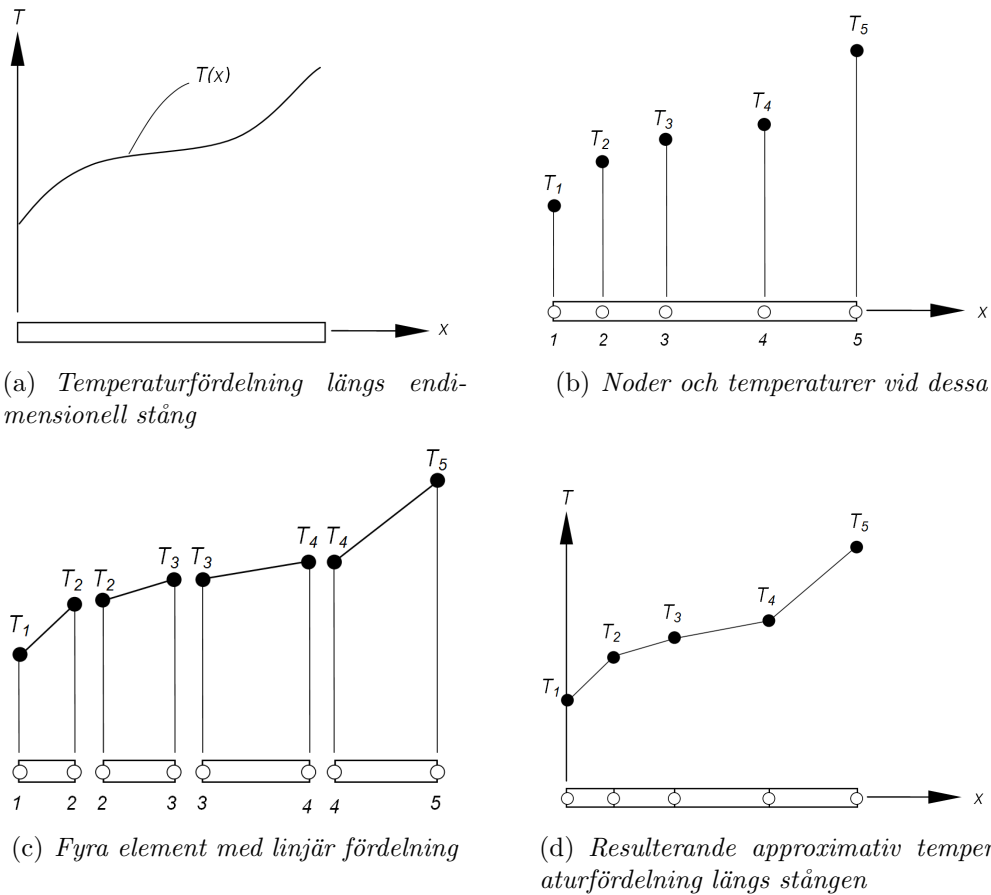
Figur 4.1: *Steg vid analys av problem inom mekaniken*

Ekvationerna som sätts upp gäller för en viss region som i sin tur kan vara antingen en-, två- eller tredimensionell. Det som kännetecknar Finita elementmetoden är att regionen delas upp i mindre delar, s.k. finita element varpå approximationer görs för vardera element. När det är bestämt vilken typ av approximation som ska göras kan motsvarande beteende för varje element bestämmas varpå elementen sammanfogas till en fullständig region. En sådan samling av element kallas i sin tur för ett elementnät. Med hjälp av detta kan man alltså således få fram en lösning för beteendet för hela regionen, se figur 4.2.



Figur 4.2: Princip för modelleringsstegen

Ett bra och förenklat exempel på hur approximeringen som används i Finita elementmetoden fungerar syns i figur 4.3(a)-4.3(d). Anta att man har en känd temperaturfördelning,  $T(x)$  längs en stång enligt figur 4.3(a) och att man känner till temperaturen i fem punkter längs denna stång enligt figur 4.3(b). Man kan då dela upp stången i fyra stycken element med vardera två noder och anta att temperaturen varierar linjärt över respektive element enligt figur 4.3(c). När dessa element sedan sammanfogas fås en approximativ temperaturfördelning enligt figur 4.3(d). Detta är alltså ett väldigt enkelt exempel på hur Finita elementmetoden kan användas eftersom att det gäller ett endimensionellt system som fördelats linjärt. Problemet hade även kunnat ges en kvadratisk fördelning över respektive element och på så vis få en bättre överensstämmelse med verkligheten. Desto fler noder och element som används, desto närmre verkligheten kommer man.



Figur 4.3: *Exempel på approximeringar som görs med FEM*

### 4.1.1 Egenvärdesanalys

För att på ett enkelt sätt bestämma instabilitetslaster har möjligheten till egenvärdesanalyser i det Finita elementbaserade datorprogrammet Abaqus använts. En egenvärdesanalys innebär kortfattat beräkning av den last som medför att strukturens styvhetsmatris blir singular. Beräkningen ger instabilitetslasten samt deformationsmönstret vid instabiliteten. Metoden förutsätter att de deformationer som föregår instabiliteten är små. I Abaqus ges en faktor,  $\lambda_i$  som den pålagda lasten måste multipliceras med för att få reda på den korrekta instabilitetslasten. Beräkningsmässigt beskrivs egenvärdesproblemet med följande ekvation 4.1 [1]:

$$(K_0^{NM} + \lambda_i K_{\Delta}^{NM}) v_i^M = 0 \quad (4.1)$$

där:

- $K_0^{NM}$  är styvhetsmatrisen m.a.p. förstadiet och inkluderar eventuella förbelastningar,  $P^N$
- $K_{\Delta}^{NM}$  är styvhetsmatrisen för last och spänning m.a.p. på det stegrande lastmönstret i egenvärdesanalysen,  $Q^N$
- $\lambda_i$  är egenvärdena
- $v_i^M$  är instabilitetsmoderna/egenvektorn
- $M \& N$  refererar till frihetsgrader för hela modellen
- $i$  refererar till vilken instabilitetsmod det handlar om

Vid ett visst värde på  $\lambda_i$  och  $v_i^M$  blir tangentstyvheten lika med noll och ingen lastökning krävs för att öka deformationen, man har alltså funnit en lösning på egenvärdesproblemet. Oftast är endast den lägsta instabilitetsmoden intressant eftersom att denna inträffar vid lägst last. Den totala kritiska lasten kan skrivas:

$$P_{cr} = P^N + \lambda_i Q^N \quad (4.2)$$

### 4.1.2 Statisk olinjär analys

I en olinjär analys av en struktur tar man hänsyn till de olinjära geometriska eller materiella effekterna. Det huvudsakliga antagandet som görs är att deformationerna är begränsade men inte nödvändigtvis små samt att jämvikt krävs med avseende på den deformerade geometrin. Således kan den olinjära analysen ske på dels fasta och flexibla system.[7]

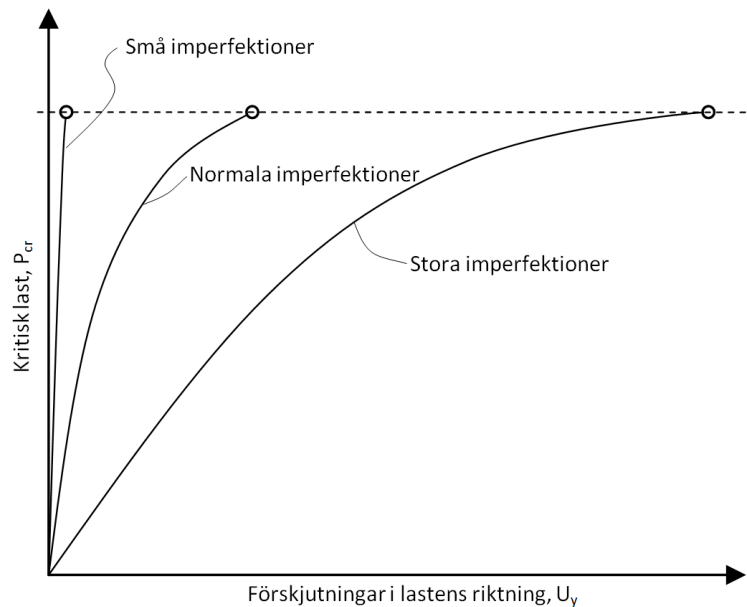
Vid en statisk analys i t.ex. Abaqus belastas den aktuella strukturen med en ökande last fram tills dess att strukturen inte kan ta en högre last trots ökande deformation. Själva processen är mycket beroende av vilken lösningsprocedur som används samt laststegens storlek. För att vara på den säkra sidan med resultatet man får ut vid en olinjär analys är det rekommenderat att även en linjär instabilitetsanalys körs på den fullt belastade strukturen.

### Imperfektioner

Vid en statisk olinjär analys måste någon typ av geometrisk imperfektion läggas in i modellen för att instabilitetslaster ska hittas. Det smidigaste sättet att vid en FEM-analys behandla detta är genom att man i ett initieellt skede utsätter geometrin för en sidolast som medför en deformation motsvarande den aktuella imperfektionen.

Enligt tidigare är det vid limträkonstruktioner ofta aktuellt att beakta en imperfektion på  $l/300$  [5]. Vid aktuell analys utsätts alltså geometrin för en punktlast som motsvarar denna förskjutning vinkelrätt planet i en viss punkt. Den deformerade geometrin används sedan för att göra en andra analys där lasterna som balken verkligen utsätts för används.

Hur stora imperfektionerna är har ingen större betydelse för den slutgiltiga instabilitetslasten så länge de ligger i ett rimligt intervall, dock ser utböjningsformerna något annorlunda ut beroende av dess storlek, vid stora imperfektioner kan stora förskjutningar i lastens riktning ske innan instabilitet inträffar och tvärt om. Detta beteende visas i figur 4.4



Figur 4.4: Imperfektionernas inverkan på godtycklig balk

## 4.2 Abaqus

I rapporten har programvaran Abaqus från *Dassault Systems* använts för lösning av FEM-problem. Abaqus är i sin tur uppbyggt av fyra kärnprodukter vid namn Abaqus/CAE (Computer-Aided Engineering), Abaqus/CFD (Computational Fluid Dynamics), Abaqus/Explicit och Abaqus/Standard. Abaqus/CAE är programvaran som används för modelleringen av problemet varpå Abaqus/Standard används för att beräkna problemet med ett traditionellt integrationssystem för lösning av Finita elementproblem. Abaqus/Standard lämpar sig bäst för statiska, låghastighets- eller dynamiska analyser medan Abaqus/Explicit främst används för höghastighets-, olinjära och transienta analyser.

Användningsområdet för Abaqus är väldigt brett, framför allt används det inom bil-, flyg och produktindustrin men har i princip inga begränsningar då det har en otrolig kapacitet. Främst i form av många olika materialmodeller och möjligheten att anpassas till respektive användares önskemål.

### 4.2.1 Elementtyper

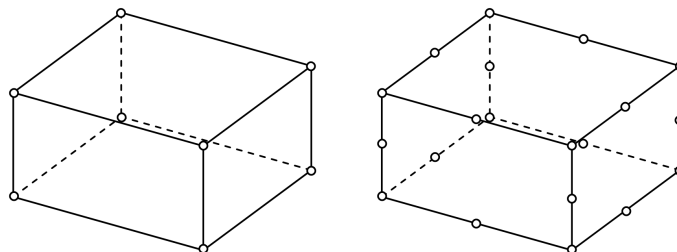
För alla elementtyper väljs vid analyserna i denna rapport kvadratisk förskjutningsansats. Anledningen till det är att de linjära elementen är styvare än de kvadratiska och därför ger sämre noggrannhet. En kontroll i Abaqus gjordes för knäckning av en pelare där resultatet från en körning med 2000 linjära solidelement samt en med 2000 kvadratiska solidelement jämfördes med en analytisk lösning. Resultatet kan ses i tabell 4.1 nedan vilket tydligt visar att element med kvadratisk fördelning är mer användbart vid instabilitetsanalys. *Error* beskriver den procentuella skillnaden mellan analytisk lösning och resultat vid användning av respektive element.

Tabell 4.1: Jämförelse mellan solidelement med linjär och kvadratisk fördelning

Elementtyp	<i>Error</i>
Linjära	-24.68%
Kvadratiska	+0.019%

### 3D solidelement

3D solidelement är en tredimensionell åttahörning ofta formad som ett rätblock. Elementen består av antingen 8 eller 20 noder (se figur 4.5) beroende på om de är linjär eller kvadratisk fördelning. Vid användning av solidelement i Abaqus används det element som av benämns C3D20R, alltså ett kubiskt element med 20 noder och reducerad integration.



Figur 4.5: Solidelement med 8 respektive 20 noder

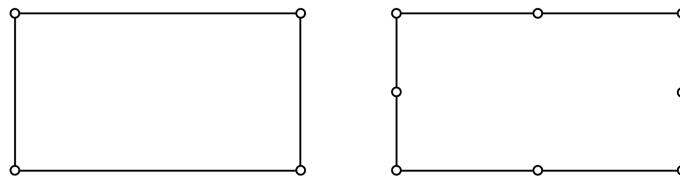
### 3D skalelement

2D eller 3D skalelement är en tvådimensionell fyrhörning ofta formad som en kvadrat. Generellt sett vid användning av skalelement används 2D skalelement. Vid sådana analyser har varje nod enbart tre möjliga frihetsgrader, 2 för translation och en för



rotation. Ett sätt att kombinera den enkla modelleringsprocessen vid användning av 2D-element med mångsidigheten vid användning av 3D-element är att använda sig av s.k. 3D skalelement. Vid en sådan analys görs modellen och belastningarna i 2D men den har frihetsgrader i 3D och blir på så sätt analyserad i 3D. Den främsta fördelen med att använda sig av 3D skalelement istället för 3D solidelement är att beräkningstiden blir mycket kortare.[7]

Vid användning av 3D skalelement används elementet som av Abaqus benämns S8R, som är ett tjockt skalelement med 8 noder och reducerad integration. Skalelementen har i detta arbete används tillsammans med balkelement vid beräkning av instabilitetslaster för raka balkar. Vid användning av 3D skalelement anser man att materialdata är samma för balkens longitudinella/radiella och longitudinella/tangentiella plan vilket gör att styvhetsvärdena för trä kan reduceras till de i tabell 4.2 nedan.



Figur 4.6: Skalelement med 4 respektive 8 noder

Tabell 4.2: Styvhetsvärden använda vid skalelement för L40

$E_L$	$E_{R/T}$	$\nu$	$G_{RL}$	$G_{LT}$	$G_{TR}$
13 000 MPa	450 MPa	0.45	850 MPa	850 MPa	60 MPa

### 3D balkelement

Balkelementen är till formen ett rakt streck uppbyggt av 2 eller 3 noder beroende på om det är en linjär eller kvadratisk fördelning av förskjutningarna (se figur 4.7). I Abaqus används elementet benämnt B32 som är ett element med 3 noder. Vid användning av 3D balkelement använder man sig av alla sex frihetsgrader i varje nod. 3D balkelement används i detta arbete vid beräkning av kritisk stabilitetslast för både limträbågar och raka balkar. Bågarna och de raka balkarna modelleras uppbyggda av ett stort antal korta, raka balkar. Till skillnad från vid användning av skal- eller solidelement ritas man upp geometrin som endast ett streck och dess tvärsnittsegenskaper ges senare. Vid användning av balkelement används för limträ alla de nio styvhetsparametrarna i tabell 3.3 på sida 18.

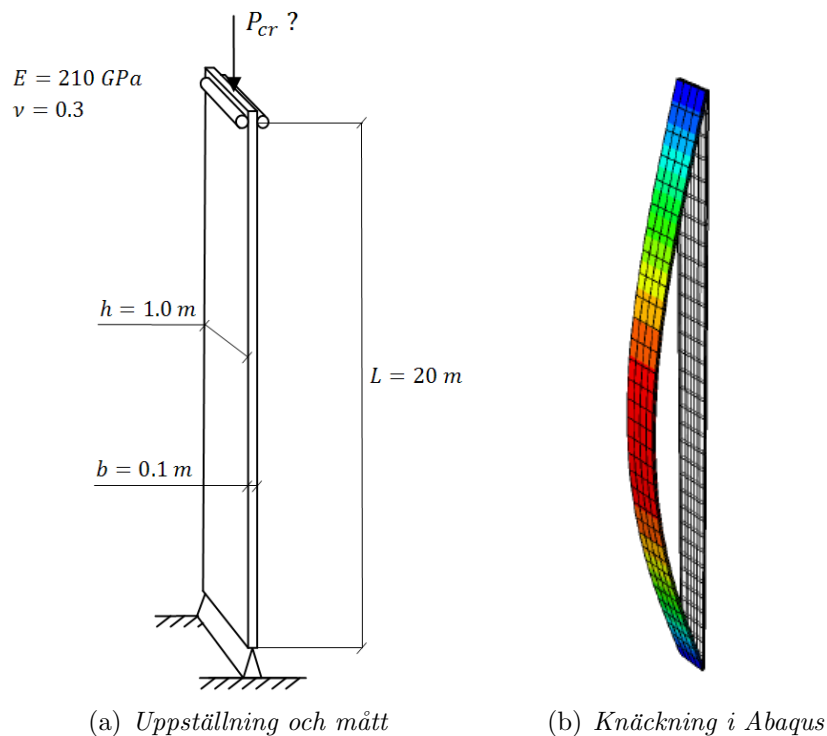


Figur 4.7: Balkelement med 2 respektive 3 noder

### 4.2.2 Val av elementform och antal

Det är inte helt självklart vilken typ av element och hur många element man ska använda sig av för att få ett smidigt tillvägagångssätt vid en FEM-analys. Här görs därför två instabilitetsanalyser av en helt isotrop stålsträva för att få en grundläggande vetskap om vad som är lämpligt att använda sig av i resten av rapporten.

#### Knäckning



Figur 4.8: Knäckning av stålsträva

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} = 431\,795\text{ N}$$

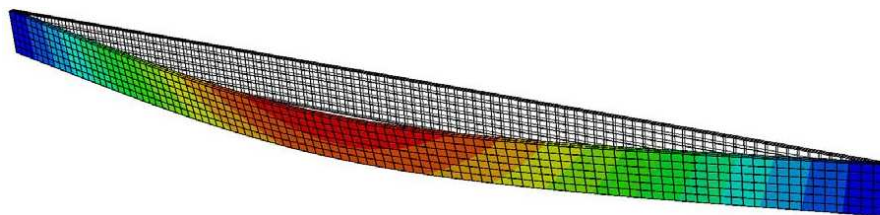
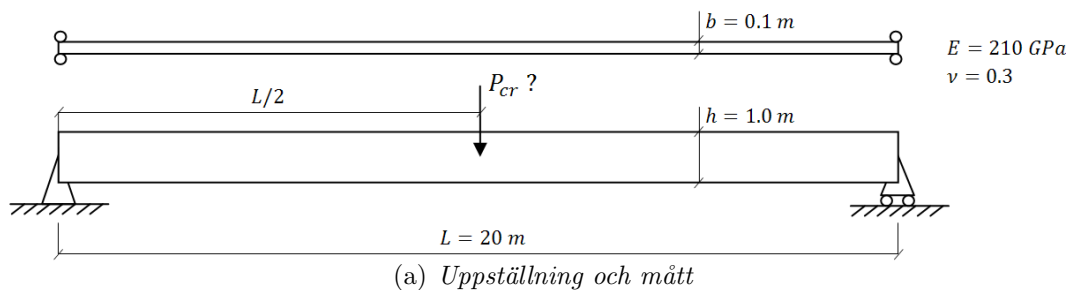
I figur 4.8(a) ovan ses ett exempel för knäckning av en stålsträva med geometriförhållande likvärdiga de träbalkar som kommer studeras senare i rapporten. Utböjningsformen för första egenmoden vid användning av 3D solidelement i Abaqus ses i figur 4.8(b). Beräkningar vid ett varierande antal element görs för de tre elementtyperna enligt ovan och jämförs med det analytiskt uträknade värdet ur Eulers ekvation för knäckning. Resultatet från detta ses i tabell 4.3. *Error* beskriver den procentuella skillnaden mellan analytisk lösning och resultat vid användning av respektive element.

