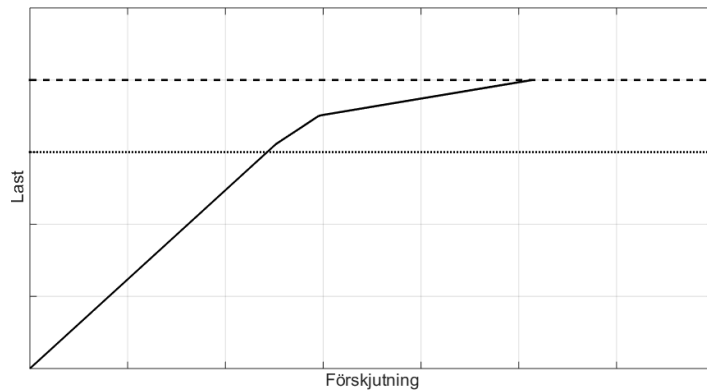




LUND
UNIVERSITY



GRÄNSLASTBERÄKNINGAR

Inkrementell formulering och gränslastteori

KARIN FORSMAN

*Bachelor's Dissertation
at Structural Mechanics*

DEPARTMENT OF CONSTRUCTION SCIENCES
DIVISION OF STRUCTURAL MECHANICS

ISRN LUTVDG/TVSM--15/6002--SE (1-76) | ISSN 0281-6679

BACHELOR'S DISSERTATION

GRÄNSLASTBERÄKNINGAR

Inkrementell formulering
och gränslastteori

KARIN FORSMAN

Supervisors: SUSANNE HEYDEN, Senior Lecturer and Prof. OLA DAHLBLOM,
Div. of Structural Mechanics, LTH, Lund.

Examiner: Prof. PER-ERIK AUSTRELL, Div. of Structural Mechanics, LTH, Lund.

Copyright © 2015 Division of Structural Mechanics
Faculty of Engineering (LTH), Lund University, Sweden.
Printed by Media-Tryck LU, Lund, Sweden, June 2015 (*Pf*).

For information, address:
Div. of Structural Mechanics, LTH, Lund University, Box 118, SE-221 00 Lund, Sweden.
Homepage: <http://www.byggmek.lth.se>

Förord

Det här arbetet utgör ett kandidatarbete och omfattar 15 högskolepoäng. Arbetet är skrivet i slutet av det tredje året på den femåriga civilingenjörsutbildningen Väg- och vattenbyggnad på Lunds tekniska högskola. Susanne Heyden och Ola Dahlblom från avdelningen för byggnadsmekanik har varit handledare. De har varit till stor hjälp under arbetets gång och jag vill därför passa på att tacka dem.

Karin Forsman

Maj 2015, Lund

Sammanfattning

Med elasticitetsteori kan man inte beskriva hur en statiskt obestämd konstruktion där materialet kan plasticeras går till brott. Enligt elasticitetsteori och ett antagande om ett sprött brott vid en viss spänning går en konstruktion till brott så fort denna spänning uppnås i det högst belastade snittet. Det som egentligen sker är att materialet plasticeras vilket leder till en momentomlagring. Konstruktionen har en reservkapacitet. För att beakta det kan man tillämpa plasticitetsteori.

För att bestämma hur mycket en konstruktion klarar, förutsatt plastiska materialgenskaper, kan man tillämpa gränslastberäkningar. Med gränslastberäkningar kan man optimera materialåtgången och på så vis göra ekonomiska och miljömässiga besparingar. Det här arbetets syfte är att belysa gränslastberäkningar utifrån två principer: gränslastteori och en inkrementell formulering.

Med gränslastteori undersöker man gränslasttillståndet enligt de statiska eller kinematiska teoremen. En tillämpning av det statiska teoremet ger en gränslast beräknad på den säkra sidan och det kinematiska på den osäkra sidan. För endimensionella konstruktioner som flyter i punkter tillämpas den statiska och kinematiska metoden. För tvådimensionella konstruktioner som flyter längs speciella linjer presenteras strimlemetoden och brottlinjemetoden.

För beräkningar grundade på en inkrementell formulering, det vill säga en successiv pålastning, följs hela pålastningsförloppet. Beräkningar genomförs i Matlab där funktioner från programvaran Calfem används. För att beräkna gränslasten enligt denna metod måste man på förhand införa i vilka punkter flytleder kan uppstå. Det är lätt om konstruktionen belastas med punktlaster. Om den utsätts för en utbredd last kan man dock inte förutsäga dessa lägen lika enkelt.

I det här arbetet har ett av målen varit att utveckla denna strategi. Ett program som löser gränslastberäkningar för konstruktioner belastade med en utbredd last har utvecklats. Programmet bygger på att man gör en indelning av balkelementen som är belastade med en utbredd last. I programmet kan man variera hur många rotationsfjädrar man vill föra in och hur stora lastinkrement man vill ha. Bäst resultat fås om man kombinerar en fin indelning, det vill säga många rotationsfjädrar, med små lastinkrement. Gränslasten som programmet ger är beräknad på den osäkra sidan.

Abstract

Using theory of elasticity it is not possible to describe exactly how a statically indeterminate structure collapses. Theory of elasticity is often combined with an assumption of breakage at a certain level of stress, this meaning that a structure will break as soon as this level of stress is reached in the most heavily loaded section. A plastic hinge will occur followed by a changed distribution of moment. The structure has a greater capacity and to analyze this it is necessary to apply theory of plasticity.

To determine how much a structure can be loaded, using plastic theory, limit load calculations can be applied. Using these calculations material usage can be optimized, resulting in economic and environmental savings. This work aims to describe limit load calculations based on two principles: the limit analysis methods and an incremental formulation.

With the limit analysis methods the static and kinematic theorems are applied. For one-dimensional structures, such as beams, the static and kinematic method is used. For two-dimensional structures, such as slabs, strip method design and the yield line theory is presented, giving the limit load based on the static and the kinematic theorem respectively.

For calculations based on an incremental formulation Matlab and a software called Calfem is used. To calculate the limit load according to this method it is necessary to pre-establish where plastic hinges might occur. This becomes a problem when the structure is subjected to a distributed load. Then it is not easy to predict these positions. In this work one of the goals has been to develop this strategy. A program performing limit load calculations for structures subjected to a distributed load has been developed. The program calculates an upper bound of the limit load.

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Bakgrund	1
1.2	Syfte och mål	2
1.3	Avgränsningar	3
2	Plasticitetsteori	5
2.1	Introduktion	5
2.2	Materialpunktsnivå	7
2.3	Tvåsnittsnivå	8
2.3.1	Spänningsfördelning	8
2.3.2	Elastiskt och plastiskt böjmotstånd	8
2.3.3	Moment-krökningssamband	11
2.4	Balknivå	11
2.4.1	Flytleder	11
2.4.2	Krav på rotationskapacitet	11
2.5	Systemnivå	12
3	Gränslastberäkningar för endimensionella konstruktionselement	15
3.1	Introduktion	15
3.2	Inkrementell formulering	15
3.2.1	Metod	15
3.2.2	Stångelement	17
3.2.3	Balkelement	17
3.3	Gränslastteori	18
3.3.1	Introduktion	18
3.3.2	Statiska metoden	18
3.3.3	Kinematiska metoden	21
3.4	Tillämpningsexempel	23
3.4.1	Exempel 1: Balk belastad med en punktlast	23
3.4.2	Exempel 2: Balk belastad med en utbredd last	30
3.4.3	Exempel 3: Ramverk belastat med två punktlaster	36
4	Gränslastberäkningar för tvådimensionella konstruktionselement	45

4.1	Introduktion	45
4.2	Strimlemetoden	45
4.3	Brottlinjemetoden	49
5	Utveckling av beräkningsmetod i Calfem	51
5.1	Problembeskrivning	51
5.2	Framtagning av generell strategi	51
5.2.1	Program som för in rotationsfjädrar	51
5.2.2	Program som beräknar gränslasten	56
5.3	Tillämpningsexempel	59
5.3.1	Balk belastad med en utbredd last (Exempel 2)	59
5.4	Analys av resultat och utvecklingspotential	61
6	Slutsats	65
	Litteraturförteckning	66
A	Program som inför rotationsfjädrar	69
B	Program som beräknar gränslasten	73

Kapitel 1

Inledning

1.1 Bakgrund

Genom alla år har människan varit i behov av skydd mot väder och vind. Bakom utvecklingen från de mest grundläggande skjulen till dagens skyskrapor ligger stora framsteg inom både material, tekniska hjälpmedel och byggnadsteknik. Från de gamla tillvägagångssätten, då man byggde utifrån erfarenhet och testade sig fram, har man under senare århundraden utvecklat mer avancerade beräkningsmodeller. För dimensionering av konstruktioner har man idag kommit långt inom utvecklingen av datorhjälpmedel för beräkningarna [8].

När man dimensionerar konstruktioner utgår man från två viktiga kriterier. För det första ska konstruktionen upprätthålla en viss brottsäkerhet. Vidare ska konstruktionen fungera väl i bruksstadiet [6]. I bruksstadiet fokuserar man på konstruktionens funktion vid normal användning. Bruksgränstillståndet står för det tillstånd då en konstruktions deformationer, sprickor eller svängningar är oacceptabelt stora och på så sätt förhindrar den normala användningen. Det kan till exempel innebära att en nedböjning förhindrar dörrar eller fönster från att öppnas [8]. När man räknar på bruksgränstillståndet undersöker man normalt förekommande laster. Eftersom dessa oftast är mindre än de belastningar som materialet klarar av innan det går till brott kan man förutsätta ett linjärt materialsamband. Man räknar alltså med elasticitetsteori [10].

För att se till så att en konstruktion inte kollapsar undersöker man även hur mycket last den klarar av innan den går till brott. Detta motsvaras av brottgränstillståndet. Vid dimensionering utifrån brottgränstillståndet använder man sig av olika säkerhetsklasser beroende på vilken del man räknar på. För konstruktionens viktigaste bärande delar vill man ha en högre säkerhet då det skulle medföra värre konsekvenser med brott där [8]. Vid beräkning av brottsäkerhet faller man också of-

ta tillbaka på elasticitetsteori. Denna förutsätter ett linjärelastiskt materialsamband vilket ger relativt enkla beräkningar. En sådan analys ger dock inte den sanna bilden av hur konstruktionen beter sig då den går till brott [6].

Elasticitetsteorin är en vetenskap som växte fram under 1800-talet. Den har haft, och har fortfarande, en betydande roll för byggnadstekniken då man kan förutse påverkan på material och konstruktioner vid olika belastningar. Idag är elasticitetsteorin en grund som många beräkningsmodeller faller tillbaka på [8]. Elasticitetsteorin beaktar dock endast hur mycket last konstruktionen klarar utifrån det farligaste snittet. För statiskt bestämda konstruktioner fungerar denna typ av beräkningar. För statiskt obestämda konstruktioner bör dock beaktas att det för material med plastiska egenskaper sker en momentomlagring och uppkomst av flytzoner vid ökad belastning. Konstruktionen har alltså en reservkapacitet. För att beakta detta måste man ta hänsyn till materialets plastiska egenskaper [10].

För att beakta de plastiska egenskaperna förutsätts ett materiellt ickelinjärt beteende. Man kan studera mer noga hur en konstruktion går till brott antingen genom att modellera brottscenariot med en successiv pålastning eller med hjälp av gränslastteori [10]. I det här arbetet presenteras båda dessa metoder mer ingående.

För en inkrementell formulering, det vill säga en successiv pålastning, nyttjas beräkningsprogrammet Matlab samt Calfem. Calfem utgör en toolbox innehållande olika funktioner utvecklade för FEM-analys i Matlab [1]. För gränslastteori kan man med hjälp av det statiska och kinematiska teoremen beräkna en konstruktions gränslast. Statische och kinematiska metoden är framtagna för endimensionella konstruktions-element där flytleder uppstår i punkter [10]. Strimlemetoden och brottlinjemetoden tillhör även de gränslastteori och bygger på det statiska respektive kinematiska teoremet. Skillnaden är dock att dessa metoder är framtagna för tvådimensionella konstruktions-element som plattor och murverk där flytlederna utgörs av speciella linjer, brottlinjer [11].

För att gränslastberäkningar ska ge en bra bild av konstruktionens verkliga beteende ställs dock en del krav på materialet. Till exempel krävs en tillräcklig rotationskapacitet i flytlederna. Metoden lämpar sig därför bäst för sega material [10].

1.2 Syfte och mål

Genom gränslastberäkningar kan man optimera materialanvändningen vid dimensionering. För större konstruktioner kan detta innebära en stor skillnad i materialåtgång och slutlig kostnad. Vidare möjliggör ett optimerat materialanvändande att man kan bygga slankare och mer innovativa konstruktioner. Syftet med det här arbetet är att belysa gränslastberäkningar baserade på både en inkrementell formulering

och gränslastteori.

Arbetet ska ge en grundläggande förståelse för plasticitetsteori. Det ska vidare med teori och exempel beskriva gränslastberäkningar. Målet med arbetet är att utifrån dessa kunskaper utveckla ett program i Matlab som kompletterar beräkningar med hänsyn till materiell ickelinjäritet i Calfem. Programmet som utvecklas ska möjliggöra att man kan bestämma gränslasten för en konstruktion belastad med en jämnt utbredd last. Med andra ord ska man alltså kunna beräkna gränslasten utan att på förhand veta i vilka punkter som konstruktionen kommer att flyta.

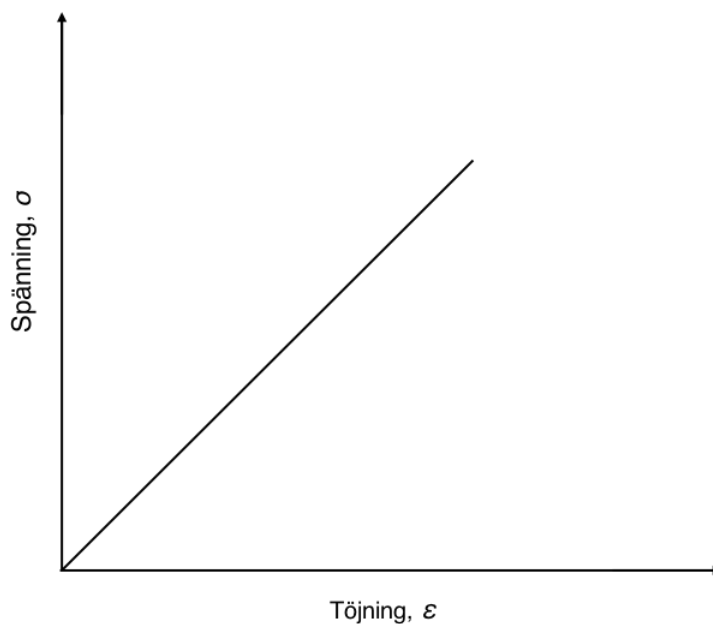
1.3 Avgränsningar

Eftersom arbetet utgör ett kandidatarbete och viss kunskap som tillhör en senare del av utbildningen inte introducerats än görs en del avgränsningar. Inom gränslastberäkningar bortses från en del parametrar såsom samtidig normalkraft och inverkan av tvärkraft. Strimlemetoden och brottlinjemetoden presenteras endast översiktligt. Önskas mer information om dessa hänvisas till angiven litteratur. Arbetet lägger större fokus på att ge en grundläggande förståelse och att utveckla det kompletterande programmet i Matlab.

Kapitel 2

Plasticitetsteori

2.1 Introduktion

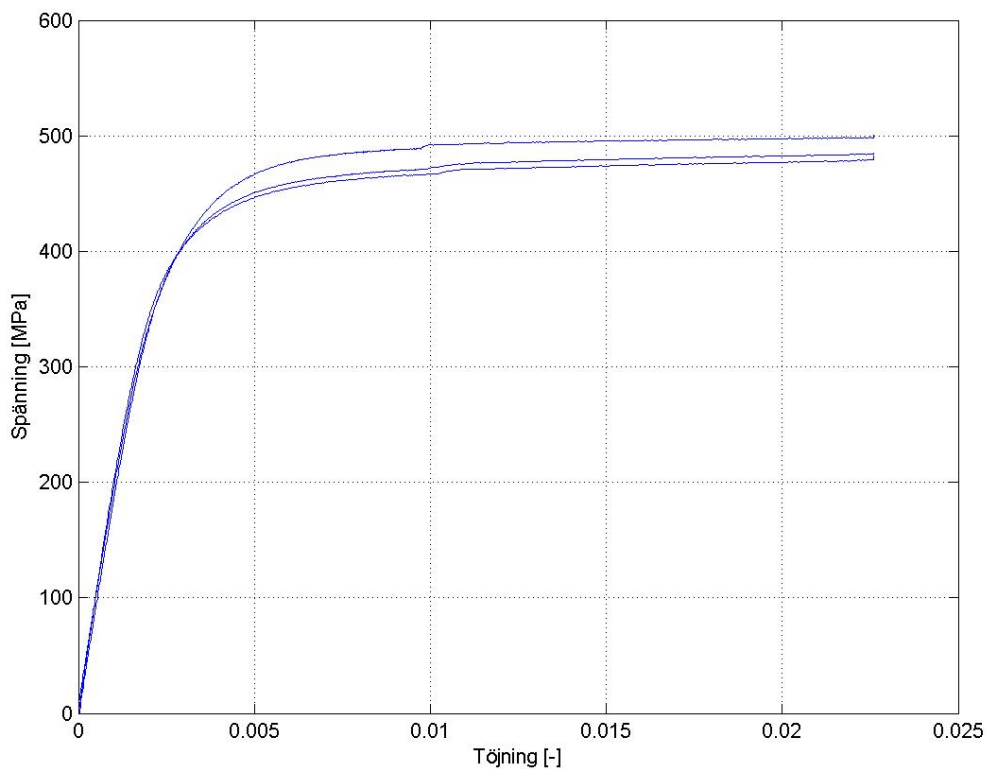


Figur 2.1: *Linjärelastiskt spännings-töjningssamband.*

Man är från beräkningar inom elasticitetsteori van att förutsätta ett linjärelastiskt materialsamband. Det innebär med andra ord att sambandet mellan spänning och töjning ges av Hookes lag;

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.1)$$

Hookes lag säger att spänningen i materialet är proportionell mot töjningen. En



Figur 2.2: *Ett spännings-töjningssamband för stål.*

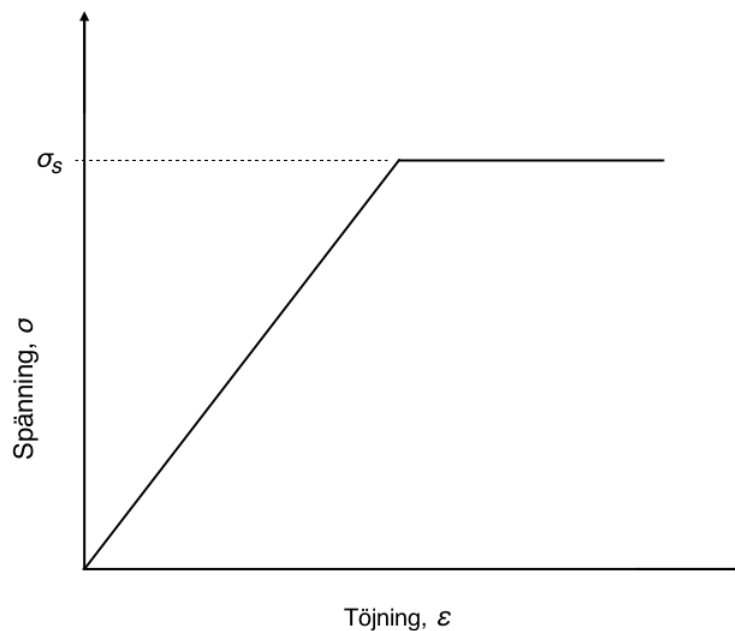
arbetskurva för ett linjärelastiskt material visas i figur 2.1. I elasticitetsteori ingår formellt inget brottkriterium, men elasticitetsteori kombineras ofta med ett antagande om sprött brott vid en viss spänning. Detta förutsätts i det fortsatta arbetet [6].

Materialsambandet lämpar sig för spröda material där plastiska egenskaper är försumbara eller vid beräkningar med små laster [10]. Inom plasticitetsteori förutsätts dock ett annorlunda materialsamband baserat på materiell ickelinjäritet. Plasticitetsteorin ger jämfört med elasticitetsteorin att konstruktioner klarar av en högre belastning innan de går till brott. Detta då ett ickelinjärt materialsamband beskriver brottscenariot på ett mer korrekt sätt. Inom plasticitetsteori tar man hänsyn till plasticering, uppkomst av flytleder och momentomlagring [5]. I detta kapitel beskrivs plasticitetsteori utifrån materialpunktsnivå, tvärsnittsnivå, balknivå och systemnivå.

2.2 Materialpunktsnivå

Plasticitetsteori grundas på ett materiellt ickelinjärt samband. Till skillnad från inom elasticitetsteori beaktar man materialets förmåga att plasticera. Med hjälp av arbetskurvor kan man beskriva hur material beter sig i olika skeden. För att få fram ett materials beteende vid olika laster kan man utsätta det för ökade töjningar samtidigt som man noterar spänningen i ett enaxiellt dragprov. Resultatet blir en arbetskurva som visar på spännings-töjningssamband liknande den i figur 2.2. Det är ett exempel på ett materialsamband för stål [6]. I början sägs materialet vara linjärelastiskt. Det har sin intitiella styvhet som ges av elasticitetsmodulen, E , och ett linjärt materialsamband som kan beskrivas enligt Hookes lag, se ekvation 2.1. När töjningarna ökar ytterligare beter sig dock materialet ickelinjärt. Från arbetskurvan kan man avläsa dess hållfasthet, σ_s , som den maximala spänningen [4].