Tabell 4.3: Kritisk knäckningslast vid varierande typ av element och antal

Element	Solidelement	Error	Skalelement	Error	Balkelement	Error
2 st	-	-	570 533 N	+32.13%	438 266 N	+1.50%
4 st	-	-	438 694 N	+1.60%	432 208 N	+0.10%
8 st	438 519 N	+1.56%	432 301 N	+0.12%	431 796 N	+0.00%
16 st	432 309 N	+0.12%	431 884 N	+0.02%	431 770 N	-0.01%
32 st	431 880 N	+0.02%	431 857 N	+0.01%	431 768 N	-0.01%
64 st	431 843 N	+0.01%	431 855 N	+0.01%	431 768 N	-0.01%
128 st	431 839 N	+0.01%	431 855 N	+0.01%	431 768 N	-0.01%
256 st	431 853 N	+0.01%	431 868 N	+0.02%	431 768 N	-0.01%
512 st	431 851 N	+0.01%	431 868 N	+0.02%	431 768 N	-0.01%

Utifrån tabell 4.3 kan man tydligt se att konvergens mot ett korrekt resultat sker vid ett väldigt lågt antal element för alla de tre elementtyperna.

## Vippning



Figur 4.9: Vippning av stålsträva

$$P_{crit} = \frac{16.94 \sqrt{EI_y GK_v}}{L^2} = 889\,825 \text{ N}$$

Det andra fallet som studeras visas i figur 4.9(a). Detta fall behandlar samma balk som i det tidigare exemplet fast lasten placeras istället centriskt i balken och med en annan riktning. Utböjningsformen för första egenmoden vid användning av solidelement i Abaqus ses i figur 4.9(b). Även här görs beräkningar med ett varierande antal element för alla de tre elementtyperna och resultatet kan ses i tabell 4.4.

Tabell 4.4: *Kritisk vippningslast vid varierande typ av element och antal*

Element	Solidelement	Error	Skalelement	Error	Balkelement	Error
2 st	-	-	-	-	913 275 N	+2.63%
4 st	-	-	780 960 N	-12.23%	894 973 N	+0.58%
8 st	451 492 N	-49.26%	901 157 N	+1.27%	893 273 N	+0.39%
16 st	867 222 N	-2.54%	899 647 N	+1.10%	893 154 N	+0.37%
32 st	898 507 N	+0.98%	899 699 N	+1.11%	893 146 N	+0.37%
64 st	900 971 N	+1.25%	899 563 N	+1.09%	893 145 N	+0.37%
128 st	901 009 N	+1.26%	888 771 N	-0.12%	893 146 N	+0.37%
256 st	889 566 N	-0.03%	888 731 N	-0.12%	893 145 N	+0.37%
512 st	889 500 N	-0.04%	888 460 N	-0.15%	893 145 N	+0.37%

Utifrån resultatet i tabell 4.4 märks ganska tydligt att en vippningsanalys är mer krävande än en vanligt knäckningsanalys som i det tidigare exemplet. Vid användning av solidelement behövs ett relativt stort antal element innan konvergens mot ett riktigt bra värde fås. Vid användning av skalelement konvergerar resultatet dock snabbare och dessutom ännu snabbare vid användning av balkelement. Dessa kunskaper är värdefulla vid fortsatta studier eftersom skalelement och balkelement medför både kortare modelleringstid samt beräkningstid och således kommer dessa användas vid fortsatta studier.

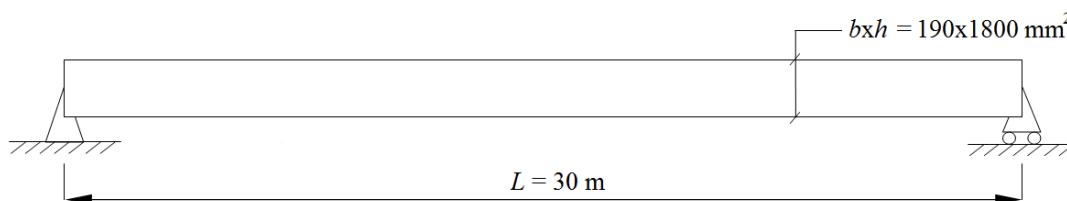
# Kapitel 5

## Instabilitet hos raka limträbalkar

### 5.1 FEM-modellen

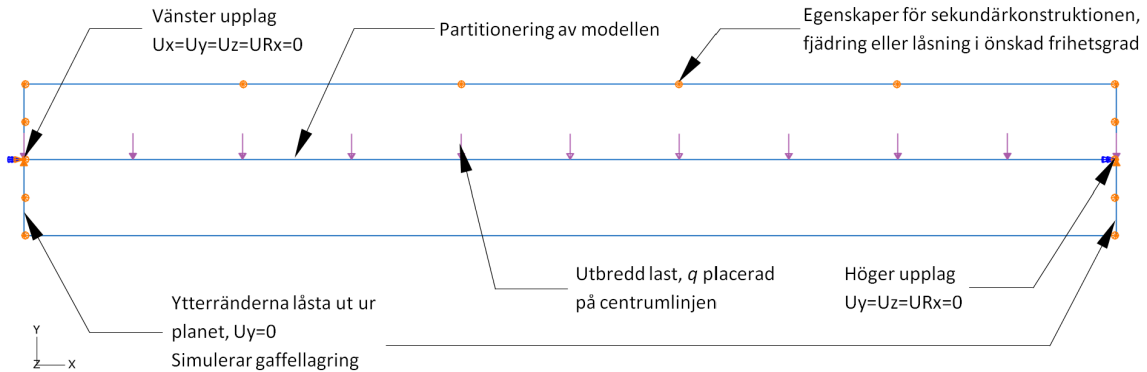
#### 5.1.1 Geometri och modell

Analyserna av raka balkar har till största delen gjorts på en grundgeometri för en viss rak balk. Utifrån denna har sedan balkens tvärsnittegenskaper eller belastningsfall förändrats för att se hur de olika parametrarna spelar in på resultatet. Balken som valdes för analyserna hade längden,  $L=30$  m och ett tvärsnitt på  $b \times h=190 \times 1800$  mm<sup>2</sup>. Detta är samma tvärsnittsmått som för grundgeometrin för limträbågarna i nästa kapitel.

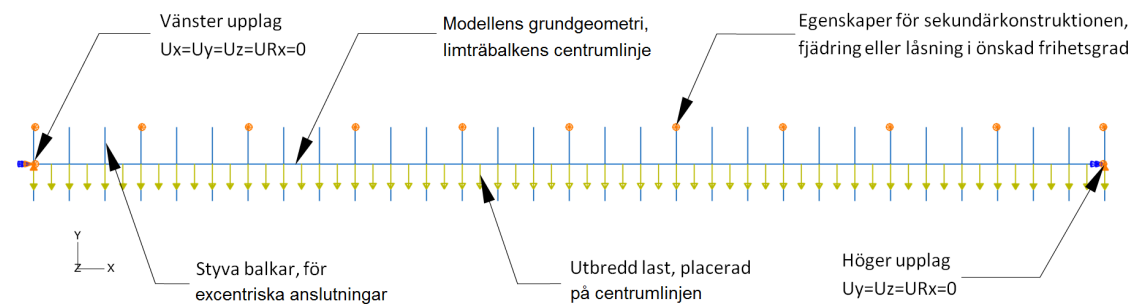


Figur 5.1: *Balktvärsnittet som analyserna utgår ifrån*

De raka balkarna modelleras i Abaqus med skal- och balkelement. Vid användning av skalelement placeras anslutningarnas egenskaper direkt i modellen där de önskas, se figur 5.2. Lite mer komplicerat blir det vid användning av balkelement eftersom balken då endast modelleras som ett streck som motsvarar balkens centrumlinje. För att lägga in egenskaper hos sekundärkonstruktionen måste således extra balkelement kopplas till grundgeometrin. Detta görs med element av väldigt hög styvhet och en längd motsvarande halva tvärsnittets höjd, se figur 5.3. Anledningen till att styvheten måste vara hög är att elementens eftergivlighet inte ska påverka resultatet utan de skall endast vara en länk till balkens anslutningar.

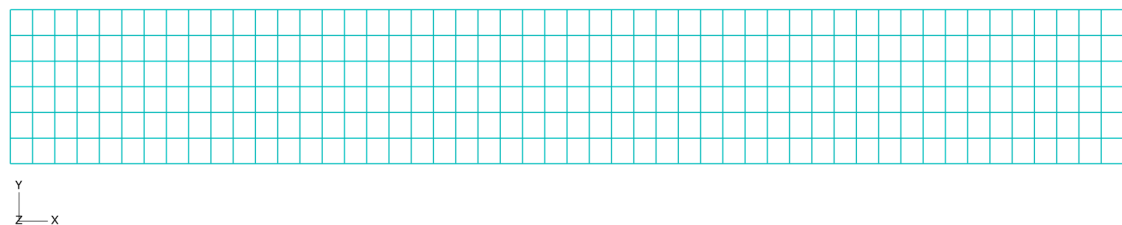


Figur 5.2: Modell i Abaqus vid användning av skalelement



Figur 5.3: Modell i Abaqus vid användning av balkelement

I figur 5.2 och 5.3 ovan avser  $U$  förskjutningar och  $UR$  rotationer. Partitionering av modellen innebär att grundgeometrin delas upp i delar för att egenskaper ska kunna läggas in på andra platser än på den yttre randen. Då skalelement används kan materialorienteringen läggas in i det globala koordinatsystemet så länge balken också ritas upp i detta. Då balkelement används för att modellera balken blir materialorienteringen enkel eftersom att den då bara följer balkens geometri.



Figur 5.4: Elementindelning av rak balk vid användning av skalelement

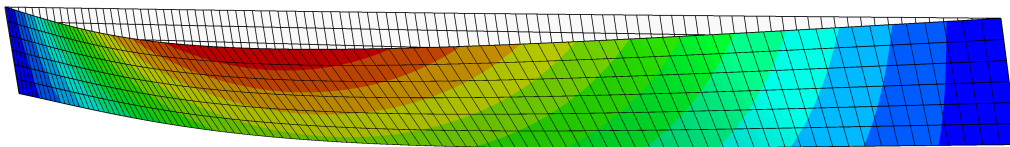
### 5.1.2 Laster

Analyser i Abaqus kommer enbart utföras med utbredda laster. De utbredda laster som balkarna analyseras för placeras i regel i balkens symmetrilinje förutom då

analys av lastexcentriciteter sker. Då detta görs används dock bara skalelement.

### 5.1.3 Randvillkor

De raka balkarna modelleras som fritt upplagda, gaffellagrade balkar. Alltså låses frihetsgraderna för förskjutning i y och z-led samt rotation runt x-axeln vid upplagen. För att inte hindra balkens utvidgning i sidled låses endast den ena sidan i x-led. Gaffellagringen modelleras genom att hela ytterränderna låses för förskjutningar i z-led, detta behöver dock inte göras vid användning av balkelement eftersom att alla egenskaper ges direkt i dess symmetrilinje. För en mer översiktlig beskrivning av randvillkoren se figur 5.2 och 5.3.



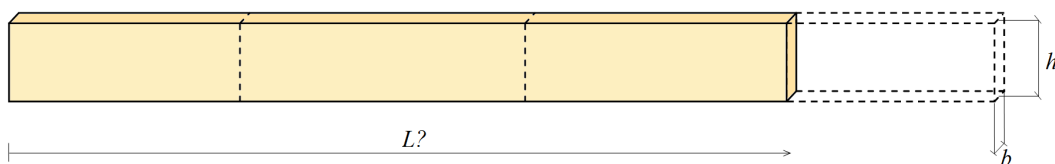
Figur 5.5: Instabilitet av rak balk då ingen stabilisering finns i överkant, rött = stor utböjning, blått = liten utböjning

## 5.2 Varierande geometri och materialdata

Grundgeometrin används som utgångspunkt för kontroll av hur stor betydelse tvärsnittets dimensioner och materialdata har. Lasten placeras i balkmitt, dvs. ingen excentricitet. Eftersom ingen stabilisering finns av balkens överkant kan balken fritt vippa ut enligt figur 5.5. Linjär bucklingsanalys har genomförts med skalelement och balkelement som sedan jämförts med Timoshenko och Geres ekvation 5.1.

$$q_{crit} = \frac{28.3\sqrt{EI_y GK_v}}{L^3} \quad (5.1)$$

### 5.2.1 Längd



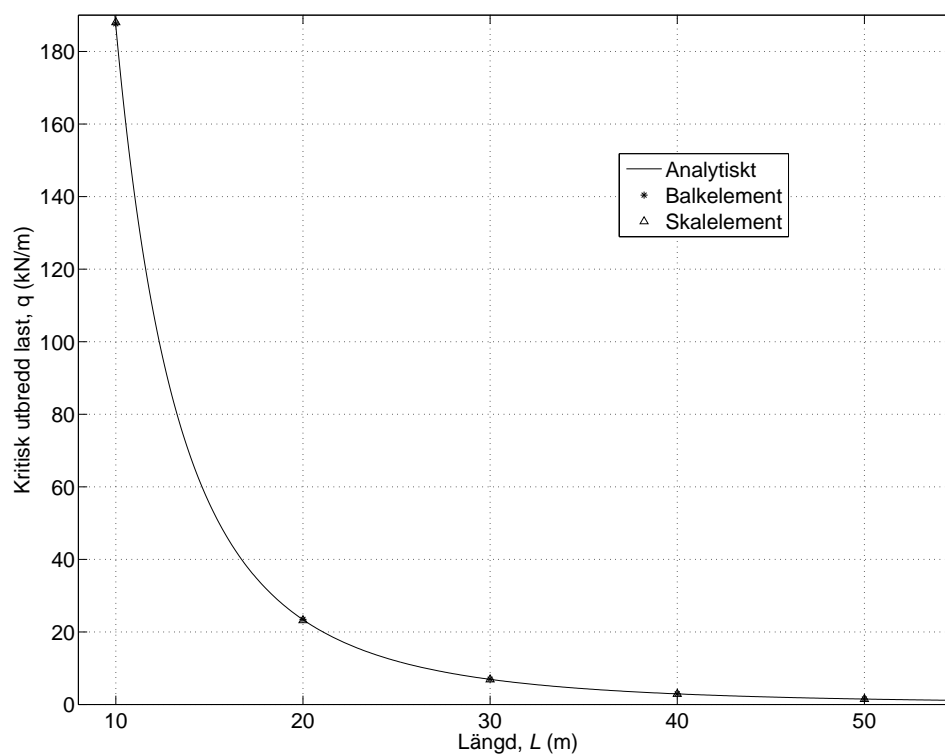
Figur 5.6: Balk med varierande längd men konstanta tvärsnittsmått

I tabell 5.1 ser man att både användning av balkelement och skalelement ger resultat nära de analytiska. Man kan dock urskilja att just för denna geometri ligger resultatet vid användning av balkelement generellt sett något högre än det analytiska

och skalelement något under. Den kritiska lasten är helt och hållet kubiskt linjär mot balklängden,  $L^3$ . Det procentuella värdet beskriver den procentuella skillnaden mellan analytisk lösning och resultat vid användning av respektive element.

Tabell 5.1: *Kritiska laster vid olika längder för balk  $0.19 \times 1.8 \times L \text{ m}^3$*

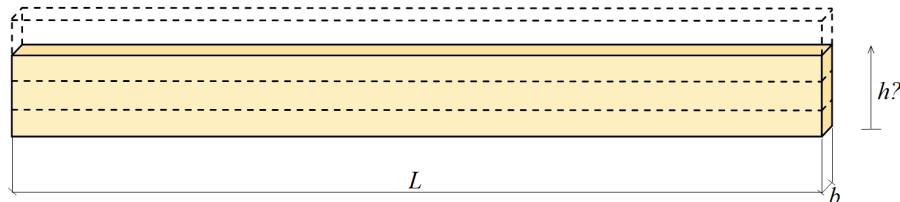
Längd (m)	Analytiskt (N/m)	Balkelement	Skalelement
10	187028	+0.32%	+0.54%
20	23378	+0.37%	-0.76%
<b>30</b>	<b>6927</b>	<b>+0.37%</b>	<b>-0.74%</b>
40	2922	+0.38%	-0.64%
50	1496	+0.38%	-0.55%



Figur 5.7: *Kritiska laster vid olika längder för balk  $0.19 \times 1.8 \times L \text{ m}^3$*



### 5.2.2 Tvärsnittshöjd



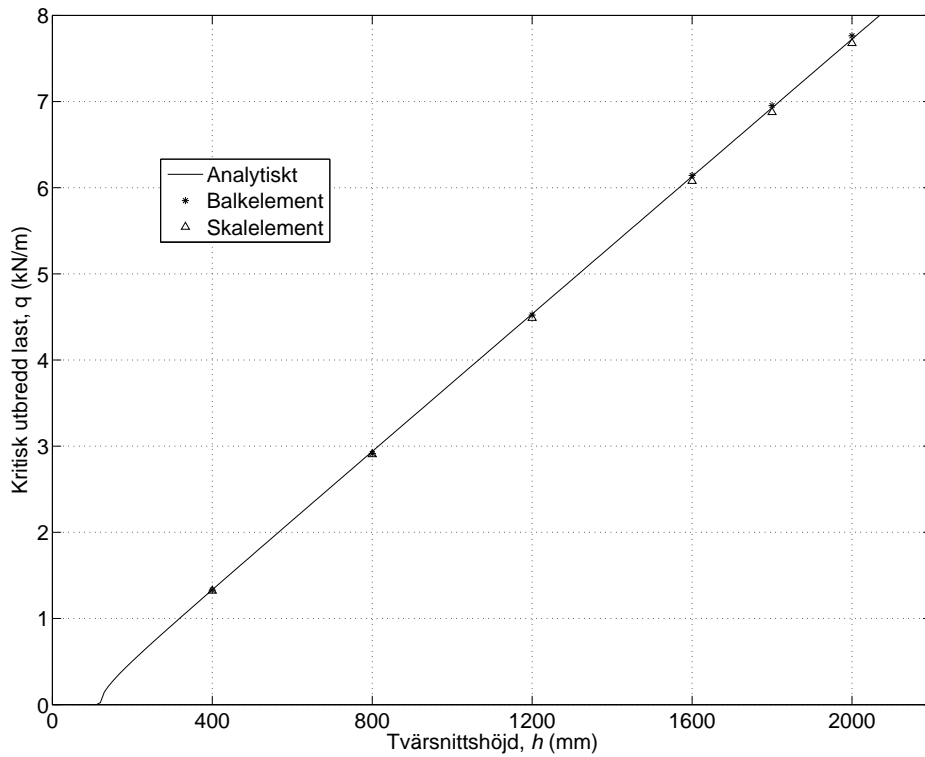
Figur 5.8: Balk med varierande tvärsnittshöjd men konstant längd och tvärsnittsbredd

Tabell 5.2: Kritiska laster vid olika tvärsnittshöjder för balk  $0.19xh \times 30 \text{ m}^3$

Tvärsnittshöjd (m)	Analytiskt (N/m)	Balkelement	Skalelement
0.4	1334	-0.35%	-0.94%
0.8	2938	-0.78%	-1.12%
1.2	4535	-0.28%	-1.05%
1.6	6130	+0.20%	-0.86%
<b>1.8</b>	<b>6927</b>	<b>+0.37%</b>	<b>-0.74%</b>
2.0	7724	+0.50%	-0.61%

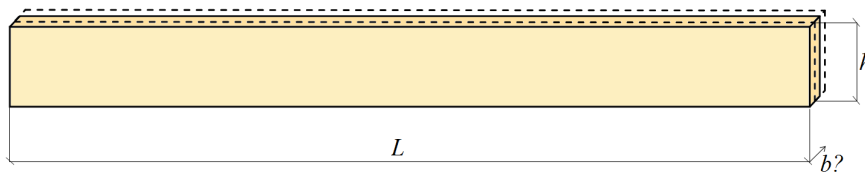
I tabell 5.2 ovan kan ses att det analytiska förhållandet mellan kritisk utbredd last och tvärsnittshöjd är näst intill linjärt (p.g.a. hur den förhåller sig till böj- och vridstyvheten). Analyser med balk- och skalelement har gett närliggande resultat.