För att underlätta beräkningarna gör man ofta en idealisering och antar ett elastiskt-idealplastiskt material, se figur 2.3. Förenklingen innebär att materialet är linjärelastiskt fram till en viss punkt där det går över till att vara plastiskt. Oavsett hur mycket töjningen ökar förblir spänningen i materialet konstant. Den spänningen kallas för materialets flytspänning, σ_s [4]. Viktigt att poängtera är att den här idealiseringen endast gäller upp till en viss nivå då materialet brister. Plastiska beräkningar förutsätter alltså att materialet tillåts deformeras och är tillräckligt segt. Exempel på material som uppvisar sådana egenskaper är aluminium och konstruktionsstål [10].

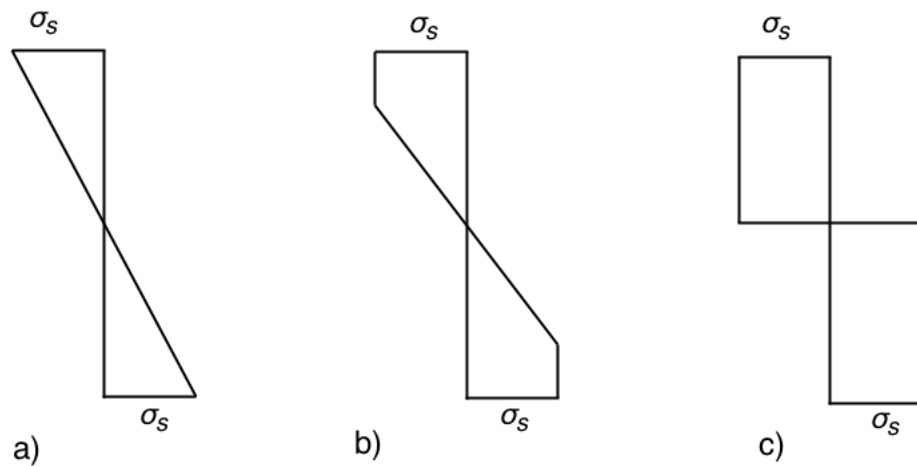


Figur 2.3: *Elastiskt-idealplastiskt spännings-töjningssamband.*

2.3 Tvärsnittsnivå

2.3.1 Spänningsfördelning

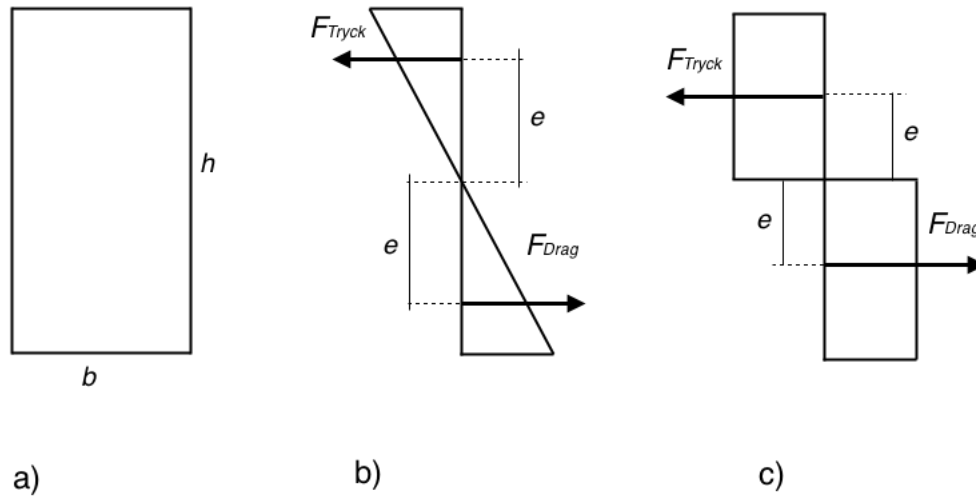
Att ett material tillåts plasticera på tvärsnittsnivå möjliggör att man kan utnyttja hela tvärsnittets kapacitet. Figur 2.4 illustrerar hur spänningen i ett tvärsnitt varierar vid ökad belastning. I figur 2.4a har flytspänningen precis uppnåtts i tvärsnittets yttre kanter. Där sker en begynnande plasticering medan materialet i övrigt fortfarande är elastiskt. Flytznor uppstår i tvärsnittet där materialegenskaperna blir plastiska. Samtidigt finns fortfarande den elastiska kärnan i mitten, dit flytznor ännu inte hunnit breda ut sig, se figur 2.4b. När flytznorerna brett ut sig över hela tvärsnittet säger man att det är genomplasticerat och uttömt på kapacitet, se figur 2.4c [6].



Figur 2.4: Spänningsfördelningen i ett tvärsnitt vid en ökande belastning.

2.3.2 Elastiskt och plastiskt böjmotstånd

Enligt elasticitetsteoretiska beräkningar antar man att tvärsnittets maximala bärformåga uppnås vid begynnande plasticering. Om plasticering tillåts kan dock böjmomentet som man utsätter tvärsnittet för ökas. För att undersöka vilken extrakapacitet ett tvärsnitt har beräknas det elastiska och det plastiska böjmotståndet. Ett rektangulärt tvärsnitt med bredden b och höjden h undersöks, se figur 2.5a. Vid begynnande plasticering har man en linjär spänningsfördelning enligt figur 2.5b. Böjmomentet beräknas enligt nedanstående. Den dragande och tryckande kraften, F_{drag} och F_{tryck} , fås genom att summera drag- respektive tryckspänningarna över tvärsnitt-



Figur 2.5: a) Tvärsnitt med bredden b och höjden h . b) Spänningsfördelning och resulterande krafter vid begynnande plasticering. c) Spänningsfördelning och resulterande krafter vid genomplasticering.

sarean. För att få momentet multipliceras kraftresultanterna med sina hävarmar. Avståndet e är hävarmarna från kraftresultanternas angreppspunkt till tvärsnittets mittpunkt [6].

$$M_e = F_{Drag}e + F_{Tryck}e \quad (2.2)$$

$$M_e = \frac{bh}{2} \frac{\sigma_s}{3} + \frac{bh}{2} \frac{\sigma_s}{3} \quad (2.3)$$

$$M_e = \frac{bh^2}{6} \sigma_s \quad (2.4)$$

med $W = \frac{bh^2}{6}$ fås $M_e = W\sigma_s$ där W anger det elastiska böjmotståndet som beskriver tvärsnittsformens inverkan på M_e .

För genomplasticerat tillstånd beräknas det plastiska böjmotståndet för samma tvärsnitt som ovan. Eftersom tvärsnittet tillåts plasticera får man en annorlunda spänningsfördelning. Då tvärsnittet är genomplasticerat är spänningen konstant inom flytzonerna, se figur 2.5c. På motsvarande sätt som tidigare beräknas momentet men i genomplasticerat tillstånd enligt nedan [6]:

$$M_p = F_{Drag}e + F_{Tryck}e \quad (2.5)$$

$$M_p = \frac{bh}{2}\sigma_s \frac{h}{4} + \frac{bh}{2}\sigma_s \frac{h}{4} \quad (2.6)$$

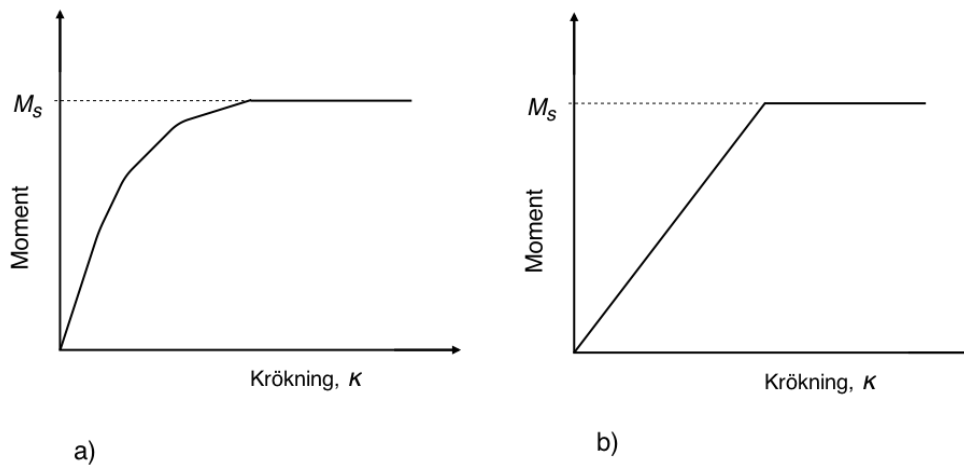
$$M_p = \frac{bh^2}{4}\sigma_s \quad (2.7)$$

med $Z = \frac{bh^2}{4}$ fås $M_p = Z\sigma_s$ där Z står för det plastiska böjmotståndet som beskriver tvärsnittsfর্মens inverkan på M_p .

Förhållandet mellan momentet vid genomplastisering respektive begynnande plastisering kan bestämmas enligt:

$$\eta = \frac{M_p}{M_e} = \frac{Z}{W} \quad (2.8)$$

Kvoten ger en bild av hur mycket momentet kan ökas om plastisering tillåts. För fallet rektangulärt tvärsnitt erhålls kvoten 1.5. Det innebär att momentet som tvärsnittet klarar av är 50 procent större om det har plastiska egenskaper istället för elastiska. Motsvarande kvot kan bestämmas för andra typer av tvärsnitt. För I-tvärsnitt ligger den ofta mellan 1.10 och 1.15. Kvoten blir större för rektangulära tvärsnitt. Det kan förklaras genom att I-balkarna redan har optimerats. När flänsarna för ett I-tvärsnitt plasticerats blir tillskottsmomentet vid plastisering i livet ej så stor då arean där är liten [6].



Figur 2.6: a) *Moment-krökningssamband för ett normalarmerat betongtvärsnitt.*
 b) *Idealiserat moment-krökningssamband.*

2.3.3 Moment-krökningssamband

I följande avsnitt studeras en hel balk istället för bara ett tvärsnitt som tidigare. Man kan beskriva en balks beteende med hjälp av ett moment-krökningssamband. Krökningen ges av $\kappa = \frac{1}{R}$ där R är krökningsradien. Det ger ett förhållande mellan momentet som belastar konstruktionen och krökningen den utsätts för. Ett exempel på ett sådant för ett normalarmerat betongtvärsnitt visas i figur 2.6a. För att underlätta beräkningarna gör man dock oftast en idealisering av detta så att man får ett samband som visas i figur 2.6b [6].

2.4 Balknivå

2.4.1 Flytleder

När en balk belastas med en successivt ökande last uppstår tryck- respektive dragspänningar i tvärsnittets olika kanter vars storlek beror på momentet. Där momentet är som störst och når upp till flytmomentet kommer balken att börja plasticera i ovan- och underkant. När belastningen ökar ytterligare kommer successivt större delar av tvärsnittet att plasticera i enlighet med figur 2.4. I intilliggande tvärsnitt ökar samtidigt momentet och där flytmomentet uppnås sker också en begynnande plasticering. En så kallad flytzon breder ut sig. Eftersom det blir väldigt komplicerat att analysera balken med ett ickelinjärt moment-krökningssamband görs antagandet om ett förenklat sådant enligt figur 2.6b. Det innebär att så fort flytmomentet uppnås i ett tvärsnitt antas det vara genomplasticerat. Det uppstår då en så kallad flytled där momentet förblir konstant under ökad rotation [6].

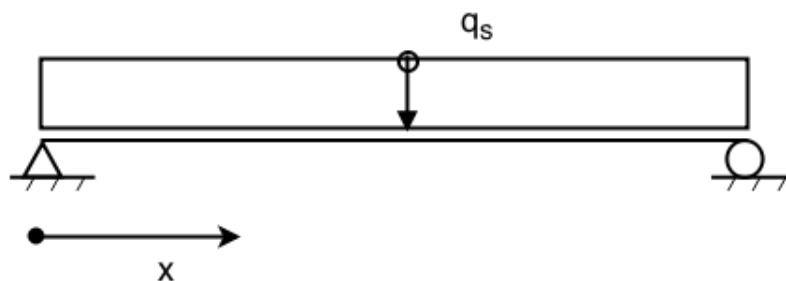
2.4.2 Krav på rotationskapacitet

För att kunna räkna på ett material som plastiskt förutsätts vissa egenskaper. Som nämndes tidigare gäller de förenklade egenskaperna hos ett elastiskt-idealplastiskt material endast till den nivå då materialet brister. Materialet måste alltså tillåta tillräckligt stora deformationer. Att tvärsnittet har en tillräcklig rotationskapacitet är en viktig egenskap. Efter det att en flytled uppstått måste materialet ha en tillräckligt hög förmåga att deformeras [10]. Rotationskapaciteten ges av hur mycket materialet klarar av att flyta vid bibehållet moment. Den sammanlagda rotationen som materialet ska klara från att flytleden initieras till konstruktionens kollaps kallas rotationsbehovet. För att kommande modelleringar ska fungera krävs att rotationskapaciteten överstiger rotationsbehovet. Eftersom rotationskapaciteten är begränsad hos verkliga material bör denna förutsättning kontrolleras innan analysen genomförs

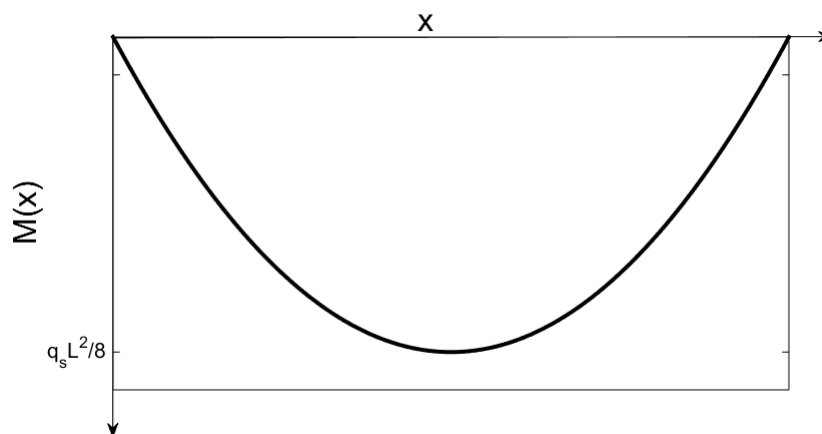
[2]. Teorin lämpar sig bäst för sega konstruktionsmaterial som till exempel mjukt konstruktionsstål [10].

2.5 Systemnivå

Ovan beskrivs uppkomsten av en flytled. När en flytled uppstått leder det till att konstruktionen förlorar styvhet. Uppstår tillräckligt många flytleder blir konstruktionen en mekanism och kollapsar. Antalet flytleder som kan uppstå innan en konstruktion



Figur 2.7: En fritt upplagd balk med en jämnt utbredd last.



Figur 2.8: Momentfördelning för balken i figur 2.7.

blir instabil beror dels på upplagsvillkoren och dels på den inre stabiliteten. För en statiskt bestämd konstruktion kan det endast uppstå en flytled innan den blir en mekanism och kollapsar, se figur 2.7. Undersöker man en fritt upplagd balk med en jämnt utbredd last får man en momentfördelningen enligt figur 2.8. Brottlasten, q_s , ges av:

$$M_{max} = \frac{q_s L^2}{8} \quad (2.9)$$

$$q_s = \frac{8M_{max}}{L^2} \quad (2.10)$$

Om plastiska egenskaper antas kan man ersätta M_{max} med flytmomentet M_s som tar hänsyn till plasticering på tvärsnittsnivå. Det är dock ej av intresse att genomföra gränslastberäkningar för statiskt bestämda konstruktioner. Deras bärförmåga är uttömd så fort flytmomentet uppnås i en punkt och det sker alltså ingen momentomlagring efter detta [6].

För statiskt obestämda konstruktioner kan det däremot uppstå fler flytleder innan det bildas en mekanism och konstruktionen kollapsar. Då en flytled uppstår förblir momentet i själva flytleden konstant och ges av M_s [6]. I resten av konstruktionen sker en momentomlagring och övriga delar av konstruktionen utsätts för ökade belastning samtidigt som materialet deformeras i flytleden. I statiskt obestämda konstruktioner finns alltså en reservkapacitet [10].

Uppkomsten av en flytled innebär att konstruktionen blir en gång mindre statiskt obestämd. För en statiskt bestämd konstruktion innebär det som konstaterat att en flytled leder till att konstruktionen blir en mekanism direkt. För en balk som är fast inspänd i ena änden och upplagd på ett rullager i den andra kan två flytleder uppstå innan den blir en mekanism. Antag att n står för hur många gånger statiskt obestämd en konstruktion är i yttre och inre mening. Möjliga flytleder ges då av $n + 1$. För statiskt obestämda konstruktioner kan man utnyttja detta som ett mått på det maximala antalet flytleder som kan uppstå innan konstruktionen kollapsar. Konstruktionen kan dock kollapsa tidigare genom någon lokal mekanism [5].

Kapitel 3

Gränslastberäkningar för endimensionella konstruktionselement

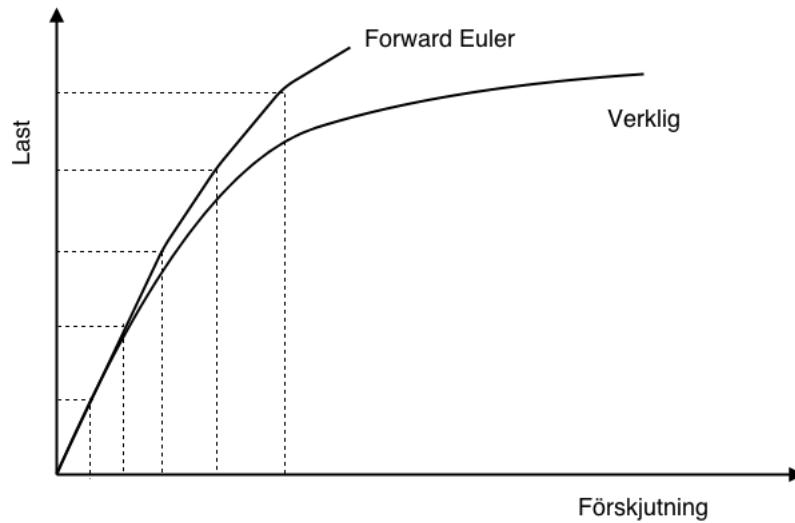
3.1 Introduktion

I det här avsnittet presenteras metoder för att beräkna gränslasten för endimensionella konstruktionselement där flytleder uppstår i punkter. För att beakta materiell icke-linjäritet beskrivs två olika typer av analyser nedan. Den första bygger på att man undersöker konstruktionens inre krafter och deformationer vid en stegvis ökad belastning, en så kallad inkrementell formulering. Den andra bygger på gränslastteori, det vill säga att man undersöker konstruktionen i brottgränstillståndet. Man förutsätter en brottmekanism och undersöker lasten vid denna [4].

3.2 Inkrementell formulering

3.2.1 Metod

Om man vill undersöka hur en konstruktion påverkas från att den börjar belastas till att den kollapsar kan man analysera den med en successiv pålastning. Metoden bygger i stort på att man delar upp den yttre lasten i ett visst antal inkrement. Man undersöker därefter hur konstruktionen påverkas vid varje pålastning. Det här kallas en inkrementell formulering då beräkningarna genomförs i flera mindre steg [4]. I det här arbetet används funktioner från datorprogrammet Calfem i beräkningarna.



Figur 3.1: *Avvikelse från exakt lösning med strategin Forward Euler.*

Calfem är en toolbox framtagen till Matlab [1].

I följande beskrivning av metoden används en strategi kallad Forward Euler. Det är ett av de enklare sätten att genomföra beräkningar enligt den inkrementella metoden på. Det första som görs är att man delar upp den yttre lasten i n stycken inkrement, i [4].

$$\mathbf{f}_1 = \sum_{i=1}^n \Delta \mathbf{f}^i \quad (3.1)$$

Den globala styvhetsmatrisen beror på aktuella förskjutningar och inre krafter. Då en flyttled uppstår minskar konstruktionens styvhet. I början av varje beräkningssteg skapas därför en ny tangetstyvhetsmatris \mathbf{K}_T^i som beskriver styvheten baserat på föregående steg. Då styvhetsmatrisen alltid bygger på för låga laster kommer konstruktionen att modelleras som styvare än vad den faktiskt är. Metoden kommer således att ge ett visst fel och last/förskjutningsdiagrammet kommer att avvika från det verkliga, se figur 3.1. För att minska felet kan metoden genomföras med en indelning i fler och mindre inkrement [4].

När styvhetsmatrisen för inkrement i bestämts beräknas för varje tillstånd det nya bidraget till den globala förskjutningsvektorn \mathbf{a} genom att lösa ekvationssystemet:

$$\mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{a}^i = \Delta \mathbf{f}^i \quad (3.2)$$

Från den globala förskjutningsvektorn bestäms elementförskjutningsinkrementen och aktuella snittkrafter eller spänningar vid tillståndet $i + 1$. Egenskaperna är elastis-

ka fram till den nivå då flytmomentet eller flytkraften uppstår. Man måste alltså jämföra framräknade snittkrafter med hållfasthetsvärden. När materialets flytmoment uppstår en flytled i den punkten. En plastisk deformation sker med bibehållet moment. Som tidigare nämndes påverkas konstruktionens styvhetsmatris av detta [4].

För att veta hur mycket man kan belasta konstruktionen innan den kollapsar och blir en mekanism kan man undersöka determinanten av den reducerade styvhetsmatrisen. Den indikerar konstruktionens stabilitet. Om determinanten är noll kollapsar konstruktionen. Denna kontroll görs därför inför varje ny pålastning då en flytled uppstått [4].