Viktigt att komma ihåg är att vridstyvheten,  $K_v$ , enligt ekvation 2.7 endast är tillämpligt för slanka tvärsnitt. Vid väldigt låga tvärsnittshöjder i förhållande till bredden ( $h < b/1.6$ ) blir vridstyvheten ett icke reellt tal vilket förklarar att ingen stabilitet verkar finnas vid de låga tvärsnitthöjderna i figur 5.9.



Figur 5.9: Kritiska laster vid olika tvärsnittshöjder för balk  $0.19 \times h \times 30 \text{ m}^3$

### 5.2.3 Tvärsnittsbredd

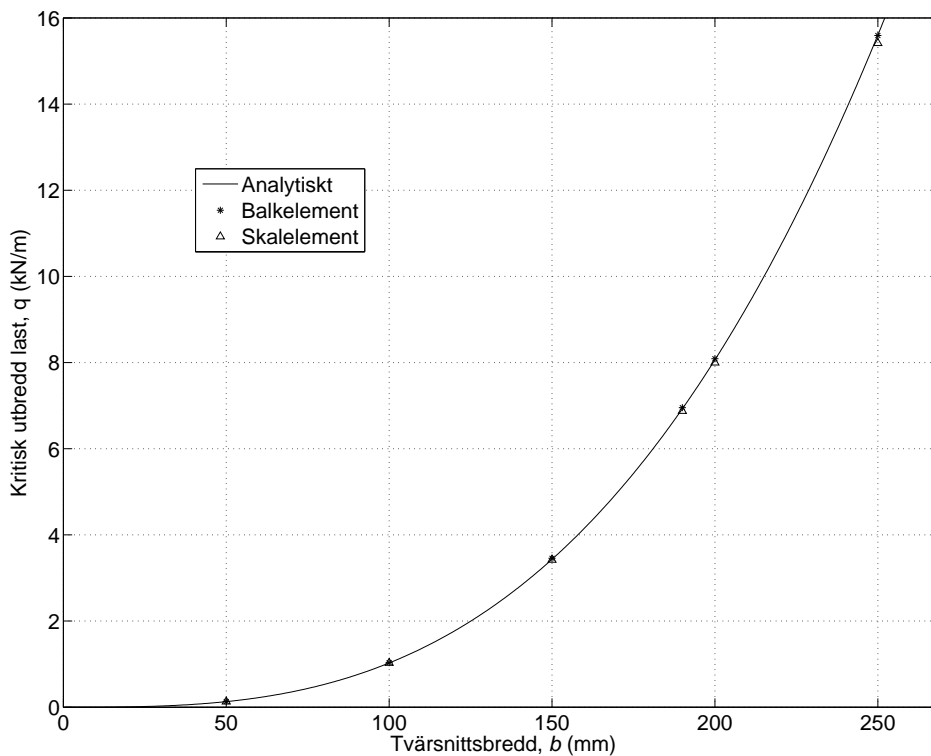


Figur 5.10: Balk med varierande tvärsnittsbredd men konstant längd och höjd

Tabell 5.3: Kritiska laster vid olika tvärsnittsbredder för balk  $b \times 1.8 \times 30 \text{ m}^3$ 

Tvärsnittsbredd (mm)	Analytiskt (N/m)	Balkelement	Skalelement
50	129	+0.66%	+0.29%
100	1027	+0.82%	-0.06%
150	3434	+0.64%	-0.43%
<b>190</b>	<b>6927</b>	<b>+0.37%</b>	<b>-0.74%</b>
200	8064	+0.30%	-0.81%
250	15601	-0.06%	-1.20%

Då bredden varierar hos ett tvärsnitt är den kritiska lasten näst in till kubiskt linjär mot bredden,  $b^3$ , se figur 5.11. I tabell 5.3 ovan ses hur detta förhåller sig för ett antal bredder och hur det skiljer sig vid användning av balk- eller skalelement.

Figur 5.11: Kritiska laster vid olika tvärsnittsbredder för balk  $b \times 1.8 \times 30 \text{ m}^3$ 

### 5.2.4 Träets styvhetsvärden

Förutom geometrin kan också träets styvhetsvärden variera från fall till fall. För att få en känsla för hur stor inverkan värdena har görs här en känslighetsanalys av

styvhetsparametrarna i Abaqus. Kontroll görs både för skal- och balkelement men enligt balkteorin är det bara elasticitetsmodulen i fiberriktningen (longitudinella),  $E_L$  samt skjuvmodulen för de två planen parallellt med denna som inverkar vid användning av balkelement.

Instabilitetsanalyser görs för grundgeometrin. Vid användning av skalelement förutsätts lasten angripa i balkens topp och har för grundstyvheter en instabilitetslast på 6 293.8 N/m. Vid användning av balkelement förutsätts samma balk utsättas för en centrisk last vilket ger en instabilitetslast för grundstyvheter på 6 952.9 N/m. Följande kontroller görs:

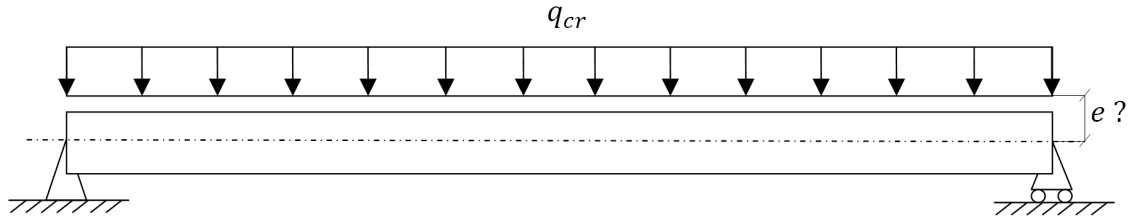
1. Alla styvhetsvärden minskas till en tiondel av ursprungsvärdet
2.  $E_L$  minskas till en tiondel av ursprungsvärdet
3.  $E_R$  minskas till en tiondel av ursprungsvärdet
4.  $\nu_{LR}$  minskas till en tiondel av ursprungsvärdet
5.  $G_{RL}$  minskas till en tiondel av ursprungsvärdet
6.  $G_{LT}$  minskas till en tiondel av ursprungsvärdet
7.  $G_{TR}$  minskas till en tiondel av ursprungsvärdet

Viktigt att tänka på är att instabilitetslasterna inte är linjärt beroende av de enskilda styvheter. Styvhetsförändringarna enligt ovan ger ändå en viss känsla för deras inverkan. Minskning av alla parametrar samtidigt ger dock alltid en linjärt varierande instabilitetslast vilket bör vara den mest relevanta kunskapen. *Andel* i tabell 5.4 beskriver hur stor andel av ursprunglig instabilitetslast man får vid respektive parameterjustering.

Tabell 5.4: *Materialstyvheternas inverkan på instabiliteten*

Kontroll nr.	$q_{crit}$ skalelement (N/m)	<i>Andel</i>	$q_{crit}$ balkelement (N/m)	<i>Andel</i>
1	629.4	10.0%	695.29	10.0%
2	2096.2	33.3%	2198.8	31.6%
3	6258.9	99.4%	-	-
4	6301.1	100.1%	-	-
5	1836.5	29.2%	2198.7	31.6%
6	5725.0	91.0%	6948.3	99.9%
7	6086.3	96.7%	-	-

### 5.3 Lastexcentricitetens inverkan



Figur 5.12: Utbredda lastens excentricitet

Då det i de flesta fall inte är intressant att kontrollera kritiska vippningslaster när lasten angriper i balktvärsnittets centrum behövs det någon form av vidareutveckling av Timoshenko och Geres ekvationer. Trond Even Eggen [7] har föreslagit ett approximativt uttryck för detta både vad det gäller punktlast och utbredd last med varierande excentricitet. För fallet med utbredd last föreslår Eggen följande uttryck:

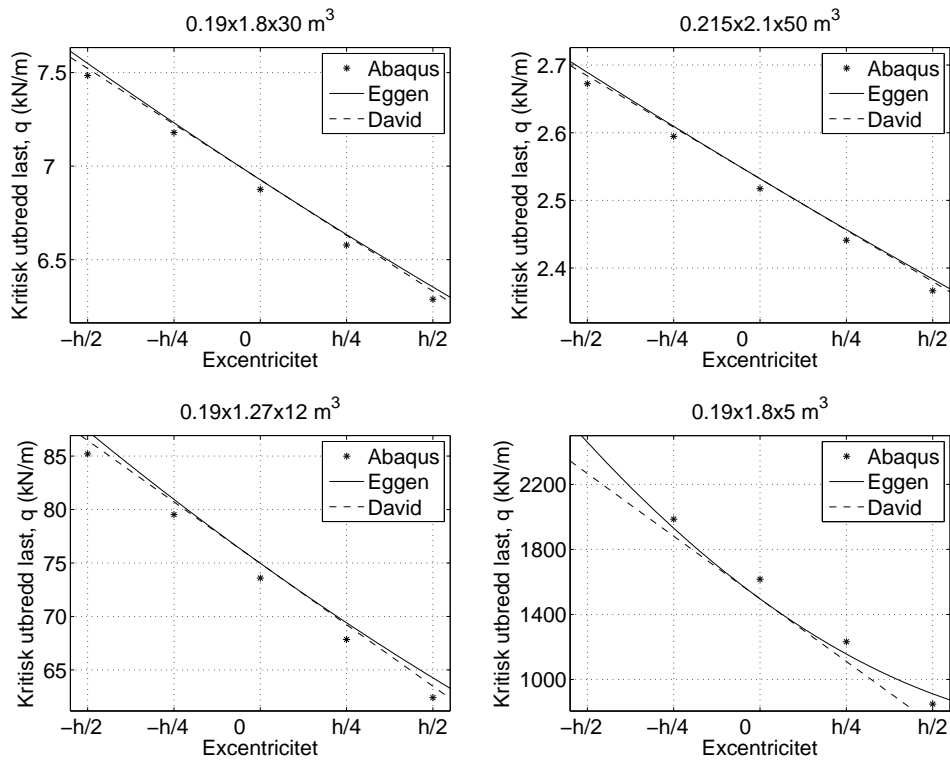
$$q_{crit} = \frac{28.3\sqrt{EI_y GK_v}}{L^3} - k_1 \left(\frac{e}{L}\right) \frac{EI_y}{L^3} + k_2 \left(\frac{e}{L}\right)^2 \frac{EI_y}{L^3} \sqrt{\frac{E}{G}} \quad (5.2)$$

$k_1$  och  $k_2$  i ekvation 5.2 är två godtyckliga konstanter som kan bestämmas med hjälp av jämförelse med FEM-resultat vid instabilitetsanalys av ett antal geometrier med varierande excentricitet. Eggen har i sin rapport genom ett antal analyser hittat konstanterna  $k_1 = 40.2$  och  $k_2 = 14.0$ . Dessa värden visar sig ge bra överensstämmelse med FEM-analyser som gjorts i denna rapport, dock föreslås efter ett flertal analyser av diverse geometrier och excentriciteter en helt och hållet linjär fördelning enligt:

$$q_{crit} = \frac{28.3\sqrt{EI_y GK_v}}{L^3} - k_1 \left(\frac{e}{L}\right) \frac{EI_y}{L^3} \quad (5.3)$$

där konstanten  $k_1$  approximativt kan bestämmas till 40.02. Denna fördelning tycks ge goda resultat vid excentriciteter som ligger inom tvärsnittet ( $-0.5e \leq 0.5e$ ).

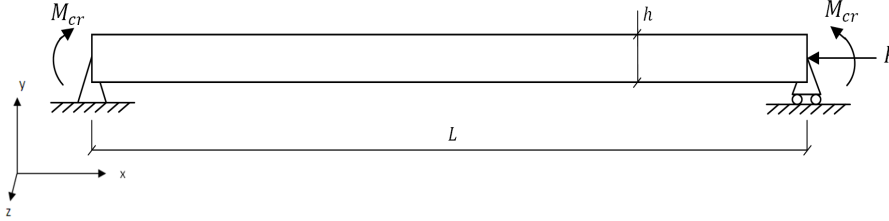
I Abaqus modelleras balkarna med excentricitet utav skalelement. De partitioneras upp så att last kan påföras på aktuell höjd i balken. Jämförelse mellan Abaqus, Eggens analytiska ekvation samt ekvation framtagen i denna rapport visas i figur 5.13.



Figur 5.13: Jämförelse mellan Abaqus, Eggens analytiska ekvation samt ekvation framtagen i rapporten

Som man kan se i figur 5.13 ovan har excentriciteter som ligger inom tvärsnittshöjden ganska stor påverkan på stabiliteten hos balken. Desto högre balken är i förhållande till dess längd, desto större betydelse har excentriciteten. Resultaten från Abaqus verkar falla nästan helt och hållet linjärt och således har också ekvation 5.3 låtit vara linjär. Dock ger varken Eggens approximation eller ekvation 5.3 resultat som ligger väldigt nära de i Abaqus. Ekvation 5.3 ger för de tre första balkarna en avvikning på 0.5-2.0% vilket ändå kan anses acceptabelt. Tilläggas ska att Eggen vid sina kalibreringar och framtagning av sin ekvation inte använt sig utav skalelement utan utav en annan typ av element i programvaran Cfem som gett resultat närmre Timoshenko och Geres ekvation 2.5

## 5.4 Rak balk utsatt för moment och normalkraft



Figur 5.14: Balk utsatt för moment och normalkraft

Raka, fritt upplagda balkar belastas sällan av ett jämnt moment samtidigt som de blir belastade av en normalkraft. Däremot är det intressant att kontrollera detta då man dimensionerar bågar eftersom att man i ett typiskt snitt i bågen kan finna både höga moment och tryckande normalkrafter. I nästa kapitel diskuteras hur man kan frilägga en del av bågen och anta att denna är en rak balk utsatt för ett jämnt moment och en tryckande normalkraft. Så länge anslutningarna längs bågen är tillräckligt styvt infästa kan således instabilitetsfenomenet lösas analytiskt med hjälp av denna metod. För knäckning gäller den kritiska normalkraften enligt ekvation 2.1 på sida 4 och för ett jämnt moment gäller ekvation 2.5 på sida 6. Dock finns det ingen klar analytisk lösning för instabilitet hos en balk utsatt för både normalkraft och moment. Detta kan dock härledas fram med hjälp av grundekvationerna i kurspärm för Balkteori [8]:

### Grundekvationer enligt andra ordningens teori

$$EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} = q_y - P \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dx^2} z_0 \right) - \frac{d^2}{dx^2} (M_y^0 \varphi) \quad (5.4)$$

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_z - P \left( \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d^2 \varphi}{dx^2} y_0 \right) - \frac{d^2}{dx^2} (M_z^0 \varphi) \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} EI_\omega \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - GK_v \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = & q_\omega - \frac{I_0 P}{A} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + P \left( \frac{d^2 w}{dx^2} y_0 - \frac{d^2 v}{dx^2} z_0 \right) \\ & - \frac{d}{dx} \left( M_y^0 \frac{dv}{dx} \right) + \frac{d}{dx} (V_z^0 v) - \frac{d}{dx} \left( M_z^0 \frac{dw}{dx} \right) \\ & - \frac{d}{dx} (V_y^0 w) - 2 \frac{d}{dx} \left( M_y^0 \frac{d\varphi}{dx} \right) z_0 + 2 \frac{d}{dx} \left( M_z^0 \frac{d\varphi}{dx} \right) y_0 \\ & + q_z v - q_y w - q_z (z_1 - z_0) \varphi - q_y (y_1 - y_0) \varphi \end{aligned} \quad (5.6)$$

där:

$I_\omega$  är balkens välvtröghetsmoment

$z$  är skjuvcentrums avstånd från balktvärsnittets tyngdpunkt

$v$  är balkens förskjutning i y-led

$w$  är balkens förskjutning i z-led

$\varphi$  är balkens vridning/vinkeländring

För det polära tröghetsmomentet,  $I_0$  gäller:

$$I_0 = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_y + I_z \quad (5.7)$$

För en dubbelsymmetrisk balk kan skjuvcentrums koordinater  $z_0$  och  $y_0$  sättas till noll eftersom att skjuvcentrum och tyngdpunkt sammanfaller. Inget välvtröghetsmoment ger  $I_\omega = 0$ . Eftersom att balken i detta fall endast utsätts för moment,  $M$  och en tryckande kraft  $P$  som båda är jämnt fördelade över balken försvinner termerna  $q_y$ ,  $q_z$  och  $q_\omega$  eftersom att dessa betecknar utbredda laster. Momentet som belastar balken verkar runt z-axeln således kan alltså termen  $M_y^0$  också sättas till 0. Även tvärkrafterna  $V_y^0$  och  $V_z^0$  elimineras och man kan nu reducera grundekvationerna 5.4-5.6 till följande:

$$EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} = -P \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (5.8)$$

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} = -P \frac{d^2 w}{dx^2} - M_z^0 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \quad (5.9)$$

$$-GK_v \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{I_0}{A} P \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - M_z^0 \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (5.10)$$

Ekvation 5.8 ovan är okopplad medans ekvationerna 5.9-5.10 är kopplade. Kritiska laster kan således fås ur ekvation 5.9-5.10 med hjälp av en ansats som uppfyller randvillkoren att ingen förskjutning i z-led eller vridning (ty balken är gaffellagrad) kan ske vid upplagen:

$$w(0) = 0$$

$$\varphi(0) = 0$$

Exempel på en sådan ansats är:



$$w = C_1 \sin \frac{\pi x}{L} \Rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} = - \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 C_1 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \frac{d^4 w}{dx^4} = \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 C_1 \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\varphi = C_2 \sin \frac{\pi x}{L} \Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = - \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 C_2 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \frac{d^4 \varphi}{dx^4} = \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 C_2 \sin \frac{\pi x}{L}$$

Insatt i ekvationerna 5.9-5.10 och förenklat ger detta:

$$-EI_y \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \cdot C_1 + P \cdot C_1 + M_z^0 \cdot C_2 = 0$$

$$-GK_v \cdot C_2 + \frac{I_0}{A} P \cdot C_2 + M_z^0 \cdot C_1 = 0$$

Uttrycken ovan kan skrivas om på matrisform:

$$\begin{bmatrix} P - EI_y \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 & M_z^0 \\ M_z^0 & \frac{I_0}{A} P - GK_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

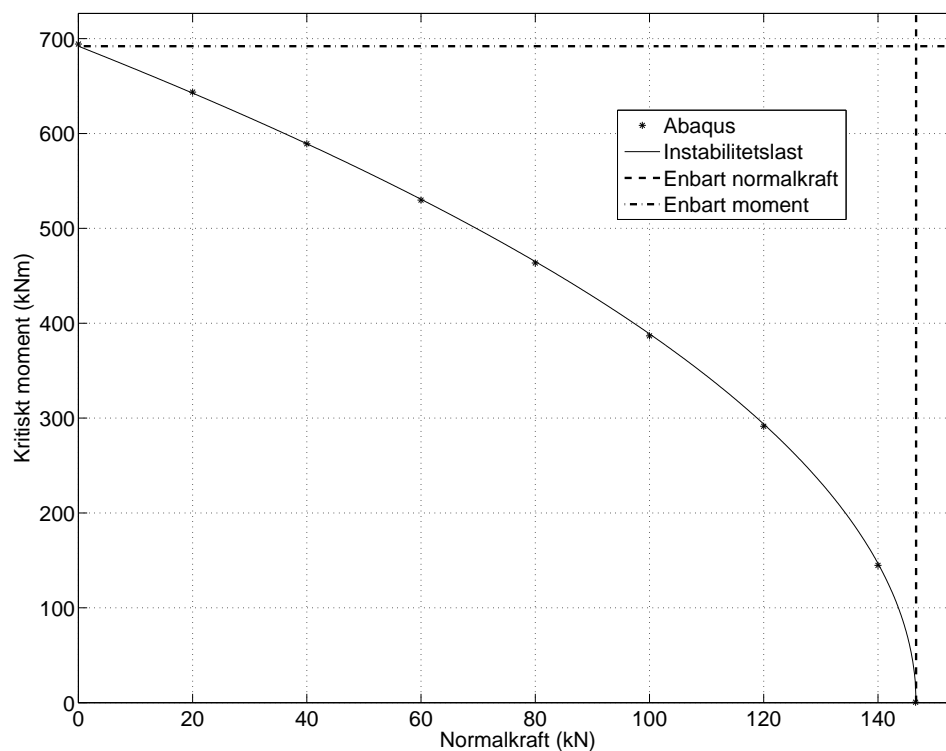
Lösning  $C_1 \neq 0$  och  $C_2 \neq 0$  kräver  $\det = 0$  vilket ger:

$$\frac{I_0}{A} P^2 - GK_v P - \frac{EI_y I_0}{A} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 P + GK_v EI_y \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 - (M_z^0)^2 = 0 \quad (5.12)$$

Det kritiska vippningsmomentet för en balk utsatt för både tryckande kraft och ett jämnt moment kan således skrivas som ekvation 5.13 nedan. Eftersom att ansatserna uppfyller ekvationerna 5.8 och 5.9 är detta alltså den exakta lösningen på problemet.

$$M_{crit} = \sqrt{\frac{I_0}{A} P^2 - GK_v P - \frac{EI_y I_0}{A} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 P + GK_v EI_y \left( \frac{\pi}{L} \right)^2} \quad (5.13)$$

Med en tryckande kraft  $P = 0$  fås alltså en ekvation för en balk utsatt för enbart böjmoment, samma uttryck som i ekvation 2.5 på sida 6. Hur det kritiska momentet beror av den tryckande kraften för grundgeometrin visas i figur 5.15. När normalkraften närmar sig Eulers knäckningslast (ekvation 2.1 på sida 4) behövs alltså inget moment för att systemet ska bli instabilt ( $P = P_{crit} \Rightarrow M_{crit} = 0$ ), här sker alltså helt och hållet knäckning av balktvärsnittet. En jämförelse gjordes med Abaqus för ett antal körningar med balkelement där normalkraften lades på i ett initialskede och det kritiska momentet togs fram genom egenvärdesanalys. Som kan se i figuren kommer resultatet väldigt nära det analytiska.