I slutet av varje steg summeras de totala förskjutningarna respektive de yttre krafterna vid tillståndet $i + 1$.

$$\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{a}^i + \Delta \mathbf{a}^i \quad (3.3)$$

$$\mathbf{f}^{i+1} = \mathbf{f}^i + \Delta \mathbf{f}^i \quad (3.4)$$

3.2.2 Stångelement

Fackverk är uppbyggda av stänger. De bär antingen genom tryck eller drag. Om inga yttre axiella krafter belastar en stång kommer normalkraften att vara densamma i hela elementet. I fallet när man undersöker fackverk refererar man ofta till flytkraft istället för flytmoment. Flytkraften N_s ges av $N_s = \sigma_s A$. Om arean varierar längs med stången sker en begynnande plasticering i snittet med minst area. Om arean är konstant, vilket den oftast är, uppstår flytspänning och således plasticering av hela stången samtidigt förutsatt att lasterna enbart verkar i knutpunkterna [4].

För att ta hänsyn till materiell ickelinjäritet men ändå få relativt enkla beräkningar antas ett elastiskt-idealplastiskt materialsamband. För en fackverkskonstruktion blir beräkningarna lätta på grund av att en stång enligt givna förutsättningar antingen är helt elastisk eller helt plastisk. Det innebär med andra ord att så länge flytkraften inte uppnåtts i elementet har stången sin initiala styvhet och elasticitetsmodul. Då flytkraften uppnås plasticerar stången momentant och elasticitetsmodulen sätts lika med noll eftersom stången flyter [4].

3.2.3 Balkelement

Till skillnad från konstruktioner uppbyggda av enbart stänger kommer plasticeringen i ramverk att vara lokaliserad till speciella områden. Det beror på att momentet i allmänhet varierar i ett balkelement. Antag även här ett bi-linjärt momentkrökningssamband enligt figur 2.6b. Materialet kommer att bete sig elastiskt fram

till att flytmomentet uppnås i någon punkt. Där uppstår en flytled direkt, det vill säga en deformation med bibehållet moment. Punkter som flytleder uppstår i är där momentet blir som störst. Det är ofta vid fasta inspänningar, ramhörn eller direkt under en punktlast [4].

Ett sätt att lösa beräkningarna på är att redan på förhand definiera lägen i konstruktionen där flytleder antas kunna uppstå. Rotationsfjädrar, med en hög styvhet, placeras i dessa punkter. Flytspänningen för en rotationsfjäder ges av det lägsta av anslutande elements hållfasthetsvärden. Pålastning sker enligt tidigare beskrivning med små lastinkrement. När spänningen i rotationsfjädrarna når flytspänningen reduceras deras styvhet till noll. Det innebär att en flytled där en rotation kan ske uppstår [4].

3.3 Gränslastteori

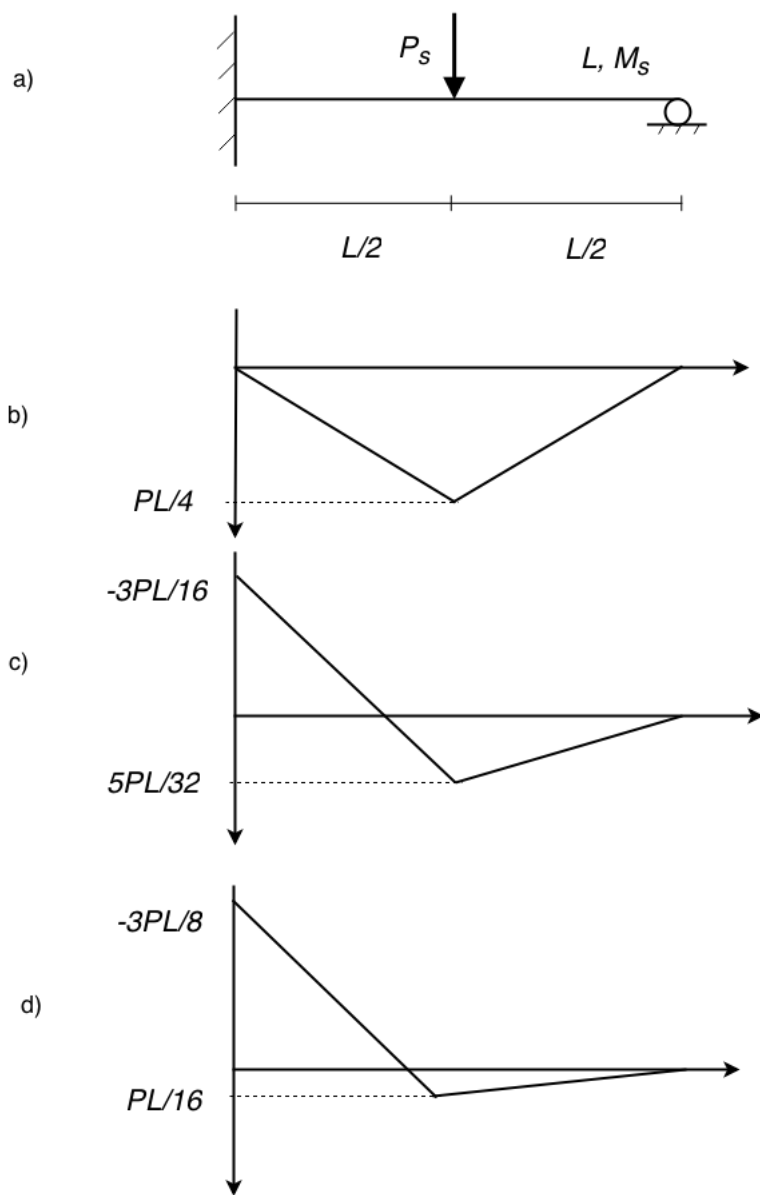
3.3.1 Introduktion

Till skillnad från ett förfarande där man undersöker en successiv pålastning undersöker man enligt denna metod enbart gränstillståndet. Gränslastteorin växte fram och började tillämpas i praktiken efter andra världskriget. Huvudsakliga tillämpningar är inom dimensionering av bärande konstruktioner [9]. Man brukar dela in teorin i två olika metoder, den statiska och den kinematiska. En stor skillnad mellan dessa är att den statiska metoden ger en gränslast på den säkra sidan medan den kinematiska metoden ger en gränslast på den osäkra sidan [10].

3.3.2 Statiska metoden

Den statiska metoden bygger på det statiska teoremet. Det innebär att två viktiga förutsättningar måste uppfyllas. Dels ska momentfördelningen som de yttre lasterna orsakar vara statiskt tillåten, det vill säga uppfylla jämvikten. Vidare får inte flytmomentet överskridas någonstans i balken. En last som motsvarar en momentfördelning som uppfyller dessa villkor kommer att motsvara gränslasten beräknad på den säkra sidan. Det innebär att de angivna yttre lasterna är lägre än eller lika med den verkliga gränslasten [10].

Det kan finnas ett antal olika momentfördelningar som uppfyller dessa villkor [2]. I figur 3.2 studeras en balk som ligger på rullager i ena änden och är fast inspänd i den andra. Den är belastad med en punktlast på mitten. Man kan få fram olika momentfördelningar beroende på hur man väljer inspänningsmomentet vid väggen. Den elastiska, som man kanske är van vid att slå upp ur tabell, visas i figur 3.2c och



Figur 3.2: Exempel på momentfördelningar för en balk belastad med punktlast.

är bara en av alla möjliga [10].

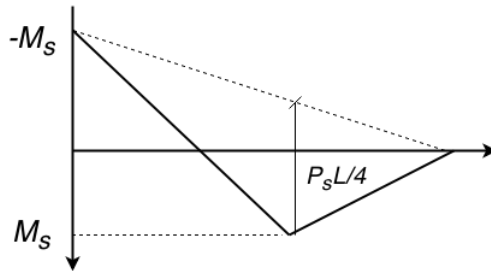
Vid beräkning med den statiska metoden väljer man helt enkelt en momentfördelning. Eftersom flytmomentet inte får överskridas antar man det som det maximala momentet i diagrammen. På så vis kan gränslasten bestämmas för de antagna momentfördelningarna. Ur figur 3.2 får vi att momentfördelning c) ger den största gränslasten, utifrån de givna alternativen. Gränslasten beräknas genom att det maximala momentet sätts som flytmomentet [10].

$$M_s = \frac{3P_s L}{16} \quad (3.5)$$

Gränslasten, P_s , kan nu lösas ut:

$$P_s = \frac{16M_s}{3L} = 5.333 \frac{M_s}{L} \quad (3.6)$$

Givet värde för gränslasten är, som konstaterats tidigare, beräknat på den säkra sidan. Om man får fram ett högre värde med den statiska metoden kommer det att vara närmare den verkliga gränslasten [2].



Figur 3.3: *Momentfördelning vid brottmekanism för balken i figur 3.2a.*

I konstruktionen från ovan nämnda exempel inser man att störst yttre last kan tillåtas då gränslastmomentet uppnås intill väggen och under punktlasten samtidigt, se figur 3.3. Det har då uppstått två flytleder och konstruktionen utgör en brottmekanism. Då denna uppstår beräknas gränslasten enligt nedanstående. Ur figur 3.3 kan följande samband ställas upp [10]:

$$-\frac{M_s}{2} + \frac{P_s L}{4} = M_s \quad (3.7)$$

Gränslasten P_s kan lösas ut vilket ger:

$$P_s = \frac{6M_s}{L} \quad (3.8)$$

Detta ger gränslasten då det är ett större värde än tidigare uppskattning. Skillnaden mellan gränslasten för den elastiska momentfördelningen, det vill säga $P_s = \frac{16M_s}{3L}$,

och den sistnämnda med två flytleder, $P_s = \frac{6M_s}{L}$, är 12.5 procent. Det bör tilläggas att en stor avvikelse från den elastiska momentfördelningen kräver mer av materialet då det måste deformeras mer för att möjliggöra momentomlagringen. Återigen nämns att teorin kräver att materialet tillåter tillräckligt stora deformationer [10].

I ovanstående exempel antas balken vara utformad av samma material och dimensioner längs hela längden, det vill säga samma tvärsnitt och flytmoment överallt. Detta är typiskt för en stålkonstruktion. Dock blir beräkningsgången annorlunda för en armerad betongkonstruktion, där man av olika anledningar armerar vissa delar av balken mer. Flytmomentet varierar alltså längs med balkens längd [10].

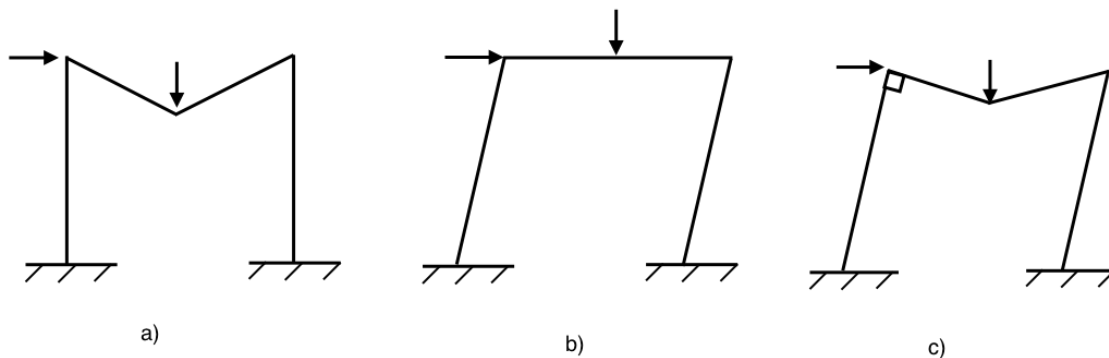
3.3.3 Kinematiska metoden

Den kinematiska metoden bygger på det kinematiska teoremet. Det säger att man för en konstruktion kan beräkna gränslasten genom att anta en brottmekanism. Lasten man får fram är då given på den osäkra sidan, det vill säga den rätta gränslasten eller högre. Metoden kallas ofta mekanismmetoden [10].

I den kinematiska metoden tillämpar man det virtuella arbetets princip, det vill säga man räknar inre och yttre arbete [5]. Arbete fås som känt av en kraft gånger en sträcka. Det yttre arbetet i våra beräkningar fås således som produkten av den yttre lasten som belastar konstruktionen och förskjutningarna som den orsakar [2].

$$A_y = \sum P_i \delta_i \quad (3.9)$$

Eftersom arbetet måste tas upp någonstans ställer man även upp ett uttryck för det inre arbetet. Det ges av produkten mellan momentet i flytleterna och vinkeländringen i dessa. För att lösa ut gränslasten sätts det yttre arbetet lika med det inre



Figur 3.4: a) *Balkmekanism*. b) *Förskjutningsmekanism*. c) *Kombinerad mekanism*.

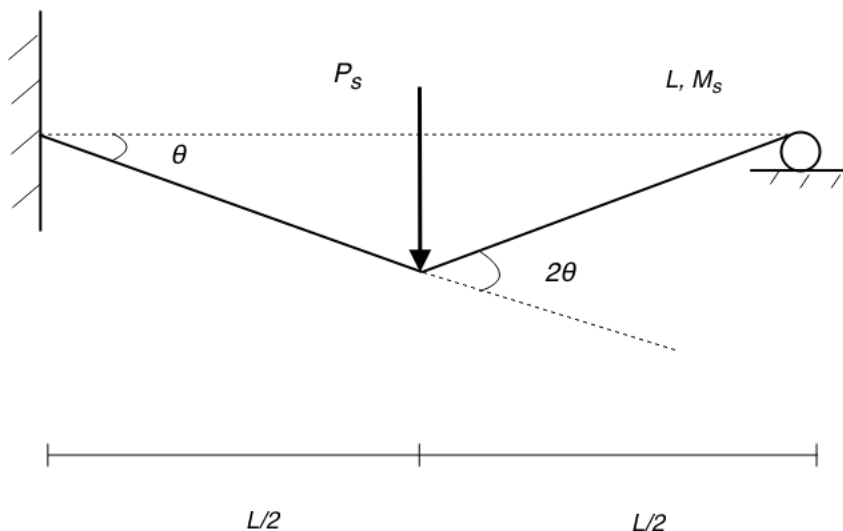
[10].

$$A_i = \sum M_s \theta_i \quad (3.10)$$

$$A_i = A_y \quad (3.11)$$

För att utnyttja gränslastteori enligt kinematiska teoremet måste man ha kunskap om olika typer av mekanismer som kan uppstå. Till exempel kan konstruktionen kollapsa genom olika elementarmekanismer eller kombinerade mekanismer. Elementarmekaniserna kan vara av olika typer som till exempel balkmekanism eller förskjutningsmekanism, se figur 3.4a och b där dessa illustreras. En kombinerad mekanism utgör en kombination av dessa enligt figur 3.4c. För att avgöra hur många olika oberoende mekanismer som kan uppstå i en konstruktion måste man först avgöra antalet möjliga flytleder, X , samt graden av statisk obestämdhet, n . Antalet möjliga oberoende mekanismer ges då av $k = X - n$ [5].

Det som gör den kinematiska metoden något komplicerad är att man måste hitta den farligaste brottmekanismen, det vill säga var flytlederna uppstår och hur konstruktionen kollapsar först. Genom att ställa upp olika brottmekanismer och beräkna brottlasten för samtliga av dessa får man brottlasten som det lägsta av alla framtagna värden. För att vara säker på att man hittat brottmekanismen som ger lägst värde på brottlasten, och alltså inte antar att konstruktionen klarar en för hög last, kan man kontrollera momentfördelningen. Om antagandet från den statistiska metoden uppfylls, det vill säga om gränslastmomentet inte överskrider i något tvärsnitt och statisk jämvikt råder, har man hittat den sanna gränslasten. Enligt entydighetssatsen kan man alltså konstatera att den sanna gränslasten hittats om man har funnit en last som ger flytleder i så många punkter så att en mekanism uppstår, samtidigt



Figur 3.5: En balk utsatt för en punktlast illustrerad i deformerat tillstånd.

som gränslastmomentet inte överskrider i något snitt och det råder statisk jämvikt [10].

Nedan följer ett exempel på hur man beräknar gränslasten med den kinematiska metoden. Till att börja med ställer man upp alla tänkbara brottmekanismer. Antag att vi har en balk som är fast inspänd i ena änden och ligger på ett rullager i den andra. Vi studerar fallet med en punktlast på balkens mitt. I enlighet med ovanstående beskrivning har vi då antalet kritiska snitt $X = 2$ och graden av statisk obestämdhet $n = 1$. Antalet oberoende mekanismer som kan uppstå är alltså en, i det här fallet en balkmekanism. Balken kommer att gå till brott då två flytleder uppstått, en under punktlasten och en intill väggen. I figur 3.5 visas balken i deformerat läge.

Som nämnts tidigare går metoden ut på att bestämma inre och yttre arbete. Under förutsättningen att vinkeln är liten kan nedböjningen under punktlasten tecknas som halva balkens längd gånger vinkeländringen. Det yttre arbetet blir således:

$$A_y = \theta \frac{LP_s}{2} \quad (3.12)$$

Det inre arbetet ges av vinkeländringen gånger momenten i motsvarande led. Det totala inre arbetet blir på så vis:

$$A_i = \theta M_s + 2\theta M_s \quad (3.13)$$

Eftersom det inre arbetet måste vara lika med det yttre fås följande värde på gränslasten:

$$A_y = A_i \quad (3.14)$$

$$\theta \frac{LP_s}{2} = \theta M_s + 2\theta M_s \quad (3.15)$$

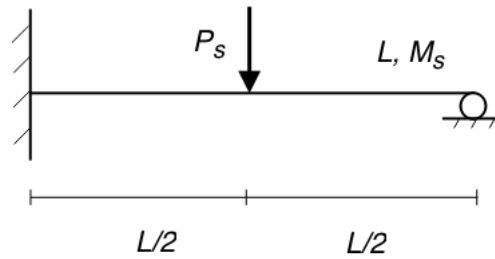
$$P_s = \frac{6M_s}{L} \quad (3.16)$$

Man kan jämföra det framräknade värdet på gränslasten från den kinematiska metoden med värdet som beräknats med den statiska metoden. Dessa överensstämmer vilket innebär att det korrekta värdet på gränslasten hittats [2].

3.4 Tillämpningsexempel

3.4.1 Exempel 1: Balk belastad med en punktlast

Det första exemplet som undersöks mer ingående utgörs av en balk som ligger på ett rullager i ena änden och är fast inspänd i den andra, se figur 3.6. I beskrivningen för

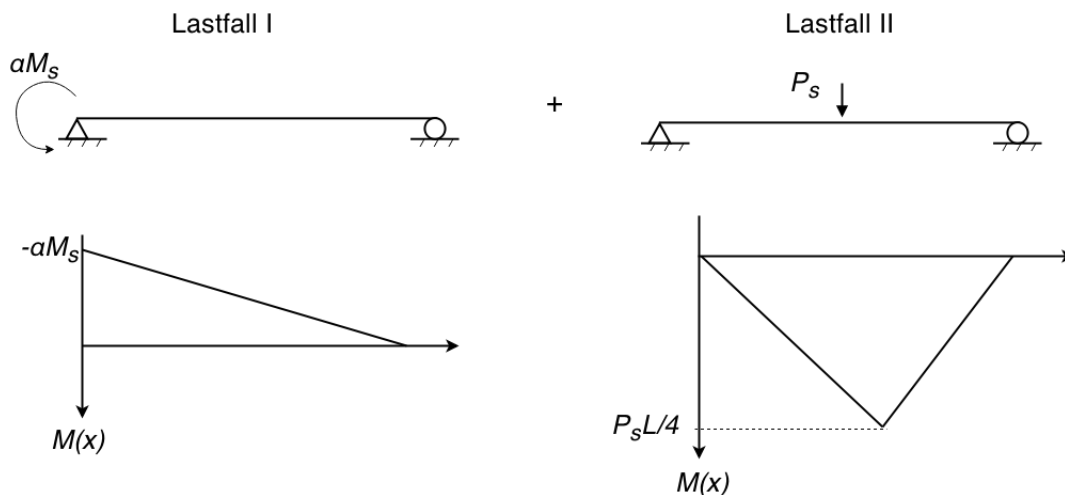


Figur 3.6: *Balk belastad med en punktlast.*

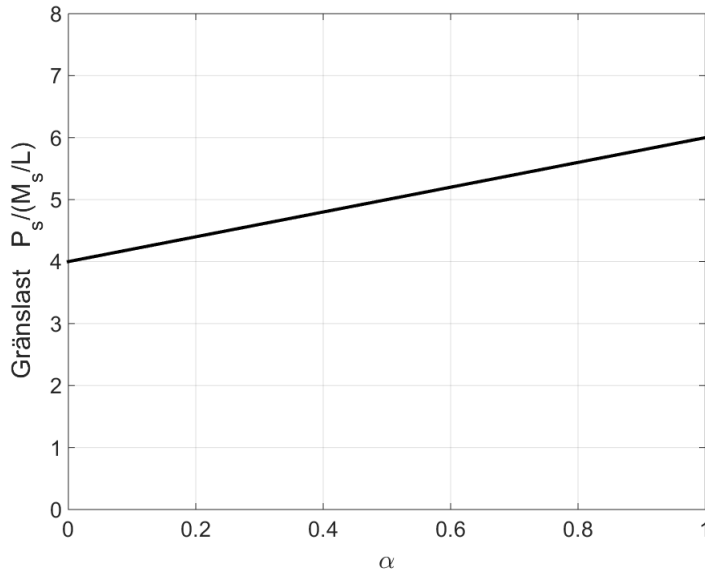
den kinematiska och den statiska metoden analyserades just denna konstruktionen. Man kunde konstatera att metoderna gav samma gränslast och att man alltså funnit det rätta värdet på den. Som nämnts tidigare ger den statiska metoden gränslasten på säkra sidan och den kinematiska metoden på den osäkra. För att illustrera detta genomförs några fler beräkningar för den ovan nämnda konstruktionen.