Figur 5.15: *Kritiskt moment beroende av normalkraft för limträbalk 0.19x1.8x30 m<sup>3</sup>*

M.h.a. ekvation 5.13 kan vidare den kritiska längden för en balk utsatt för ett givet moment och normalkraft bestämmas ur:

$$L_{crit} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{P(GK_v - \frac{I_0}{A}P) + (M_z^0)^2}{EI_y(\frac{I_0}{A}P + GK_v)}}} \quad (5.14)$$

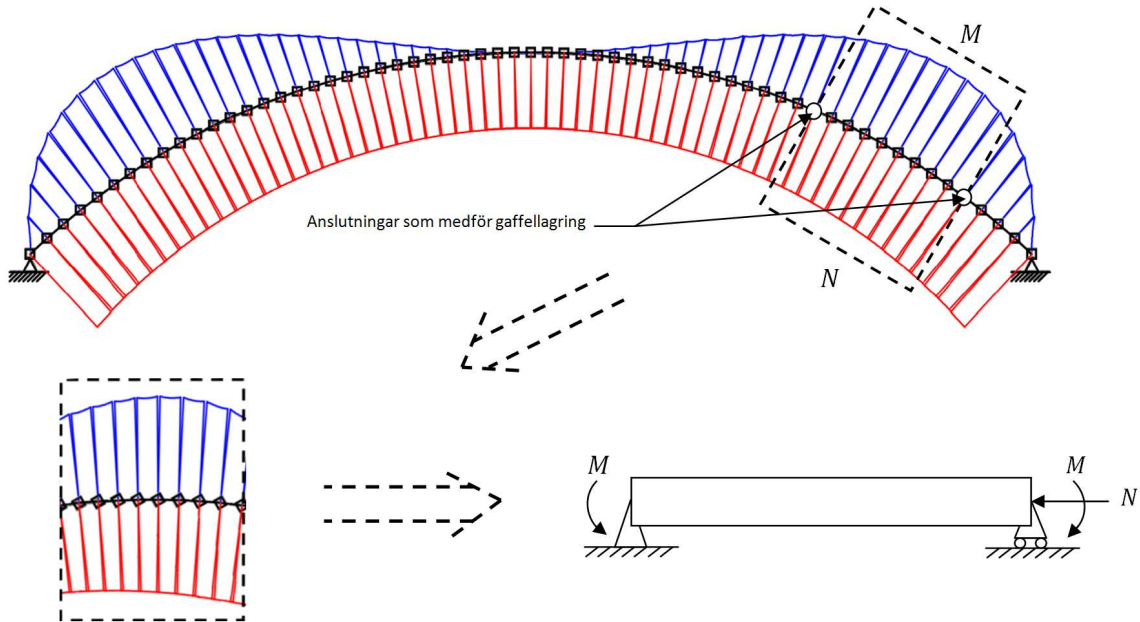
# Kapitel 6

## Instabilitet hos limträbågar

### 6.1 Analytisk beräkningsmetod

Det finns ingen generell metod att kontrollera instabiliteten för en limträbåge analytiskt. Stabiliteten för en helt ostabiliserad båge kan kontrolleras men det är ganska irrelevant då man aldrig skulle utföra en bågkonstruktion med lång spännvidd utan någon som helst sidostabilisering. Det finns också ett antal förslag till analytiska tillvägagångssätt angivna i t.ex. Limträhandboken [5] men dessa kräver att anslutningarna i bågens överkant är väldigt momentstyva.

Låt säga att man lyckas konstruera en väldigt styv anslutning i bågens överkant, både för vridning och deformation vinkelrätt planet, alternativt att bågen stabiliseras vinkelrätt planet i både över- och underkant. En sådan anslutning skulle i princip innebära att bågen kan anses gaffellagrad vid varje anslutning. Det ligger då nära till hands att frilägga varje del av bågen som ligger mellan två så styva anslutningar och kontrollera varje frilagd del för sig. Böjmomentet och normalkraften kan anses vara jämfördelade och ekvationerna i avsnitt 5.4 kan därför appliceras. Kontroll av detta antagandet sker i avsnitt 6.6 i slutet av detta kapitel. Principskiss för hur detta fungerar visas i figur 6.1



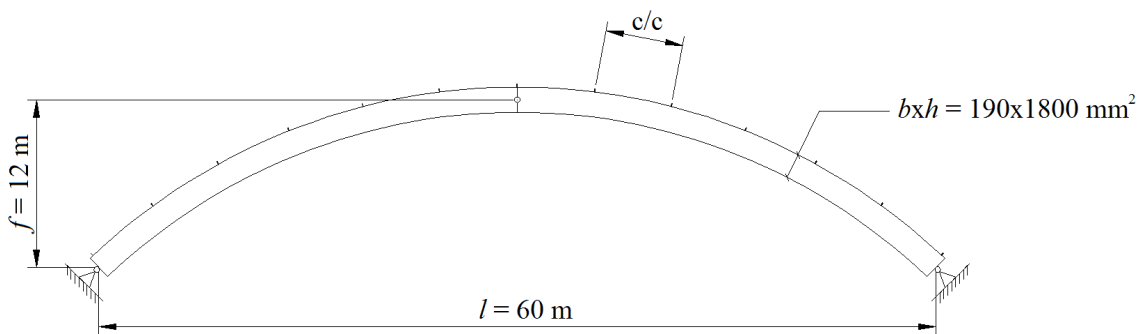
Figur 6.1: *Instabilitetskontroll vid goda anslutningsförhållande*

## 6.2 FEM-modellen

En båge som inte stabiliseras i sidled anses ha väldigt låg stabilitet, därför är bågarna vid alla analyser sidostabiliserade på något sätt.

### 6.2.1 Geometri och modell

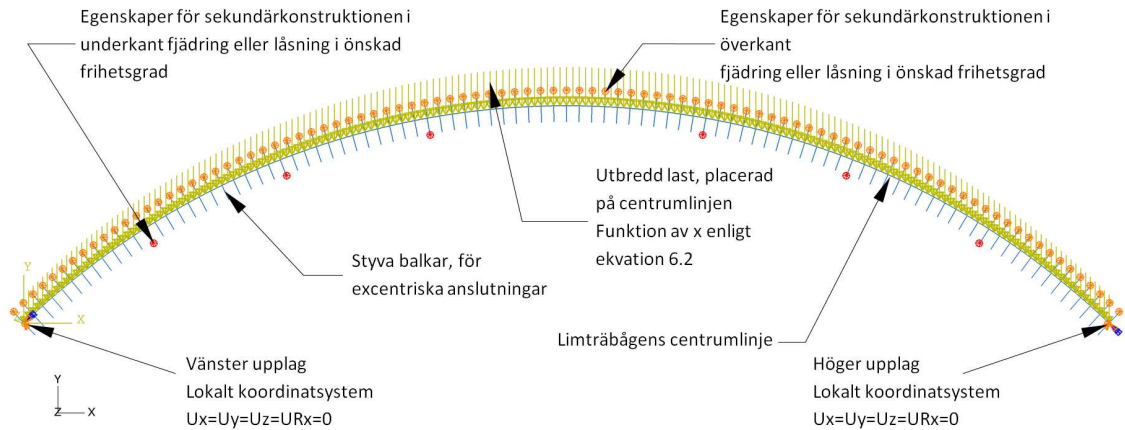
Analyserna i Abaqus har till större delen utgått ifrån en grundgeometri. Utifrån denna har sedan undersökningar gjorts hur bågens stabilitet varierar vid varierande tvärsnittsegenskaper eller stabiliserande sekundärkonstruktioner. Bågen som valdes för dessa analyser var en båge med spännvidden,  $l=60$  m, ett tvärsnitt på  $bxh=190 \times 1800$  mm<sup>2</sup> samt en pillhöjd på  $f=12$  m, se figur 6.2. I avsnitt 6.3.2 introduceras ytterligare ett par referensgeometrier.



Figur 6.2: Bågegeometrin som analyserna utgått ifrån

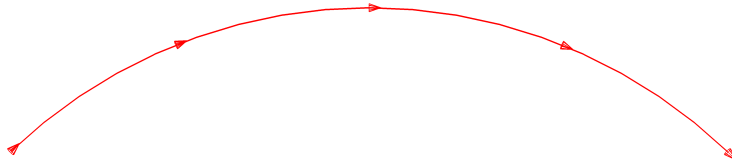
Bågarna modelleras i Abaqus med balkelement. Anledningen till att inte skalelement används för dessa analyser är att en bågens något avancerade geometri gör att en massa lokala och irrelevanta egenmoder hittas vid en linjär analys med dessa element.

Själva bågen ritas vid användning av balkelement ut som en linje varpå den får sina tvärsnittegenskaper i efterhand. Till bågen knyts extra balkar vinkelrätt bågen med halva tvärsnittets höjd och med ett givet avstånd mellan varandra. Detta görs för att bågans anslutningar ska kunna placeras med en korrekt excentricitet. Dessa balkar modelleras som väldigt styva så att de inte ger någon inverkan på resultatet mer än att de ger bågen dess tilltänkta anslutningsegenskaper. Figur 6.3 beskriver hur bågarna modellerats. U avser förskjutningar och UR rotationer.



Figur 6.3: Modell i Abaqus vid användning av balkelement

Då balkelement används för att modellera bågen ges tvärsnittet alla nio styvhetsvärden i tabell 3.1 på sida 18 och får sin rätta materialorientering genom att den väljs utefter bågens form, se figur 6.4.



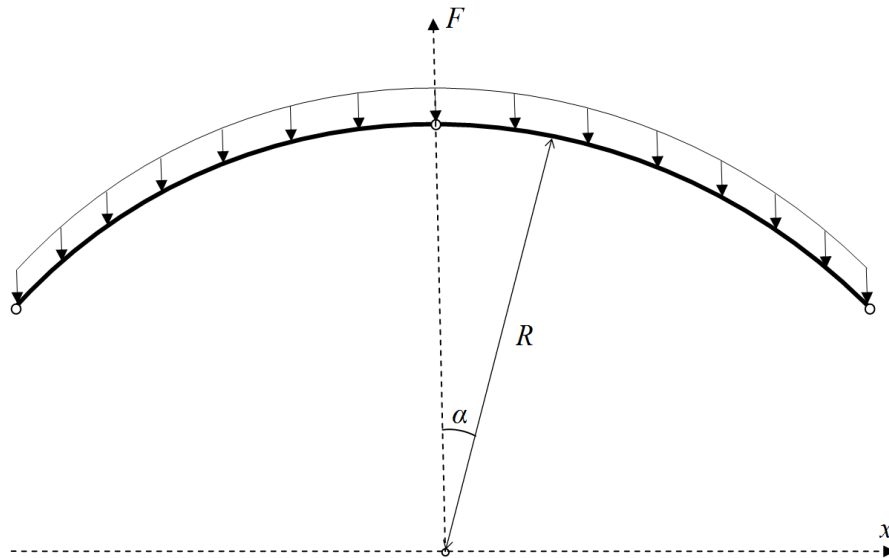
Figur 6.4: Materialorientering

### 6.2.2 Laster

Alla laster som placeras på bågen placeras i systemlinjen, d.v.s. centrumlinjen. Anledningen till att de inte läggs in i bågens överkant är att det är svårt att lägga in excentriska utbredda laster vid användning av balkelement. Hur excentriciteten påverkar instabilitetslasten för en rak balk beskrivs i avsnitt 5.3. I Abaqus räcker det inte med att man placerar en helt vertikal last på bågen utan en funktion måste ansättas för att den ska liknas vid en helt jämsymmetrisk belastning. Om den skulle placeras vertikalt jämn fördelning över bågen får de delar av bågen med en högst lutande tangent en högre belastning och endast den del med en helt horisontell tangent den korrekta belastningen.

Om origo befinner sig i centrum av bågen (figur 6.5) kan lasten beskrivas:

$$F(x) = F \cdot \cos\alpha = F \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right) \quad (6.1)$$



Figur 6.5: Kraftfördelning över tvärsnittet

Hur lasten beror av  $x$  då origo ligger vid vänster upplag beskrivs ( $l$  är bågens spännvidd):

$$F(x) = F \cdot \cos\alpha = F \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{l-x}{R}\right)\right) \quad (6.2)$$

### 6.2.3 Randvillkor

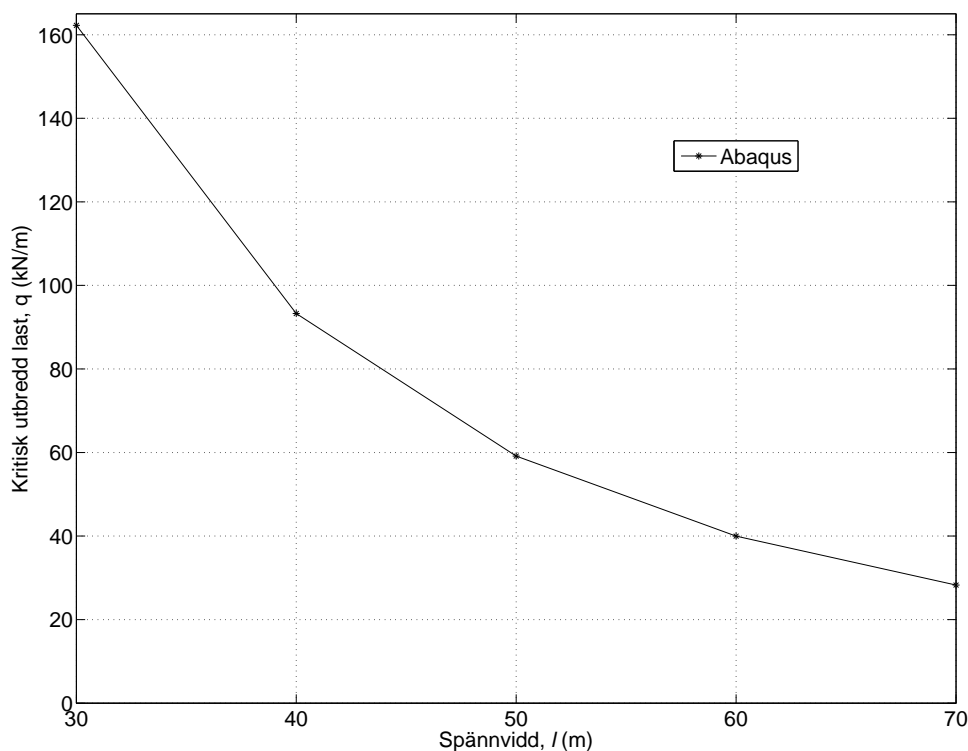
Bågarna modelleras som treledade vilket innebär att de vid de två ytterstöden och i mitten inte upptar några moment och tillåts att rotera fritt runt z-axeln. I övrigt är de låsta i både x-, y- och z-led vid upplagen vilket kan liknas vid ett upplag mot fundament enligt figur 3.4(b) på sida 19. Låsning finns också mot rotationer runt bågarnas lokala x-axel (förutsatt att denna följer bågens form), vid upplagen. Anslutningarna mot sekundärbärverk låses helt eller med fjädrar för rotationer eller deformationer vinkelrätt bågens plan i över- och underkant i aktuella punkter. Då momentstyva fjädrar används för rotationsförhindringar kopplas dessa till bågens lokala x-axel.

## 6.3 Varierande geometri och materialdata

Vad analyser i detta avsnitt anses hela bågens överkant vara stabiliserad för deformationer vinkelrätt bågens plan, d.v.s. i z-led. Ingen momentstyvhet anses dock finnas i dessa anslutningar.

### 6.3.1 Spännvidd

I figur 6.6 ses hur spännvidden inverkar på instabilitetslasten för en limträbåge med ett fast tvärsnittsmått och ett fast förhållande mellan spännvidd och pilhöjd ( $f/l = 0.20$ ). Man tycks kunna urskilja ett visst förhållande mellan  $q_{crit}$  och  $l^2$  vilket kan förklaras med att instabilitetslasten är mycket beroende av knäckningen vinkelrätt bågens plan (se ekvation 2.1 på sida 4).