Statiska metoden

För att mer ingående visa på att den statiska metoden ger en gränslast på den säkra sidan beräknas lasten för flera olika inspänningsmoment intill väggen. Som nämnts tidigare får man olika momentfördelningar beroende på hur just detta väljs. Vi beskriver det valda inspänningsmomentet som αM_s där $0 \leq \alpha \leq 1$. Det innebär att inspänningsmomentet varierar mellan noll och flytmomentet.



Figur 3.7: *Momentfördelning med superposition.*



Figur 3.8: Statiska metoden, gränslast beroende på valt inspänningsmoment.

Man kan få fram balkens momentdiagram genom superposition av moment orsakat av inspänningsmomentet och punktlasten, se figur 3.7. Momentet i punkten direkt under lasten ges av uttrycket:

$$M_{mitt} = \frac{P_s L}{4} - \frac{\alpha M_s}{2} \quad (3.17)$$

Då det antas uppstå en flytled under punktlasten sätts $M_{mitt} = M_s$, det vill säga flytmomentet nås i den punkten. Nu kan P_s lösas ut uttryckt i α , L och M_s :

$$M_s = \frac{P_s L}{4} - \frac{\alpha M_s}{2} \quad (3.18)$$

$$P_s = \frac{M_s(4 + 2\alpha)}{L} \quad (3.19)$$

Om man låter α variera mellan noll och ett får man värden på gränslasten som varierar linjärt från $\frac{4M_s}{L}$ till $\frac{6M_s}{L}$. Detta visar alltså på att gränslasten alltid är mindre eller lika med det sanna värdet, $P_s = \frac{6M_s}{L}$, se figur 3.8.

Kinematiska metoden

Nedan visas genom exempel 1 att den kinematiska metoden faktiskt ger en gränslast som är på den osäkra sidan. För just det här exemplet är det uppenbart var flytleder

kommer att uppstå, nämligen under punktlasten och intill väggen. I svårare fall är det dock inte självklart var flytlederna uppstår. Vi beräknar därför med hjälp av kinematiska metoden hur brottlasten beror av var flytleden uppstår i fältet. Det görs genom att ställa upp två samband, ett för när flytleden är på vänster sida om punktlasten och ett då den är på höger sida.

Antag till att börja med att flytleden uppstår på vänster sida om punktlasten. Konstruktionen visas i deformerat läge i figur 3.9. Vi vill finna ett uttryck för vinkeln β i vinkeln θ , vilket görs nedan. I beräkningarna förutsätts vinkeln θ vara liten vilket medför $\tan \theta \approx \theta$.

$$a = \theta x \quad (3.20)$$

$$a = \beta(L - x) \quad (3.21)$$

$$\beta = \frac{\theta x}{(L - x)} \quad (3.22)$$

Nu kan vi uttrycka b som en funktion av x och θ .

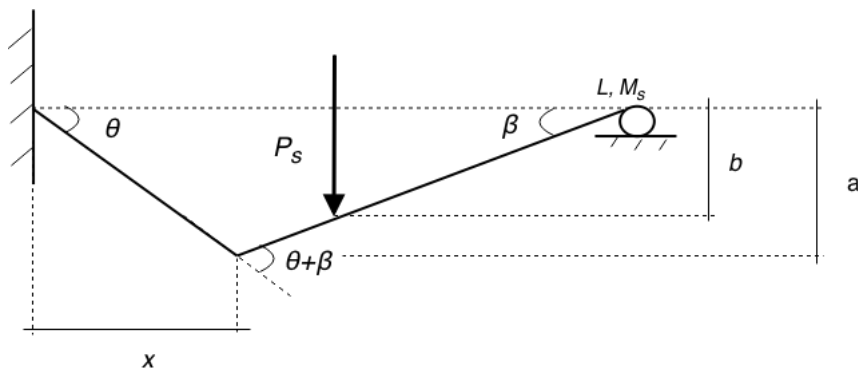
$$b = \frac{\beta L}{2} = \frac{\theta x L}{2(L - x)} \quad (3.23)$$

Det yttre och inre arbetet kan nu bestämmas.

$$A_y = P_s b = P_s \frac{\theta x L}{2(L - x)} \quad (3.24)$$

$$A_i = \theta M_s + (\theta + \beta) M_s = M_s \theta \left(2 + \frac{x}{(L - x)} \right) \quad (3.25)$$

Sätter man det yttre arbetet lika med det inre kan ett uttryck för gränslasten lösas ut. Värdet på gränslasten, P_s , beror på flytledens läge $x = \alpha L$, där $0 \leq \alpha \leq 0.5$.



Figur 3.9: Balk i deformerat läge där flytleden ligger till vänster om punktlasten.

$$P_s = \frac{M_s(4 - 2\alpha)}{L \alpha} \quad (3.26)$$

Motsvarande beräkningar görs men med antagandet att flytleden uppstår på höger sida om punktlasten enligt figur 3.10.

$$a = \theta x \quad (3.27)$$

$$a = \beta(L - x) \quad (3.28)$$

$$\beta = \frac{\theta x}{(L - x)} \quad (3.29)$$

Vi uttrycker b som en funktion av θ .

$$b = \frac{\theta L}{2} \quad (3.30)$$

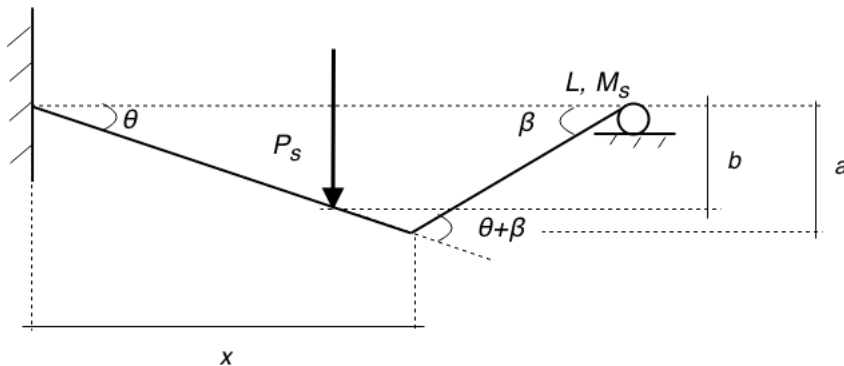
Det yttre och inre arbete bestäms nedan:

$$A_y = P_s b = P_s \frac{\theta L}{2} \quad (3.31)$$

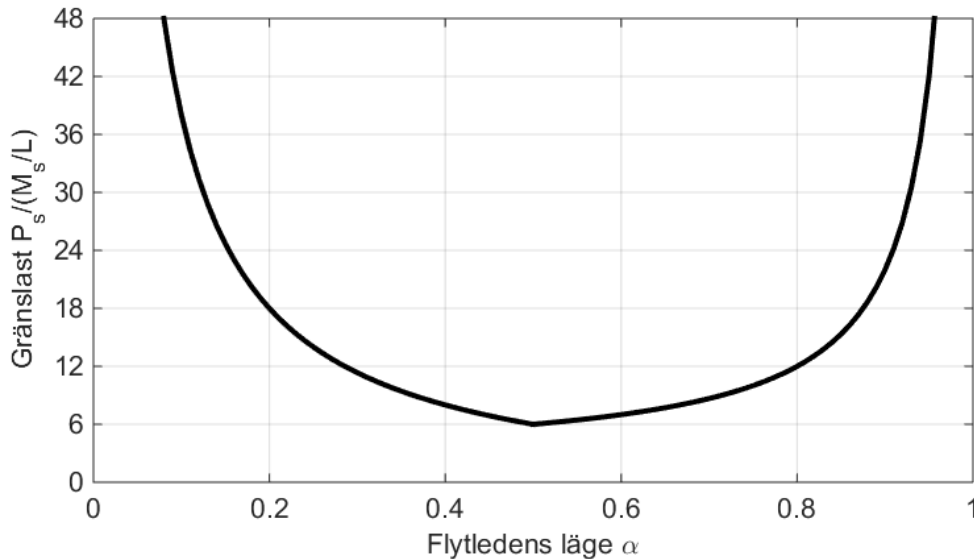
$$A_i = \theta M_s + (\theta + \beta) M_s = M_s \theta \left(2 + \frac{x}{(L - x)} \right) \quad (3.32)$$

Yttre arbetet sätts lika med det inre varpå nedanstående uttryck för gränslasten, P_s , ges. Värdet beror på flytledens läge $x = \alpha L$, där $0.5 \leq \alpha \leq 1$.

$$P_s = \frac{M_s}{L} \left(4 + \frac{2\alpha}{(1 - \alpha)} \right) \quad (3.33)$$



Figur 3.10: *Balk i deformerat läge där flytleden ligger till höger om punktlasten.*



Figur 3.11: Kinematiska metoden, gränslasten beroende på flytledens läge.

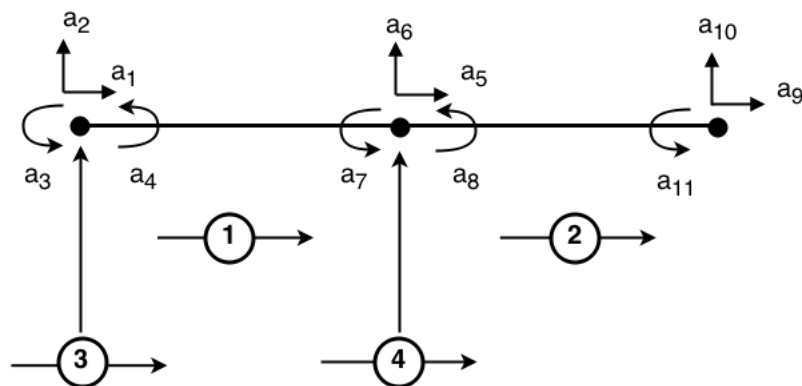
Med hjälp av ekvation 3.26 och 3.33 fås kurvan i figur 3.11. På x -axeln anges läget för flytleden uttryckt i α , där $\alpha = \frac{x}{L}$. På y -axeln anges gränslasten uttryckt i $P_s/\frac{M_s}{L}$.

Från figuren kan man se att gränslasten är lägst vid $\alpha = 0.5$ där den är $P = \frac{6M_s}{L}$. Det är den rätta gränslasten. För övriga lägen på flytleden fås ett för högt värde på gränslasten, vilket är precis det som det kinematiska teoremet säger. Man får gränslasten beräknad på den osäkra sidan.