Figur 6.6: Hur den kritiska lasten varierar med spännvidden för båge  $0.19 \times 1.8 \times 1 \text{ m}^3$



### 6.3.2 Krympning/förstoring av standardbågen

Att förändra enbart limträbågens spännvidd är inte särskilt praktiskt relevant eftersom bågar med mindre spännvidd självklart också har mindre tvärsnittsdimension. Intressant vore dock att se ifall det går att krympa eller förstora grundgeometrin på ett sådant sätt att den kritiska lasten blir den samma för alla spännvidder. Ett alternativ är att krympa tvärsnittsarean proportionellt mot spännvidden. Detta blir dock inte så användbart när det faktiskt är stabiliteten vinkelrätt bågens plan som är avgörande. Dock hittades ett samband där tvärsnittet istället krympts med avseende på ett förhållande mellan bredden i kubik,  $b^3$  och spännvidden i kvadrat,  $l^2$ , d.v.s.  $b^3$  sattes proportionell mot  $l^2$ . Förhållandet mellan bredd och höjd för tvärsnittet sattes konstant så att det verkligen kan ses som en krympning/förstoring av bågen:

$$\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^3 = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \quad \text{och} \quad \frac{b_1}{h_1} = \frac{b_2}{h_2} \quad (6.3)$$

vilket ger:

$$b_2 = \frac{b_1}{\sqrt{\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2}} \quad \text{och} \quad h_2 = \frac{b_2 \cdot h_1}{h_1} \quad (6.4)$$

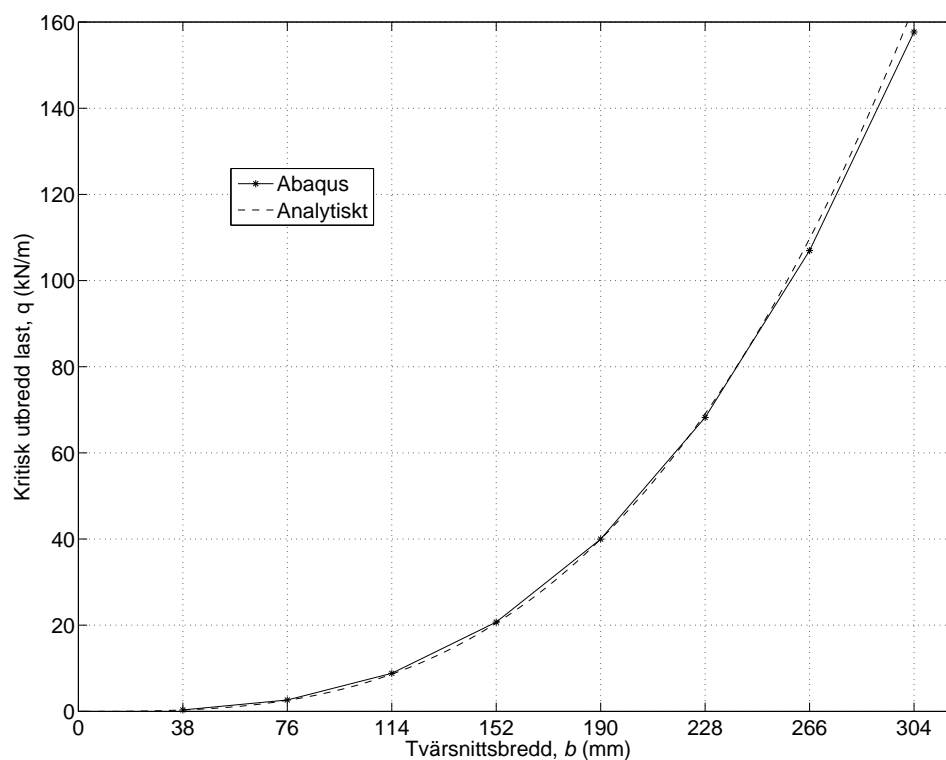
Om dessa förhållanden appliceras på grundgeometrin för att räkna ut tvärsnittsmått för ett antal olika spännvidder fås tvärsnitt enligt tabell 6.1. Instabilitetslasterna blir inte identiska men ändå nära konstanta trots stor ändring av bågens storlek.

Tabell 6.1: *Tvärsnitt med liknande kritiska laster*

Spännvidd (m)	Tvärsnitt (mm <sup>2</sup> )	$q_{crit}$ (kN/m)
30	120x1134	41.2
40	145x1374	40.9
50	168x1594	40.4
<b>60</b>	<b>190x1800</b>	<b>40.0</b>
70	211x1995	39.6

### 6.3.3 Tvärsnittsbredd

Då bredden varierar för en båge bör den kritiska lasten variera med bredden i kubik,  $b^3$ , eftersom att både vrid- och böjstyvheten beror av detta förhållande. Det vill säga att den kritiska lasten är ungefär åtta gånger så hög för en båge med dubbelt så stor tvärsnittsbredd. Som kan ses i figur 6.7 verkar analyserna i Abaqus ge en bra verifiering för denna teori. Vid väldigt breda tvärsnitt blir det till slut tal om knäckning i planet, ett sådant tvärsnitt är dock inte praktiskt relevant.

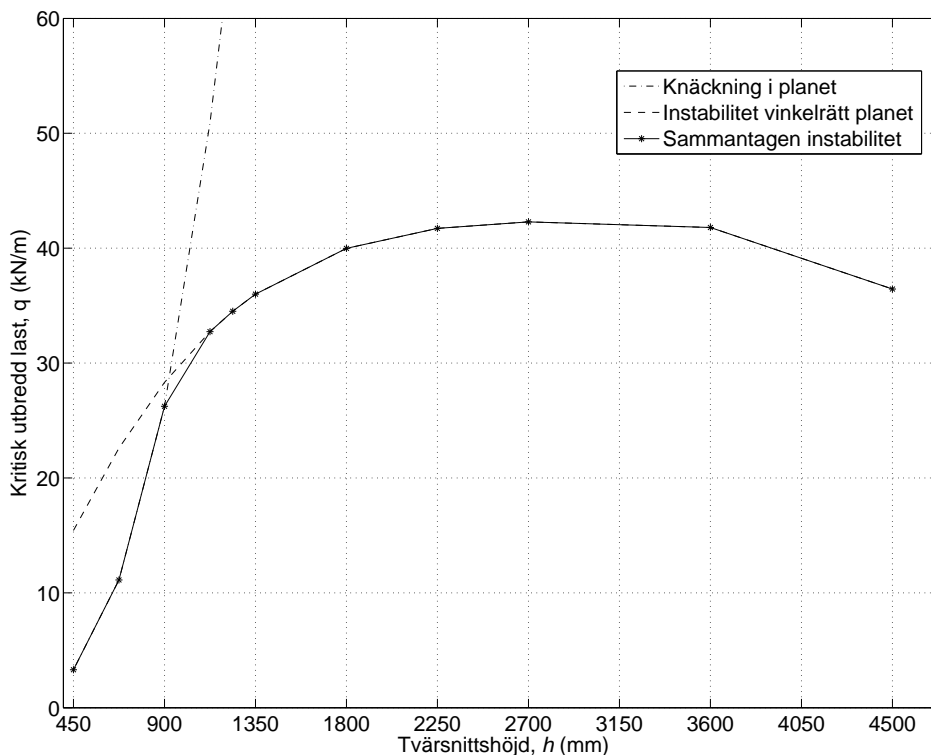


Figur 6.7: Hur den kritiska lasten varierar med bredden för båge  $b \times 1.8 \times 60 \text{ m}^3$

### 6.3.4 Tvärsnittshöjd

Som visas i figur 6.8 finns det för tvärsnittshöjden inte ett lika enkelt samband som det finns för höjdens inverkan på instabiliteten för raka balkar (se avsnitt 5.2.2). Anledningen till detta är framför allt att en rak balk inte anses uppta några tryckande normalkrafter som minskar stabiliteten p.g.a. knäckning. För en båge får man precis som för en rak balk en låg stabilitet vid höga tvärsnitt eftersom att vippningsrisken är hög. Däremot blir stabiliteten inte linjärt ökande då tvärsnittshöjden minskar som hos en rak balk eftersom att knäckningen får en större inverkan på det tryckta, låga tvärsnittet. Dessa två faktorer medför att man kan finna en bestämd höjd för tvärsnittet då instabilitetsrisken är som minst. Som visas i figur 6.8 kan dock detta nära nog beskrivas inom ett visst intervall som täcker in de mest relevanta förhållandena mellan tvärsnittshöjd och bredd. Detta resulterar alltså i att det för grundgeometrin ger snarlika instabilitetslaster för tvärsnittshöjder mellan 2 och 4 meter.

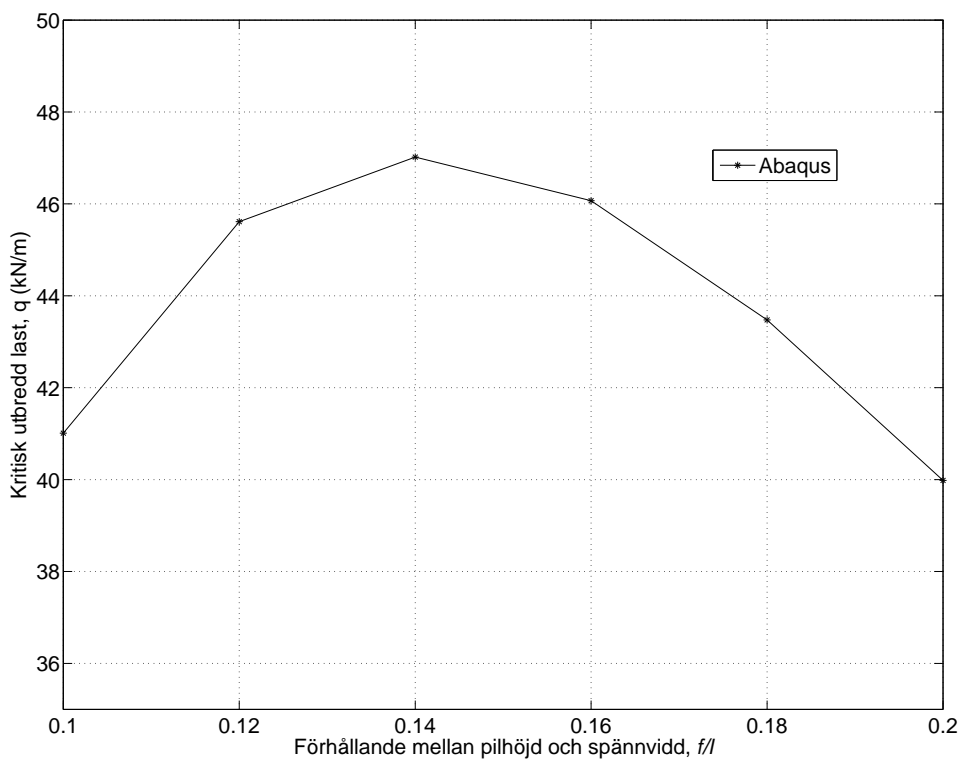
Viktigt att notera som också kan ses i figur 6.8 är att det vid väldigt låga höjder är instabiliteten i bågens plan som blir avgörande.



Figur 6.8: Hur den kritiska lasten varierar med höjden för båge  $0.19xh \times 60$  m<sup>3</sup>

### 6.3.5 Pilhöjd

Desto lägre pilhöjden är i förhållande till spännvidden, desto större tryckande normalkrafter uppstår i bågtvärsnittet. Sålades kommer alltså normalkraften i bågen att minska då pilhöjden ökas men momentet blir desto högre. Hur den kritiska lasten varierar som funktion av förhållandet mellan pilhöjd och spännvidd ( $f/l$ ) syns i figur 6.9. Intressant att notera är att ett toppvärde kan finnas vid förhållandet  $f/l = 0.14$ , det finns alltså här en bra balans mellan normalkraft och moment i bågen.



Figur 6.9: Hur den kritiska lasten varierar med  $f/l$  för båge  $0.19 \times 1.8 \times 60 \text{ m}^3$

### 6.3.6 Träets styvhetsvärden

Liksom för raka balkar kan det vara intressant att undersöka hur stor inverkan träets styvhetsparametrar har på instabilitetslasten. Enligt balkteorin är det bara elasticitetsmodulen i fiberriktningen (longitudinella riktningen),  $E_L$  samt skjuvmodulen för de två planen parallellt med denna som inverkar och således kan undersökning göras enbart för dessa då balkelement används.

En instabilitetsanalys för grundgeometrin genomförs med stabiliseringar som ger den en kritisk utbredd last på 40 000 N/m. Samma analys genomförs därefter för samma båge men med förändringar enligt nedan, med resultat enligt tabell 6.2. *Andel* beskriver hur stor andel av ursprunglig instabilitetslast man får vid respektive parameterjustering.

1.  $E_L, G_{RL}$  och  $G_{LT}$  minskas till en tiondel av ursprungsvärdet
2.  $E_L$  minskas till en tiondel av ursprungsvärdet
3.  $G_{RL}$  minskas till en tiondel av ursprungsvärdet
4.  $G_{LT}$  minskas till en tiondel av ursprungsvärdet

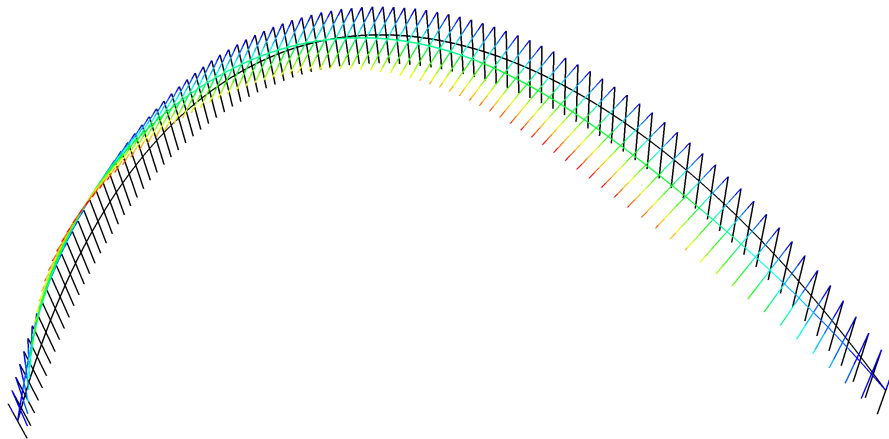
Tabell 6.2: *Materialstyvheternas inverkan på instabiliteten*

Beräkning nr.	$q_{crit}$	<i>Andel</i>
1	4 000	10.0%
2	21 089	52.7%
3	8 496	21.2%
4	39 962	99.9%

Liksom för raka balkar kan man se att då alla styvhetsvärden förändras lika mycket så ändras också instabilitetslasten linjärt mot dessa.

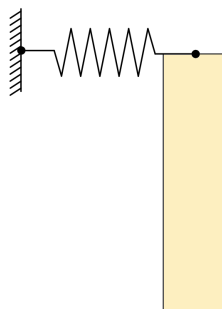
## 6.4 Stabiliseringar vid jämsymmetrisk belastning

Anslutningen mellan båge och sekundärbärverk eller takbeklädnad är ofta det som avgör ifall bågen blir instabil eller inte. Utan någon som helst stagning vinkelrätt bågens plan finns så gott som ingen sidostabilitet vid långa spännvidder. Således kommer här undersökas hur stor inverkan anslutningarna har för instabiliteten för typgeometrier. Beräkningar kommer göras för varierande  $c/c$ -avstånd mellan stabiliseringarna och för olika fjäderstyvheter. Då en båge som endast är stabiliserad för deformationer vinkelrätt bågens plan i överkant belastas med en jämsymmetrisk last blir utböjningsformen liknande den i figur 6.10 som visar hur den ostagade underkanten böjer ut.



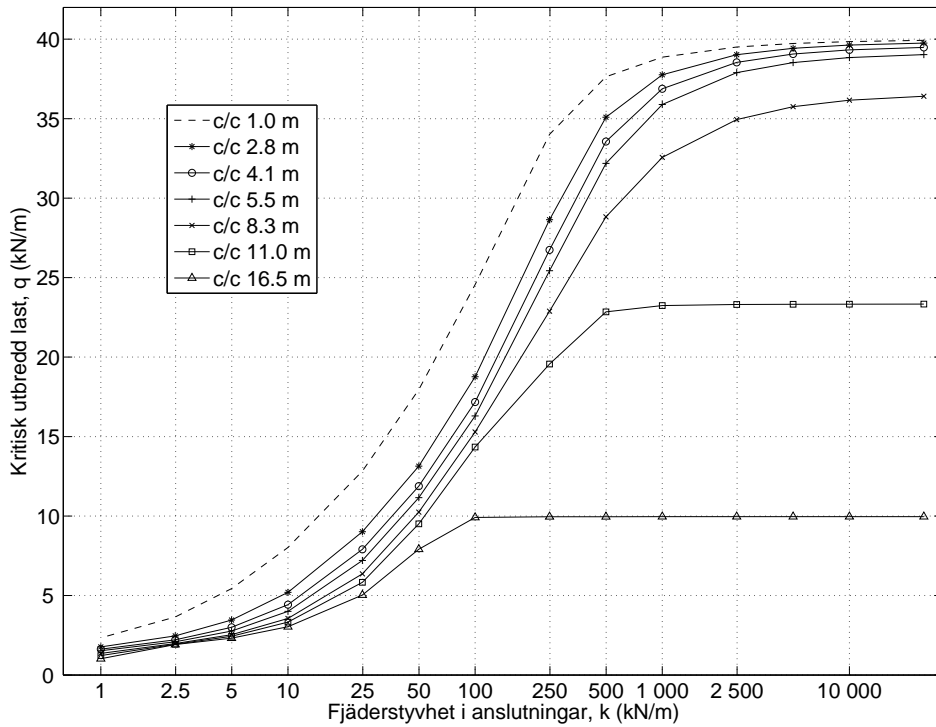
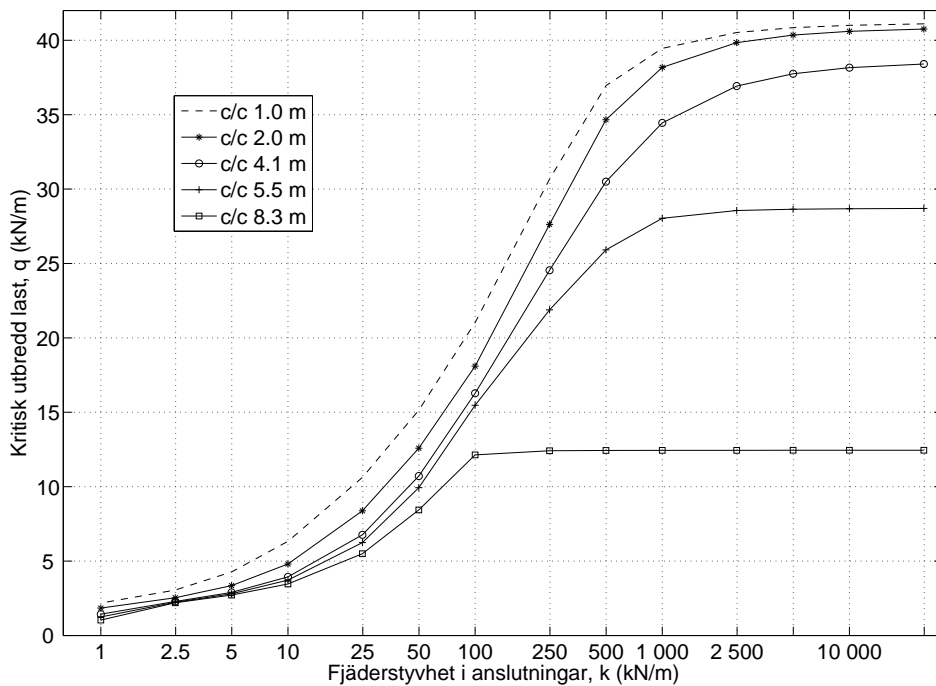
Figur 6.10: *Utböjningsform vid jämsymmetrisk belastning och stabilisering av bågens överkant, bågens underkant böjer ut, odeformerad geometri visas i bakgrunden, rött = stor utböjning, blått = liten utböjning*

### Stabilisering vinkelrätt bågens plan



Figur 6.11: *Bågtvärsnitt stabiliserat i överkant för att förhindra deformationer vinkelrätt bågens plan*

I figur 6.12(a) och 6.12(b) redovisas hur stor inverkan  $c/c$ -avstånd och överkantsanslutningarnas fjäderstyvhet har på instabilitetslasten för två olika båggeometrier.

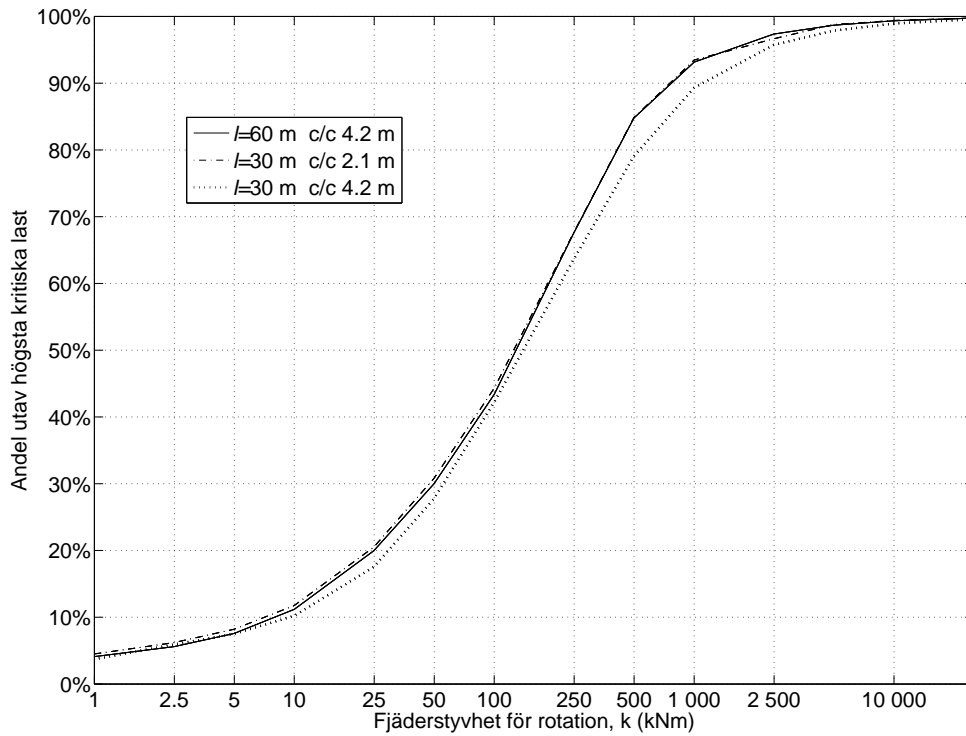
(a) *Båge 0.12x1.13x30m<sup>3</sup>*(b) *Båge 0.12x1.13x30m<sup>3</sup>*Figur 6.12: *Kritiska laster för två bågar mot fjäderstyvheten vinkelrätt bågens plan*

Ur resultaten i figur 6.12(a) och 6.12(b) kan man urskilja ett par intressanta mönster. Bågarna har, som framgick i avsnitt 6.3.2, en högsta möjlig kritisk last på ca 40 kN/m då dess anslutningar mot sekundärbärverk sitter tätt och är helt låsta vinkelrätt bågens plan. Denna utbredda last är alltså den högsta denna båge kan utsättas för om bara överkanten stabiliseras vinkelrätt bågens plan eftersom att instabiliteten av bågens underkant blir avgörande vid laster över denna. Viktigt att notera är dock att det är möjligt att uppnå nästan samma stabilitet som vid total låsning då anslutningarna placeras relativt tätt och med en fjäderstyvhet vinkelrätt bågens plan om  $k \approx 1000$  kN/m.

Intressant att notera är också att vid de väldigt långa avstånden mellan anslutningarna konvergerar resultatet mot specifikt värde långt under de värden man uppnår vid tät placering. Kontroller visar att den last som resultatet konvergerar mot ger en normalkraft i bågen som motsvarar ett värde nära Eulerknäckningslasten för en rak tryckt sträva med samma tvärsnitt som bågarna. Som ett exempel verkar bågen i figur 6.12(a) konvergera vid ca 10 kN/m då anslutningarna ligger på c/c 16.5 m. Denna utbredda last över bågen ger enligt ekvation 3.11 på sida 22 en normalkraft på ungefär 480 kN. Detta ska jämföras med knäckningslasten för en tryckt sträva med samma tvärsnitt som bågen och en längd av 16.5 m som är 485 kN.

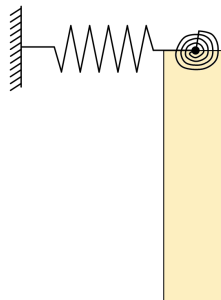
En annan kontroll som det kan vara intressant att göra är hur olika bågar relaterar till varandra vad gäller anslutningsstyvheter. För att visa detta gjordes diagrammet i figur 6.13. Man har här tagit fram hur stor del av stabiliteten som finns kvar i bågen vid givna styvheter och sedan jämfört de båda bågarna. Resultatet är som synes att en mycket god överrensstämmelse finns mellan bågen som har 60 meter spännvidd med c/c-avstånd på 4.2 meter och bågen med 30 meter spännvidd och ett c/c-avstånd på 2.1 meter. Detta stärker alltså teorin om att en krympning av systemet ger samma beteende.





Figur 6.13: Förhållande mellan olika bågar och avstånd mellan dess anslutningar

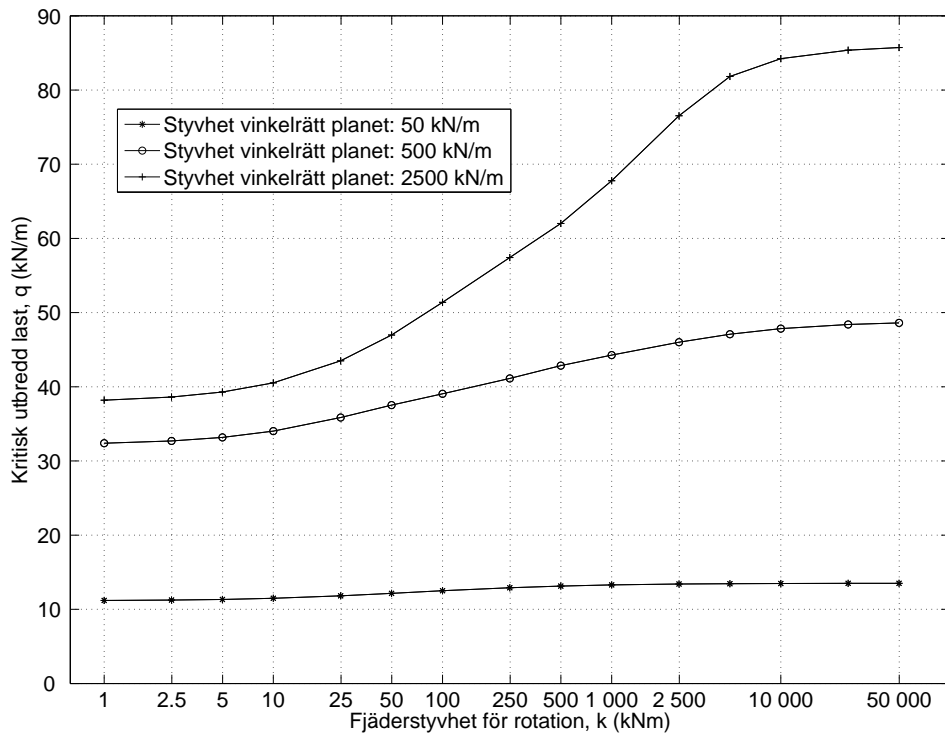
### Stabilisering med momentstyva anslutningar i bågens överkant



Figur 6.14: Bågtvärnsnitt stabiliserat i överkant för att förhindra deformationer vinkelrätt bågens plan samt vridning

Eftersom att bågarna har nästan obefintlig stabilitet då ingen stabilisering finns vinkelrätt bågens plan måste man vid kontroll av momentstyva anslutningar anta att någon sorts samverkan finns mellan stabilisering vinkelrätt bågens plan och momentstyvhet. Grundgeometrin studerades och c/c-avståndet mellan anslutningarna sattes till 5.5 m. Tre fjäderstyvheter vinkelrätt bågens plan ansattes och för var och

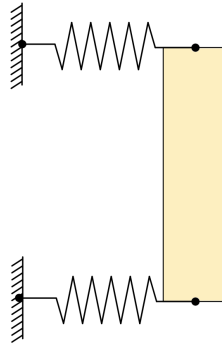
en av dessa varierades sedan momentstyvheter. Resultatet från analyserna visas i figur 6.15.



Figur 6.15: *Kritisk utbredd last som funktion av momentstyvhetsen i överkantsanslutningarna för båge  $0.19 \times 1.8 \times 60$  m<sup>3</sup> vid c/c 5.5 m, jämsymmetrisk belastning*

Man kan ganska tydligt se vissa mönster i resultaten i figur 6.15. Det verkar som att desto styvare anslutningen vinkelrätt bågens plan görs desto större effekt får också momentstyvhetsen. Då styvhetsen vinkelrätt bågens plan är låg påverkas resultatet minimalt av en ökad momentstyvhets vilket understryker vikten av en stabil anslutning vinkelrätt bågens plan hellre än en momentstyv.

## Stabilisering med extra anslutningar i bågens underkant

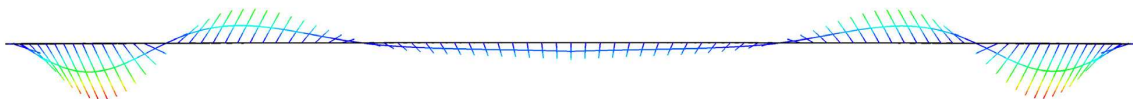


Figur 6.16: Bågtvärsnitt stabiliserat i överkant och underkant för att förhindra deformationer vinkelrätt bågens plan samt vridning

En lite enklare metod att förhindra vridning av tvärsnittet är att man stabiliserar bågtvärsnittet även i underkant istället för att göra anslutningen i överkant momentstyv. I tabell 6.3 nedan visas resultatet för en analys med en sådan stabilisering för två båggeometrier. Bågens hela överkant anses helt stabiliserad för deformationer vinkelrätt bågens plan och de enstaka anslutningarna i bågens underkant anses också de helt låsta. Dessa underkantsstabiliseringar placeras jämnt fördelat i respektive båghalvas underkant. Bågens principiella utböjningsform kan ses i figur 6.17 vid 2 låsningar i respektive båghalva.

Tabell 6.3: Kritiska utbredda laster vid fullständig låsning av bågens överkant (vinkelrätt bågens plan) och ett varierande antal låsningar i bågens underkant

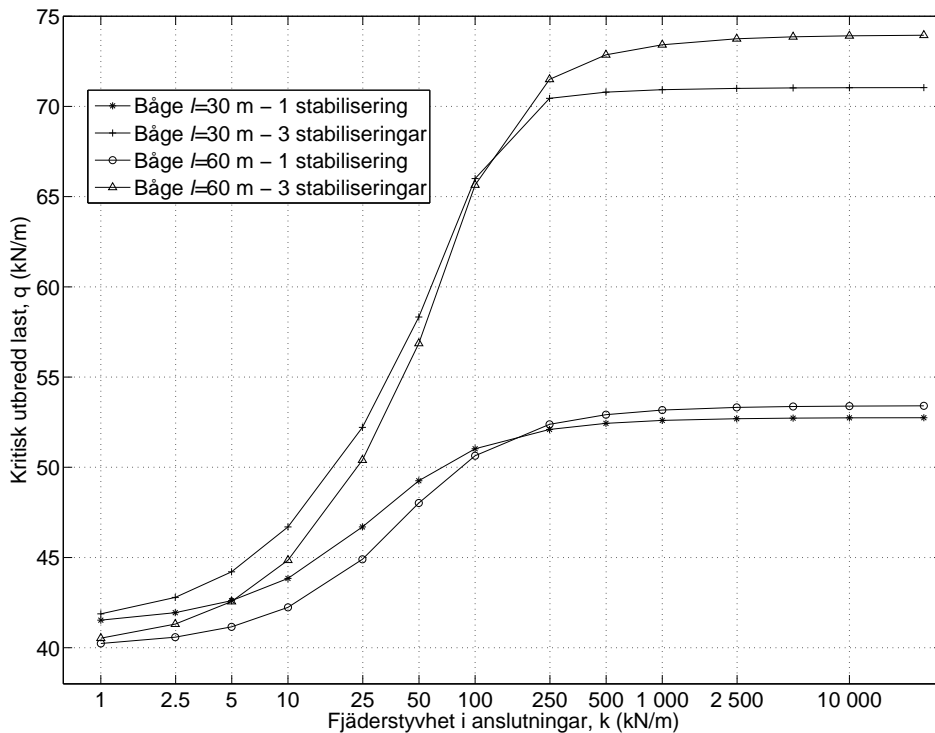
Antal låsningar	0.12x1.13x30 m <sup>3</sup> , $q_{crit}$ (N/m)	0.19x1.8x60 m <sup>3</sup> , $q_{crit}$ (N/m)
0	41246	39949
1	52753	53417
2	63808	63873
3	71046	73966
4	76056	85480



Figur 6.17: Utböjningsform vid jämsymmetrisk belastning för överkantstabiliserad båge med totalt fyra låsningar i underkant (vy ovanifrån), rött = stor utböjning, blått = liten utböjning

I tabell 6.3 ses fördelarna med att stabilisera en båge med ett antal anslutningar i underkant, redan vid 4 anslutningar per båghalva får man en stabilitet på ungefär

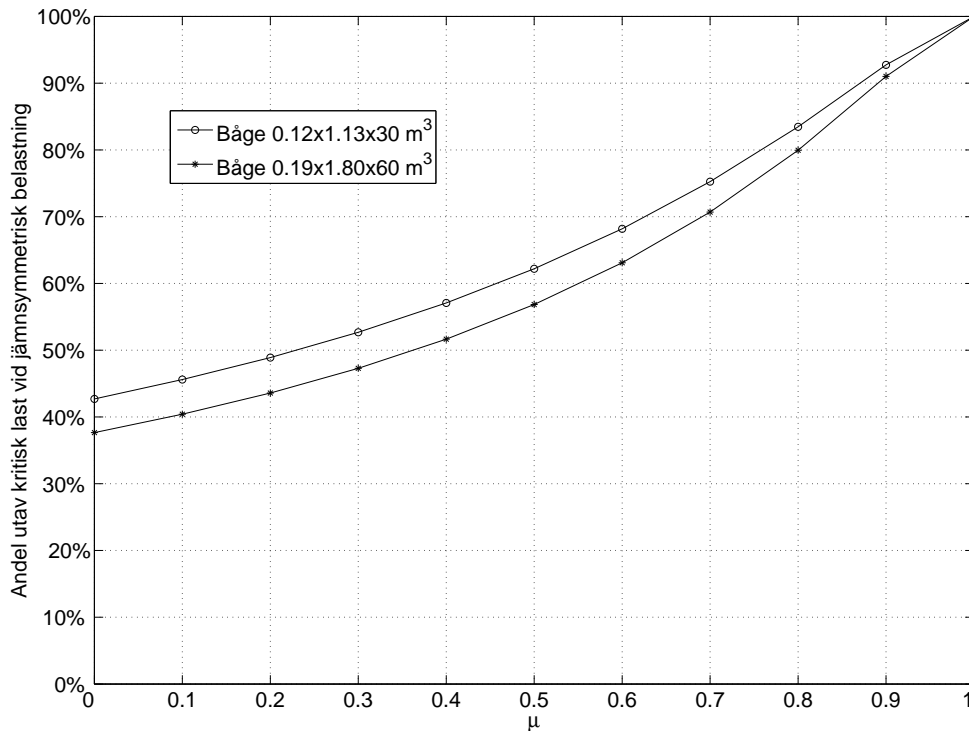
den dubbla jämfört med en endast överkantsstabiliserad båge. I figur 6.18 kan ses hur styva anslutningarna behöver vara, intressant att notera är att redan vid en fjäderstyvhet på  $k \approx 250$  kN/m fås väldigt goda resultat.



Figur 6.18: *Kritiska utbredda laster mot styvheten i underkantsstabiliseringen för två jämsymmetriskt belastade, fullständigt överkantsstabiliserade bågar*

## 6.5 Stabiliseringar vid osymmetrisk belastning

Som nämnts tidigare kan man vid osymmetrisk belastning få väldigt höga moment i den ena båghalvan vilket medför ett väldigt högt tryck i bågtvärsnittets underkant. Då denna del av bågen sällan är stagad utav någon sekundärkonstruktion eller beklädnad är också instabilitetsfenomenet som allvarligast här. I figur 6.19 på nästa sida visas hur stor andel av den kritiska lasten vid jämsymmetrisk belastning som kvarstår vid en osymmetrisk belastning med varierande fördelning, d.v.s.  $\mu$  varierar (se figur 3.5 på sida 21). Bågarna är helt stabiliserad i sin överkant och enligt tidigare är den maximala kritiska lasten vid jämsymmetrisk belastning ca 40 kN/m. Tilläggs ska att ett  $\mu$  på mindre än 0.5 sällan är att beakta.

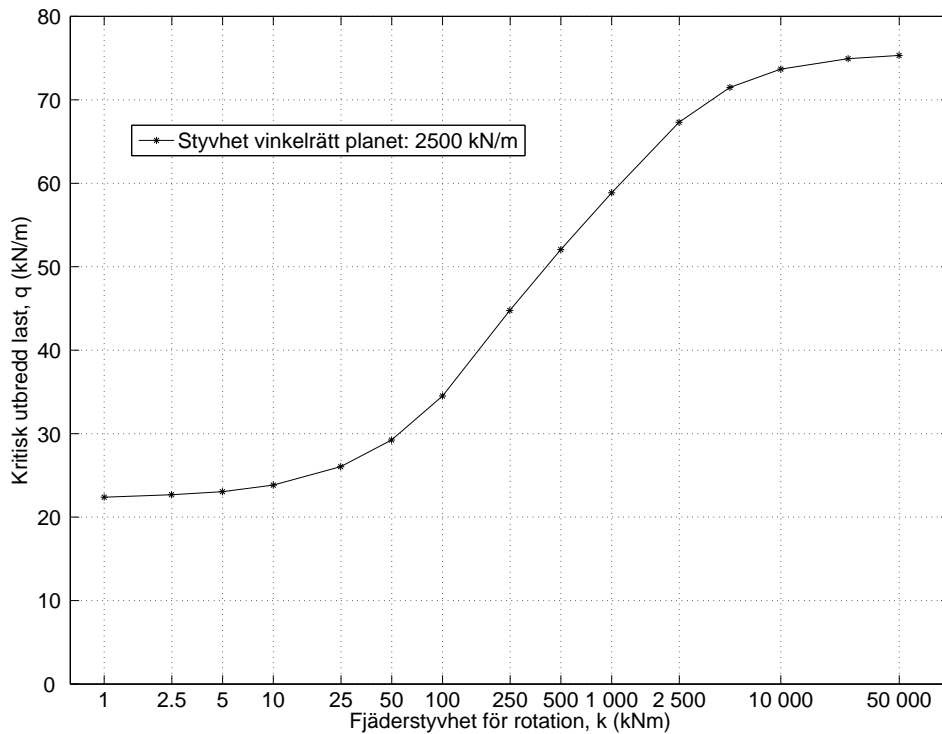


Figur 6.19: Inverkan av  $\mu$  för två bågar

Intressant att notera från figur 6.19 är att de båda kurvorna är väldigt lika men att bågen med kortare spännvidd hanterar en osymmetrisk belastning bättre.

### Stabilisering med momentstyva anslutningar

Problemet vid en osymmetrisk belastning är som nämnts tidigare att bågens ostagade underkant löper väldigt stor risk att böja ut p.g.a. att momentet ger väldigt stora tryckande krafter här. Detta problem skulle dock kunna motverkas om anslutningen mot sekundärbärverket eller beklädnaden i bågens överkant stabiliseras mot vridning. I figur 6.20 visas hur momentstyv en sådan anslutning behöver vara för ett fall där fjäderstyvheten för böjning vinkelrätt bågens plan samtidigt är väldigt hög. I exemplet har anslutningarna placerats med ett c/c-avstånd på ca 5.5 meter och lasten är dubbelt så stor i den ena båghalvan än den andra, d.v.s.  $\mu=0.5$ .



Figur 6.20: *Kritisk utbredd last som funktion av momentstyvheter i överkantsanslutningarna för båge  $0.19 \times 1.8 \times 60$  m<sup>3</sup> vid  $c/c$  5.5 m, osymmetrisk belastning*

I figur 6.20 ovan ser man att låga momentstyvheter i bågens överkant inte medför någon större ökning av stabiliteten. Däremot medför väldigt höga momentstyvheter en god stabilisering som i detta exempel gör bågerna mer än tre gånger så stabil jämfört med då endast stabilisering vinkelrätt bågens plan används. Vid dessa höga styvheter kan bågerna nära på anses gaffellagrad och utböjning sker således enbart mellan anslutningarna i bågens underkant. Sammanfattningsvis ger denna typ av stabilisering väldigt bra stagnering vid höga styvheter precis som vid jämn belastning.

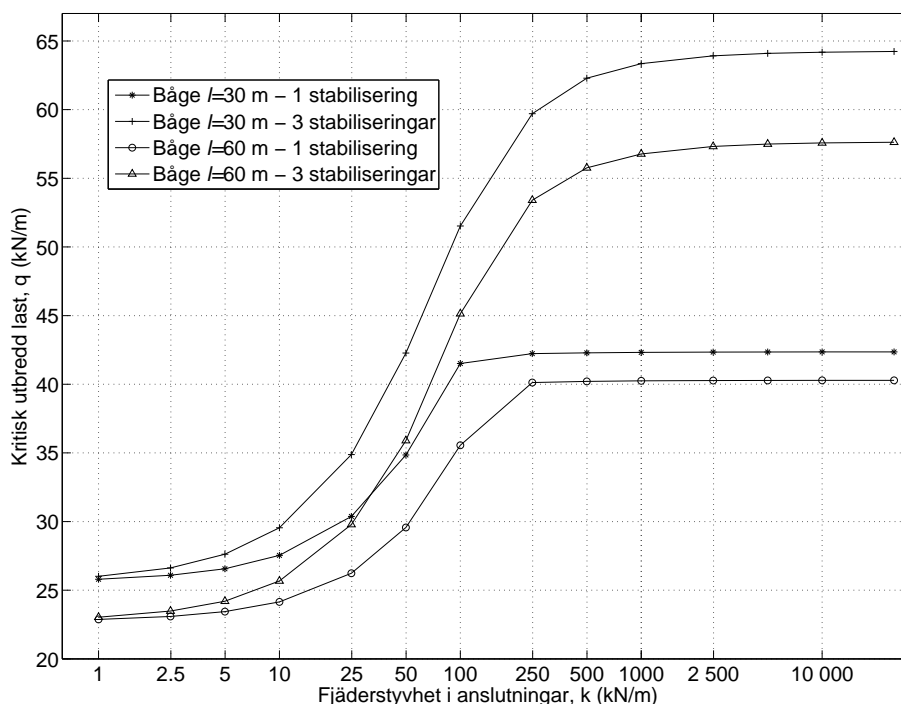
### Stabilisering av bågens underkant

Även för en osymmetriskt belastad båge är det enklare att direkt stabilisera den tryckta underkanten. Två underkantsstabiliserade exempelbågar har undersökts med resultat enligt tabell 6.4 för standardfallet då lasten är dubbelt så stor i den ena bågshalvan än den andra ( $\mu=0.5$ ) och fullgod stabilisering av bågens överkant finns. Låsningarna avser totala låsningar jämnt fördelade längs respektive bågshalvas underkant, inga låsningar vid stöd eller nock.

Tabell 6.4: *Kritiska utbredda laster vid ett visst antal låsningar av bågens underkant per båghalva,  $\mu=0.5$*

Antal låsningar	0.12x1.13x30 m <sup>3</sup> , $q_{crit}$ (N/m)	0.19x1.8x60 m <sup>3</sup> , $q_{crit}$ (N/m)
0	25603	22729
1	42357	40285
2	52586	48373
3	64271	57661
4	75910	64527

Utifrån resultatet i tabell 6.4 ovan kan man tydligt se hur stor betydelse stabiliseringen av bågens underkant har. I båda fallen får man en ökning av stabiliteten på nära den dubbla då man stabiliserar den i en punkt och tre gånger den ursprungliga med fyra stycken helt låsta anslutningspunkter (för en båge med spännvidden 60 m motsvarar detta ett c/c på ca 6.6 m). I figur 6.21 nedan visas hur styva stabiliseringarna behöver vara för att få god stabilitet.



Figur 6.21: *Kritiska utbredda laster mot styvheten i underkantsstabiliseringen för två osymmetriskt belastade bågar,  $\mu = 0.5$*

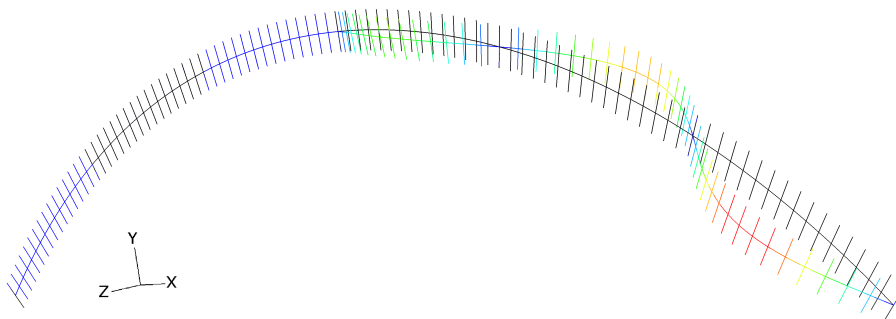
Utifrån resultaten i figur 6.21 ser man att styvheterna har ungefär samma betydelse för en båge med lång spännvidd som en med en lite kortare. Man kan också utläsa att man vid en styvhet om ca  $k \approx 250$  kN/m får en väldigt god stabilisering.

## 6.6 Jämförelse analytiska beräkningsmetoder och FEM

Som nämndes i avsnitt 6.1 kan det vara möjligt att få fram en approximativ lösning för instabilitetslasten om man förutsätter att stabiliseringen i bågens överkant är tillräckligt styv både vinkelrätt bågens plan och för vridning. Alternativt att bågen stabiliseras tillräckligt i både över- och underkant. Förutsatt att man vet vilka maximala laster konstruktionen utsätts för kan man räkna ut dess maximala snittkrafter och sedan använda dessa för att approximativt ta fram ett minsta  $c/c$ -avstånd mellan de stabiliserande anslutningarna. Viktigt att tänka på att det inte alls är säkert att instabiliteten sker just där snittkrafterna har sina högsta värden. Dessa värden kan uppstå vid stabiliserande anslutning vilket gör att ingen instabilitet kan ske just här. Snittkrafter i samma storleksordning gäller dock över ett ganska långt område vilket gör att metoden trots detta bör stämma ganska bra.

### Jämnsymmetrisk belastning

Vid symmetriska laster uppstår som nämnts tidigare ett moment som gör underkanten tryckt samtidigt som även normalkraften tillför ett tryck i bågens underkant. Takåsar eller liknande är ofta tätt placerade i bågens överkant samtidigt som det i bågens underkant finns inga eller få anslutningar. Vid goda anslutningsförhållande kommer alltså bågen böja ut mellan anslutningarna i bågens underkant. I figur 6.22 visas utböjningsformen för jämnsymmetrisk belastning då bågen är stabiliserad i 2 punkter i över- och underkant i vardera båghalva. Som synes verkar knäckningen utav bågtvärsnittet vara den avgörande instabilitetsfaktorn, alltså ger de relativt låga moment som uppkommer vid jämnsymmetrisk belastning ingen större vridning av tvärsnittet.



Figur 6.22: *Utböjningsform för under- och överkantsstabiliserad båge vid jämnsymmetrisk belastning, rött = stor utböjning, blått = liten utböjning*

Tre fall studerades där grundgeometrin stabiliserades med 2, 3 respektive 4 helt styva stabiliseringar på lika centrumavstånd i bågens överkant samt underkant. Analys



utfördes i Abaqus där instabilitetslasterna togs fram vid användning av de olika  $c/c$ -avstånden. Dessa laster användes sedan för att med hjälp av programmet Ramanalys ta fram de maximala momenten,  $M_{max}$  i bågen med tillhörande normalkraft,  $N_{tillh.}$  enligt första ordningens teori. Utifrån detta gick det att med hjälp av ekvation 5.14 på sida 52 få fram den kritiska längden för en rak balk utsatt för dessa snittkrafter. *Error* beskriver den procentuella skillnaden mellan det  $c/c$ -avstånd som används vid analys i Abaqus och den analytiskt uträknade kritiska längden:

$$Error = \frac{L_{crit} - c/c}{c/c}$$

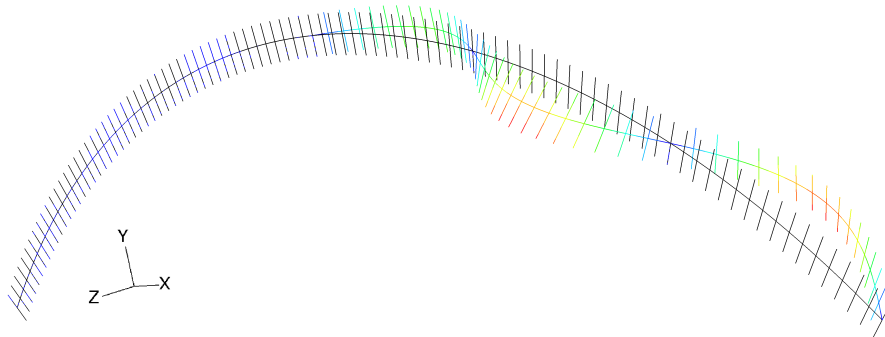
Tabell 6.5: Jämförelse mellan FEM-lösning i Abaqus och analytisk metod,  $q_{crit}$  avser kritisk utbredd last i Abaqus

låsningar	$c/c$ (m)	$q_{crit}$ (kN/m)	$M_{max}$ (kNm)	$N_{tillh.}$ (kN)	$L_{crit}$ (m)	<i>Error</i>
2	11.0	25.1	323	1150	11.6	+5%
3	8.3	43.3	559	1987	9.4	+13%
4	6.6	64.7	834	2965	8.2	+24%

I tabell 6.5 ovan syns resultatet för jämförelse mellan FEM och den analytiska approximationen. Som man kan se är resultatet något avvikande men ligger i rätt storleksordning. Dessvärre blir den kritiska längden enligt den analytiska metoden något högre än vid FEM-analysen vilket blir på den osäkra sidan. Approximationen verkar också bli mer osäker desto mindre  $c/c$  avstånd som används.

### Osymmetrisk belastning, $\mu=0.5$

Vid osymmetrisk belastning och enstaka stabiliseringar i överkant och underkant blir vridningen mer omfattande eftersom att ett större moment uppstår. Dock kan instabilitet först ske i bågens överkant om  $c/c$  avstånden är väldigt stora eftersom att det omvända momentet ger stora tryckkrafter här och överkanten är längre än underkanten. Vid jämförelsen så användes dock de snittkrafter för vilken underkanten böjer ut. För utböjning av bågens underkant blir utböjningsformen som i figur 6.23 på nästa sida. Samma kontroll som för bågen utsatt för en symmetrisk belastning gjordes nu istället med en osymmetrisk belastning med resultat enligt tabell 6.6.



Figur 6.23: Utböjningsform vid osymmetrisk belastning för underkantsstabiliserad båge, rött = stor utböjning, blått = liten utböjning

Tabell 6.6: Jämförelse mellan analytisk lösning och FEM för osymmetrisk belastning

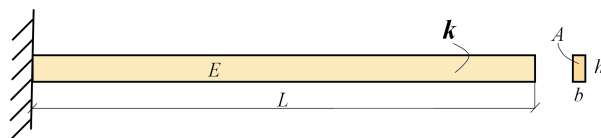
låsningar	$c/c$ (m)	$q_{crit}$ (kN/m)	$M_{max}$ (kNm)	$N_{tillh.}$ (kN)	$L_{crit}$ (m)	Error
2	11.0	28.7	1093	924	10.8	-2%
3	8.3	46.7	1880	1590	8.1	-3%
4	6.6	60.4	2302	2722	6.6	0%

Ovan ses att jämförelsen ger goda resultat för instabilitet vid osymmetrisk belastning. Anledningen till att resultaten blir bättre vid en ojämn belastning kan vara den att det mycket högre momentet som uppstår blir avgörande. Det är åtminstone en stor fördel att just den osymmetriska belastningen ger bäst resultat eftersom att denna blir dimensionerande för bågar utsatta för snölast.

## 6.7 Hur styv är en typisk anslutning?

För att få en viss inblick i hur styva anslutningar kan vara i en normal konstruktion görs två enklare kontroller för hur stor fjäderstyvhet man kan tillgodoräkna sig i en takås, samt i en anslutning med vinkelbeslag.

### 6.7.1 Styvhet hos takås



Figur 6.24: Fjäderstyvhet,  $k$  hos takås

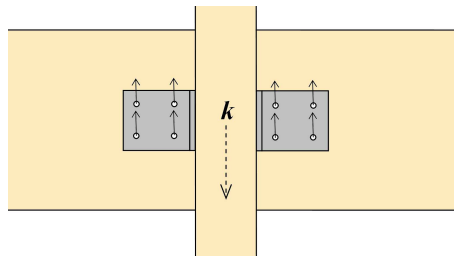
Konstruktionen anses vara stabiliserad på ett sådant sätt att verkningslängden för en takås med tvärsnittsmåttet  $bxh=45 \times 220 \text{ mm}^2$  kan sättas till 10 meter. Takåsen

är helt stabiliserad med takbeklädnad vilket gör att enbart fjäderkapaciteten för hoptryckning/utdragning blir aktuell. Med en elasticitetsmodul i fiberriktningen på 13 GPa kan nu fjäderstyvheten beräknas:

$$k = \frac{EA}{L} = 12\,900 \text{ kN/m}$$

Denna styvhet medför enligt tidigare analyser en väldigt god stabilisering.

### 6.7.2 Styvhet hos spikbeslag



Figur 6.25: Fjäderstyvhet,  $k$  hos spikbeslag

Anslutning mot takåsar sker ofta med vinkelbeslag som i sin tur fästs i ås och primär-balk med s.k. kamspik. En typisk anslutning kan se ut så att en vinkel placeras på båda sidor om åsen (se figur 3.13(a) på sida 27) med fyra kamspik i vardera anliggningsyta. Det som stabiliserar bågen vinkelrätt bågens plan blir nu förutom takåsens styvhet, tvärkraftskapaciteten hos dessa totalt 8 kamspik (två anläggningsytor upp-tar de krafter som uppstår vinkelrätt bågens plan). Om man förutsätter att en typisk kamspik benämnd 28/60 (2.8 mm i diameter och 60 mm lång) används kan man räkna ut fjäderstyvheten om tvärkraftskapaciteten är känd. Enligt Trækonstruktioner - Forbindelser [11] är maximal tvärkraftskapacitet för en spik av nämnda dimensioner 0.43 kN. Här kan också med hjälp av arbetskurva för en vanlig trä/spik-infästning utläsas att då tvärkraftskapaciteten är utnyttjad till 40% ( $F/F_{max}=0.4$ ) har en deformation,  $\delta$  på ca 0.7 mm skett. Då deformationerna är någorlunda linjär mot kraften upp till denna nivå kan en approximativ fjäderstyvhet beräknas:

$$k = n \cdot \frac{F}{\delta} = 8 \cdot \frac{0.4 \cdot 0.43}{0.7} = 1.65 \text{ kN/mm} = 1\,650 \text{ kN/m}$$

Denna uträkning är grovt överslagsmässig men visar ändå att en relativt enkel infästning kan ge god stabilisering.

Momentstyvheten i beslag av denna typ är dock mer eller mindre försumbar eftersom att kamspiken sitter så pass tätt att de knappast ger något vridningshinder för limträbågen.



# Kapitel 7

## Hallbyggnad i Vikingstad

För att knyta samman instabilitetsproblemet med verkligheten har även en verklig takkollaps studerats. Detta har gjorts för en hallbyggnad i Vikingstad där taket rasade in under den snörika vintern 2009/2010. Taket i fråga har en fackverksliknande konstruktion med två överliggare, en hanbalk samt dragstag utav stål i underkant. Det som skedde med byggnaden var att den rasade in till följd av snölast, men denna last var långt under den som byggnaden var dimensionerad för.

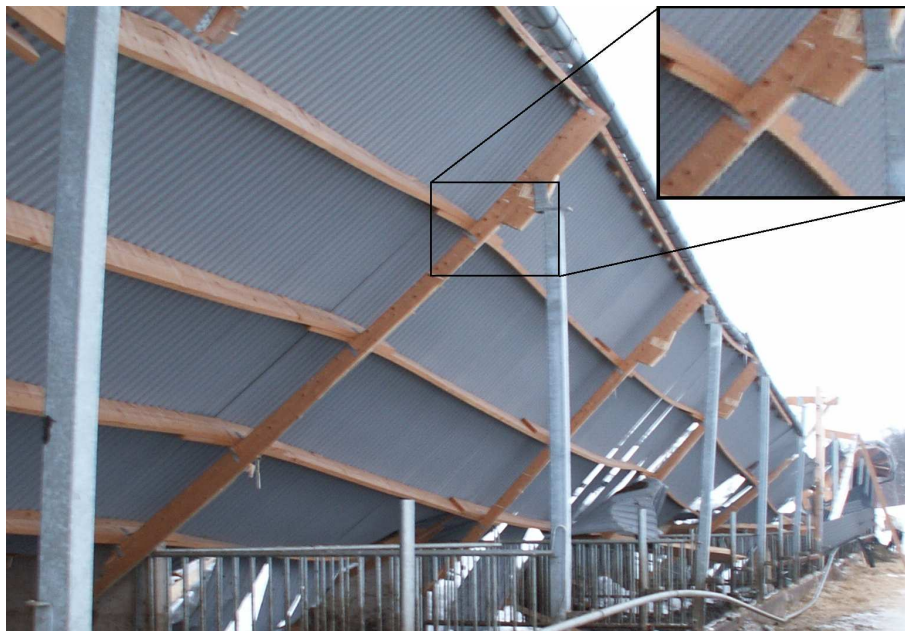
Konstruktören hade enligt konstruktionsritningarna tänkt fästa dragstagen i håltagningar mitt över upplagen. Dock känns idén att göra håltagningar i överliggaren för förankring av dragstag ganska tveksam. Normalt förläggs infästningen av dragstag i överliggarens ände vilket förhindrar vissa av de spänningstoppar man får vid placering i en håltagning. Vid byggnation hade man dock kommit att placera dessa håltagningar en bra bit ifrån upplagets centrum in mot takstolens symmetrilinje och konstruktören menade att detta hade orsakat kollapsen. Man ansåg därför att om detta åtgärdades och byggnaden uppfördes på nytt med en korrekt dragbandsinfästning skulle problemet vara löst. Arne Emilsson på Limträteknik i Falun menade att infästningen bara var ett av problemen i sammanhanget och att raset troligare handlade om ett instabilitetsbrott till följd av att hanbalken böjer ut.

Bilderna på nästkommande sida visar hur byggnaden såg ut efter kollapsen. Man ser i figur 7.2 hur dragbandet varit placerat långt ifrån upplagets mittpunkt och hur nedre delen av överarmen fläkts bort vid kollaps.

Vid mätningar på platsen efter kollapsen framgick att taket belastats med ungefär 40-50 kg/m<sup>2</sup> snölast. Detta motsvarar med ett c/c mellan takstolarna på 6 m en utbredd last på endast 3 kN/m om egentygnderna försummas.



Figur 7.1: Takkollapsen i Vikingstad.

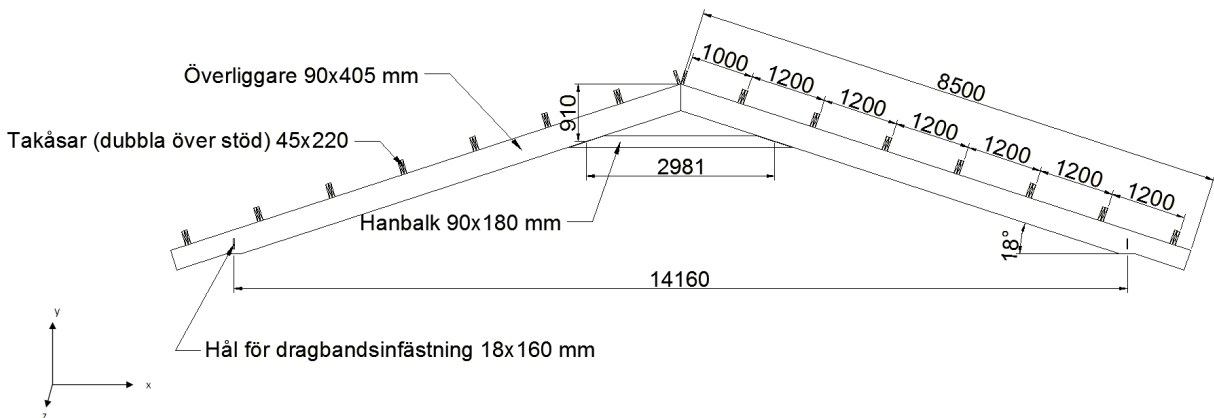


Figur 7.2: Takkollapsen i Vikingstad, felaktig dragstagsinfästning visas.

## 7.1 Geometri, randvillkor och laster

### 7.1.1 Geometri

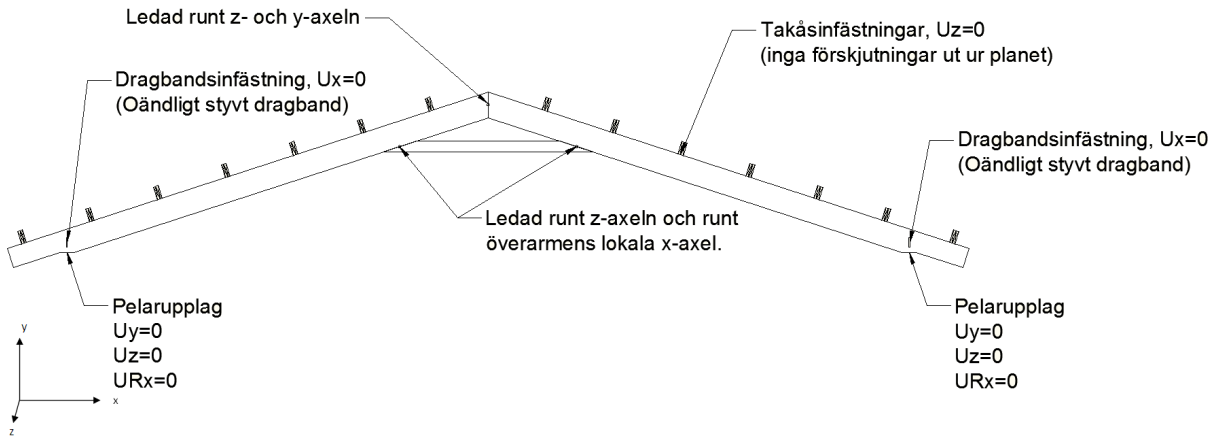
Takstolen är inte helt och hållet symmetrisk, till exempel ansluts den på sin ena sida mot en stålpelare medan den på den andra sidan ansluts mot en träpelare. Längderna på överliggarna är inte de samma och inte heller c/c-avståndet mellan åsarna. Dock har dessa olikheter försumrats för att få en helt och hållet symmetrisk modell. Mått och dimensioner ges enligt figur 7.3, dragstagen placeras där de enligt konstruktören var tänkt de skulle placeras. Materialet antages vara limträ L40 och tilldelas samma styvhetsvärden som i resten av rapporten, se tabell 3.1 sida 18.



Figur 7.3: Geometri för takstolen

### 7.1.2 Randvillkor

Takåsarna anses inte ge någon momentförhindring utan enbart ge en fullständig låsning vinkelrätt takstolens plan. Åsarna antages ge låsning i endast en punkt och inte längs hela dess bredd, detta p.g.a. att de endast är förbundna i dess ena sida med takåsbeslag, en låsning längs hela bredden hade varit gynnsam för stabiliteten. Upplagen i sin tur låses i y- och z-led samt mot rotationer runt x-axeln för att förhindra stelkroppsrörelser. För att symbolisera ett dragstag låses hålen avsedda för dragstagen i x-led, detta blir ett strängt krav och motsvarar att dragstagen antages ha mycket hög styvhet. Vad gäller normalkraft i hanbalken torde detta vara ett antagande på säkra sidan. Leden i taknock anses ledad runt z-axeln men även runt y-axeln eftersom att beslagen här inte är dimensionerade att uppta de dragkrafter som uppstår vid en instabilitet. Leden mellan överliggare och hanbalk anses ledad runt överliggarens lokala x- och z-axeln men låst runt y-axeln eftersom att detta blir det mest kritiska fallet. Se figur 7.4 för en sammanställning av randvillkoren.



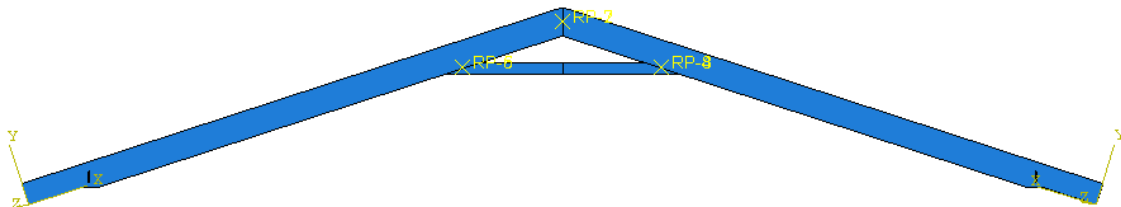
Figur 7.4: Randvillkor för takstolen

### 7.1.3 Laster

En utbredd last belastar hela takstolen vertikalt uppifrån. Denna last anses vara den samma för båda sidor om symmetrilinjen trots att en vinkel på  $18^\circ$  enligt Boverkets regler för snölast [2] bör ge en viss, dock väldigt liten skillnad i lastfördelning.

## 7.2 FEM-modellen

Förutom det globala koordinatsystem som används för de flesta randvillkor o.s.v. används också lokala koordinatsystem för de sneda delarna i takstolen, dvs. överliggarna. Dessa har fiberriktning i dess längdriktning och det blir alltså inte korrekt att ge dem materialegenskaper enligt de globala systemet. Lederna i nock samt mellan överliggare och hanbalk konstrueras genom att hela randen knyts till en punkt i balkens symmetrilinje, sedan kopplas dessa punkter samman för respektive del och ges aktuella egenskaper. Leden mellan överliggare och hanbalk knyts till överliggarnas lokala koordinatsystem.



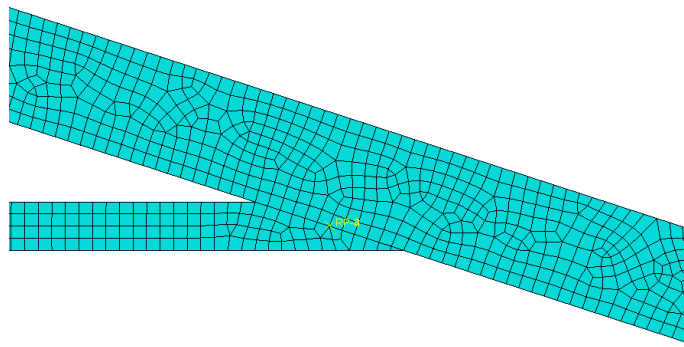
Figur 7.5: FEM-modellen i Abaqus

### 7.2.1 Elementindelning

Vid FEM-beräkningar i Abaqus har 3D skalelement S8R använts (kvadratiska med 8 noder, reducerad integration). Totalt har ca 3300 element använts för hela modellen



och de är näst intill kvadratiska till formen med sidan 50 mm. Elementindelningen för en del av takstolen ses i figur 7.6.



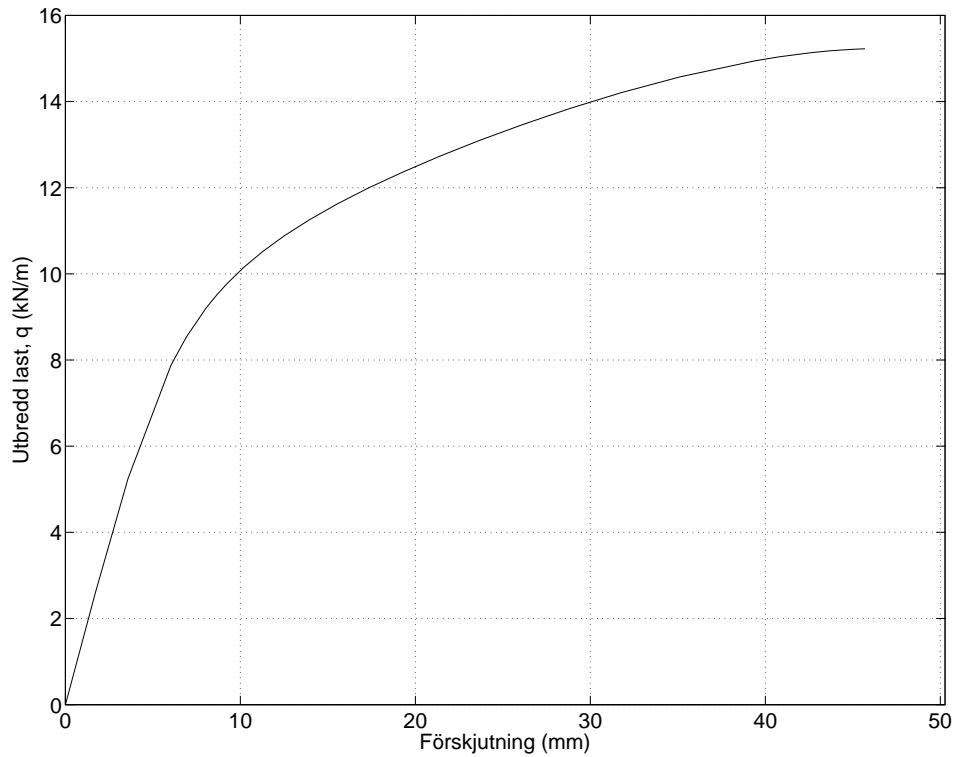
Figur 7.6: *Elementindelning för en del av takstolen*

### 7.3 Linjär FEM-analys

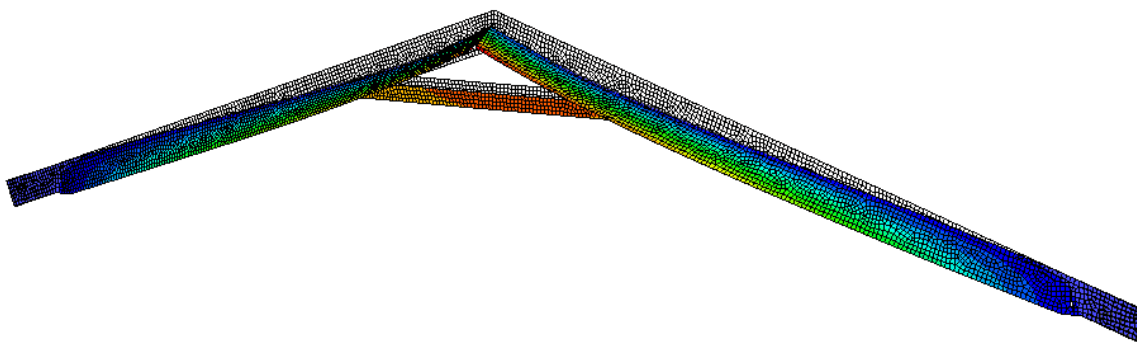
Den linjära bucklingsanalysen sker på ett helt odeformerat tvärsnitt och ger vid en jämnt utbredd last på 1 N/m ett  $\lambda=7895$  för första egenmoden, dvs en kritisk utbredd last på 7.9 kN/m.

### 7.4 Statisk olinjär FEM-analys

Vid den statiska analysen belastas systemet stegvis fram till den maximala utbredda lasten påträffats, då avbryts körningen. I figur 7.7 på nästa sida plottas den utbredda lasten som funktion av nedböjningen i taknocken och som synes sker kollapsen vid ca 15 kN/m. Takstolens deformerade geometri vid detta ögonblick kan ses i figur 7.8.

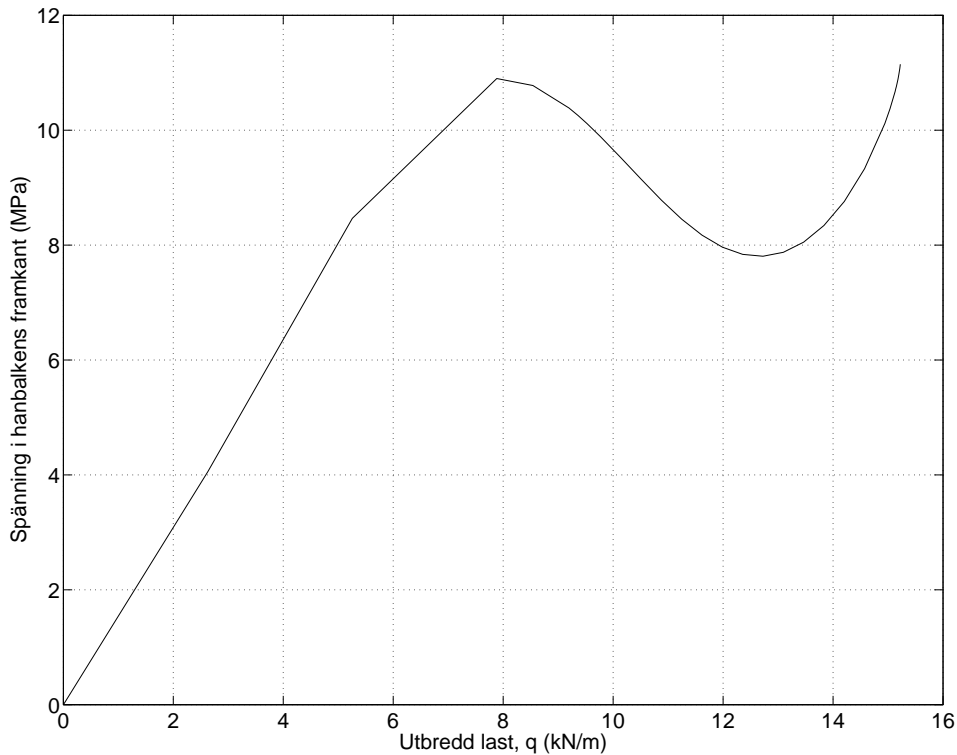


Figur 7.7: Takstolen belastad till maximal utbredd last



Figur 7.8: Fullt deformerad geometri med odeformerad geometri i bakgrunden, rött = stor utböjning, blått = liten utböjning

Viktigt att notera är att kritiska lasten blev mycket högre vid den olinjära analysen än vid den linjära bucklingsanalysen. Förklaringen till detta visas i figur 7.9. Här visas spänningarna i hanbalken som funktion av den utbredda lasten. Man kan se en ganska tydlig spänningstopp vid ungefär 7.9 kN/m som var den last då systemet blev instabilt enligt den linjära analysen. Det verkar som att hanbalken sedan p.g.a. systemets utböjningsform återigen sträcks ut och därmed avlastas något.



Figur 7.9: *Spänningar i hanbalkens framkant som funktion av  $q$*

## 7.5 Slutsats

Den olinjära analysen gav en ganska hög maximalt utbredd last. Spänningstoppar kunde dock hittas vid lägre last nära den last som var kritisk enligt den linjära bucklingsanalysen. Det är därför rimligt att det är vid ungefär dessa 8 kN/m som ett instabilitetsbrott sker. Enligt mätningarna hade brott skett vid ca 3 kN/m vilket ökas något om man även räknar med egentvingderna. Analysen ger inget självklart bevis för att kollapsen skett p.g.a. instabilitet och inte p.g.a. fel vid dragstagsinfästningen. Det ska dock tilläggas att takstolen vid analys givits ganska generösa styvhetsvärden samt randvillkor mot åsar och pelare som kan verka gynnsamma. Inte heller någon osymmetrisk lastfördelning har beaktats.

Vid uppföljning visar det sig att konstruktören ändrat åsikt och insett att hanbalken kan ha knäckt ut ur planet varpå byggnaden återuppförts med högre dimensioner.



# Kapitel 8

## Slutsats

Arbetet har gett förståelse för problemet med instabilitet hos limträbalkar orsakat av sidoutböjning tillsammans med vridning. Det vore önskvärt att hitta en mer generellt användbar analytisk metod för beräkning av instabilitetslaster, men detta har visat sig svårt. Därför hänvisas istället till de olika diagram där instabilitetslaster beräknade numeriskt m.h.a. Finita elementmetoden redovisas för olika värden på de parametrar som studerats. De parametrar som påverkar stabiliteten mest är bredden hos tvärsnittet och, i ännu högre grad, styvheten hos anslutningar mot sekundärbärverk i bågens överkant. Liksom i t.ex. Limträhandboken föreslås i denna rapport en analytisk dimensioneringsmetod för fallet att anslutningar mot sekundärbärverk är väldigt goda. Dessa goda anslutningsförhållande är dock svåra att uppnå i verkligheten för ett slankt tvärsnitt. I det generella fallet ansluter man mot sekundärbärverk bara i bågens överkant vilket ställer stora krav på momentstyvheten i anslutningen. Ett sätt att kringgå detta är att man placerar någon typ av stabiliserande element även i bågens underkant.

Det rekommenderas att man vid dimensionering av en konstruktion med limträbågar gör en egen FEM-modell för kontroll av instabilitet för de laster och randvillkor som är aktuella. Denna rapport bör då med fördel kunna användas för jämförelse.



# Kapitel 9

## Förslag till fortsatt arbete

Denna rapport kan vara en utgångspunkt för fortsatta studier av instabilitet hos limträbågar. Följande punkter anses särskilt betydelsefulla att studera närmre:

- Utforma en FEM-modell med användning av skal- eller solidelement som fungerar. Detta möjliggör att inverkan av excentriska laster kan studeras.
- Ytterligare verifieringsberäkningar för att bestämma när ekvationen för samtidigt normalkraft och moment är tillämpbar. Är det rimligt att tänka sig s.k. gaffellagrade anslutningar och hur kan dessa i så fall utformas?
- Flera bågformer och ytterligare förhållande mellan pillhöjd och spännvidd kan studeras för att framställa fler dimensioneringsdiagram av den typ som tagits fram vid parameterstudierna redovisade i denna rapport.





# Litteraturförteckning

- [1] *Abaqus Analysis User's Manual*. Version 6.9.
- [2] Boverket. *BSV 97, Snö och vindlast*. Boverket, 1998.
- [3] Boverket. *Regelsamling för konstruktion, Boverkets konstruktionsregler, BKR*. Boverket, 2003.
- [4] Per Gunnar Burström. *Byggnadsmaterial*. Studentlitteratur, 2001.
- [5] Olle Carling. *Limträhandbok*. Svenskt Limträ AB, 2001.
- [6] Kristian Berbom Dahl. *Mechanical properties of clear wood from Norway spruce*. Dr.ing dissertation 2009:250, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2009.
- [7] Trond Even Eggen. *Buckling and geometrical nonlinear beam-type analyses of timber structures*. Dr.ing dissertation 2000:56, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2000.
- [8] Per Johan Gustafsson. *Balkteori*. Kurspärm, Division of Structural Mechanics, 2008.
- [9] R.F. Hooley and B Madsen. Lateral stability of glued laminated timber beams. *Journal of the Structural Division*, 90, 1964.
- [10] Bengt Johannesson. *Brottkriterier för trä*. Studentlitteratur, 1984.
- [11] H.J. Larsen and H. Riberholt. *Trækonstruktioner - Forbindelser, SBI-anvisning 194*. Statens Byggeforskningsinstitut, 3rd edition, 1999.
- [12] H.J. Larsen and H. Riberholt. *Trækonstruktioner - Beregning, SBI-anvisning 210*. Statens Byggeforskningsinstitut, 6th edition, 2005.
- [13] K.G. Olsson och K. Persson O. Dahlblom. *Bärverk - Modellering och analys*. Division of Structural Mechanics, 2007.
- [14] Niels S. Ottosen and Hans Petersson. *Introduction to the Finite Element Method*. Prentice Hall, 1992.

- [15] Walter D. Pilkey. *Formulas for stress, strain and structural matrices*. John Wiley & sons, 1994.
- [16] Sven Thelandersson. *Stålkonstruktioner*. KFS i Lund AB, 2001.
- [17] Stephen P. Timoshenko and James M. Gere. *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill book company, inc., second edition, 1961.