Inkrementell formulering

För att beräkna gränslasten med hjälp av Matlab och funktioner i Calfem måste vi först ställa upp en beräkningsmodell. Det görs med beteckningar och tillvägagångssätt som förklaras i boken *Strukturmekanik* skriven av Ola Dahlblom och Karl-Gunnar Olsson [4]. Det som beskrivs i den boken tillämpas även i det fortsatta arbetet. Se beräkningsmodell för exempel 1 i figur 3.12. Den byggs upp av två balkelement och två rotationsfjädrar. En av rotationsfjädrarna är placerad i punkten intill väggen och en direkt under punktlasten. Anledningen till att de placeras ut är att kunna modellera uppkomsten av flytleder. Initialt ges rotationsfjädrarna en hög styvhet $k_\theta = 10^6 \frac{4EI}{3L}$. För konstruktionen inför vi att elasticitetsmodulen $E = 10^4$, tvärsnittsarean $A = 100$, tröghetsmomentet $I = 1$, flytmomentet $M_s = 1$ och balkens totala längd $L = 1$.

För modellen behövs 11 frihetsgrader. Elementindelning och frihetsgradsnumrering



Figur 3.12: *Beräkningsmodell.*

anges i figur 3.12. Topologimatrisen för balkelementen respektive rotationsfjädrarna anges nedan:

$$\text{Topologimatrix balkelement} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\text{Topologimatrix rotationsfjädrar} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

I enlighet med strategin Forward Euler sker en successiv pålastning. Vi väljer ett lastinkrement $\Delta P = 10^{-2}$ N. Eftersom lasten verkar i frihetsgrad a_6 , men motsatt positiv riktning, fås den inkrementella lastvektorn till:

$$\Delta \mathbf{f}_l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

Genom att först skapa elementstyvhetmatriser och assemblera dem fås den globala tangentiella styvhetmatrisen \mathbf{K}_T . Med hjälp av den och den inkrementella lastvektorn beräknas de inkrementella förskjutningarna $\Delta \mathbf{a}$ med hjälp av ekvation 3.2.

De inkrementella momenten i rotationsfjädrarna fås till:

$$\Delta M^3 = -0.0019 \text{ Nm}$$

$$\Delta M^4 = 0.0016 \text{ Nm}$$

Efter 534 pålastningar är momenten i rotationsfjädrarna:

$$M^3 = -0.0019 \cdot 534 = -1.0146 \text{ Nm}$$

$$M^4 = 0.0016 \cdot 534 = 0.8544 \text{ Nm}$$

Eftersom flytmomentet överskrider i element 3 reduceras styvheten i den rotationsfjädrern. Vi inför $k_\theta^3 = 0$. Eftersom det här påverkar den tangentiella styvhetsmatrisen beräknas en ny reducerad styvhetsmatris \mathbf{K}_T . Eftersom determinanten av \mathbf{K}_T är större än noll fortsätter pålastningen.

Med den nya styvhetsmatrisen \mathbf{K}_T som tar hänsyn till den reducerade styvheten i element 3 fås de inkrementella momenten i rotationsfjädrarna till:

$$\Delta M^3 = 0 \text{ Nm}$$

$$\Delta M^4 = 0.0025 \text{ Nm}$$

Efter 601 pålastningar är momenten i rotationsfjädrarna:

$$M^3 = -1.0146 \text{ Nm}$$

$$M^4 = 0.8544 + 0.0025 \cdot (601 - 534) = 1.0219 \text{ Nm}$$

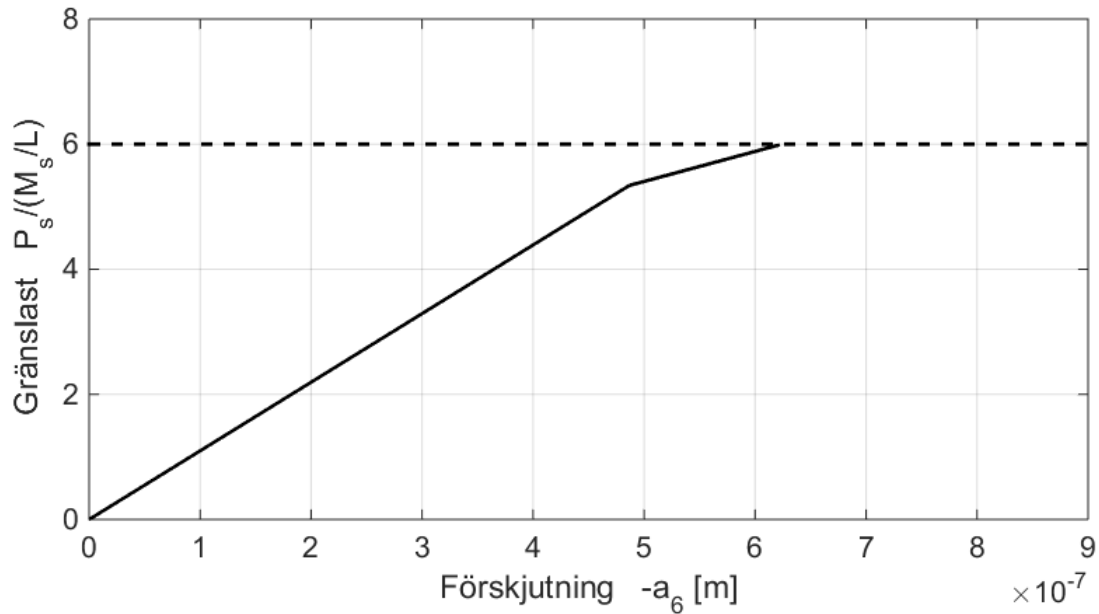
Nu överskrider flytmomentet även i element 4, det vill säga i rotationsfjädrern under punktlasten. Eftersom två flytleder utvecklats i konstruktionen bildas nu en mekanism och pålastningen avslutas. 601 pålastningar motsvarar gränslasten $P_s = 6.01 \frac{M_s}{L}$, vilket är ett värde något högre än det sanna. Om man genomför beräkningen med mindre lastinkrementen ser man dock att det närmar sig det exakta värdet, $P_s = 6 \frac{M_s}{L}$.

I figur 3.13 visar den heldragna linjen last/förskjutningssambandet för frihetsgrad a_6 under en successiv pålastning. Den streckade linjen i samma figur visar gränslasten framtagen med den statiska och kinematiska metoden.

Man kan i samma figur se att den beräknade maxlasten, P_s , är cirka 12% större än då den första flytledden uppstår. Med andra ord; gränslastberäkningar ger en bärförmåga som är 12% högre än elasticitetsteoretiska beräkningar för den här konstruktionen.

3.4.2 Exempel 2: Balk belastad med en utbredd last

Vi fortsätter i exempel 2 att studera en balk som är upplagd på ett rullager i ena änden och fast inspänd i den andra. Nu belastar vi den dock med en jämnt utbredd last, se figur 3.14. Det som gör beräkningarna mer komplicerade är att man inte



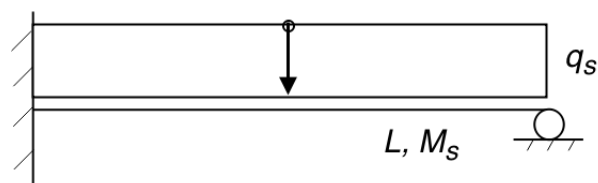
Figur 3.13: Den heldragna linjen visar last/förskjutningssamband för den vertikala förskjutningen mitt på balken vid en successiv pålastning. Den streckade linjen visar gränslasten framräknad med statiska och kinematiska metoden.

direkt vet läget för flytleden mellan upplagen.

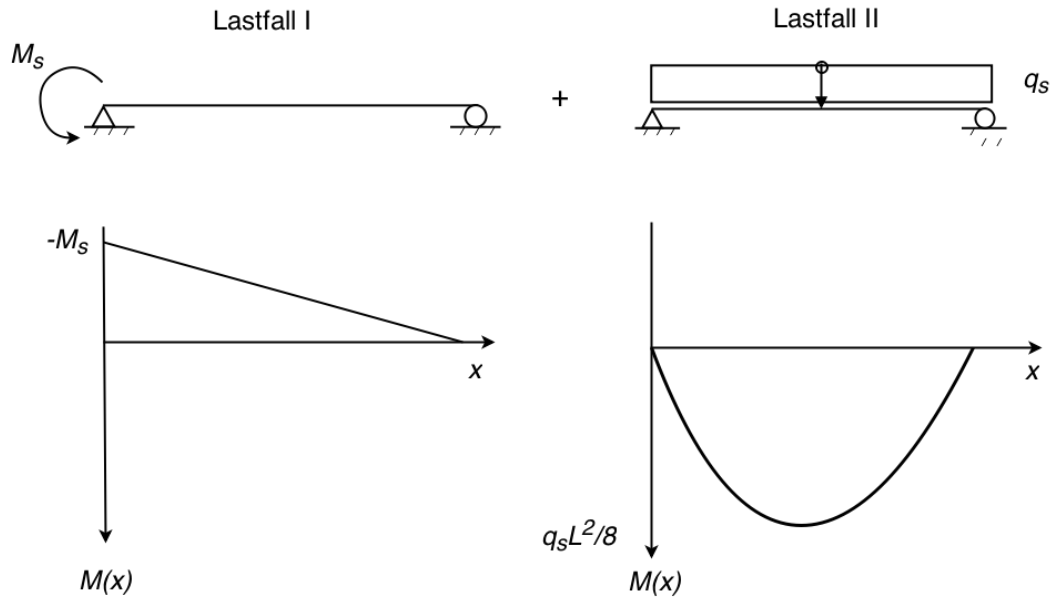
Statiska metoden

Läget för flytleden i fält beror på läget av det maximala fältmomentet. Det första vi gör är att dela upp beräkningsmodellen i två olika lastfall, se figur 3.15.

Under respektive lastfall visas motsvarande momentdiagram. För att undersöka i vilket läge längs balken som fältmomentet är som störst ställer vi upp en ekvation



Figur 3.14: Balk belastad med en utbredd last.



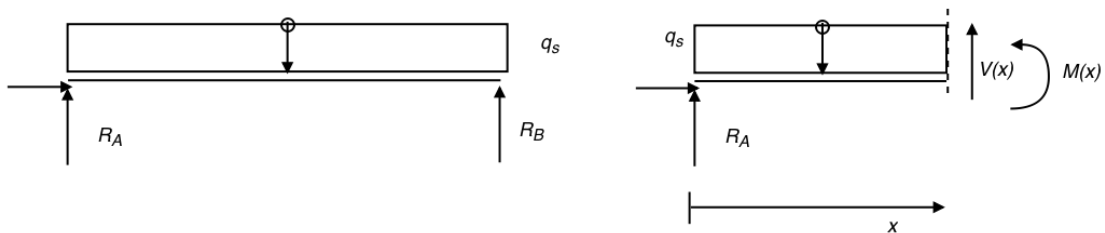
Figur 3.15: *Momentfördelning med superposition.*

som beskriver momentet beroende på läget x där $0 \leq x \leq L$.

Momentdiagrammet i figur 3.15, lastfall I, ger sambandet:

$$M_I(x) = -M_s + M_s \frac{x}{L} \quad (3.34)$$

För lastfall II är momentfördelningen inte linjär. För att få fram det exakta sambandet friläggs balken enligt figur 3.16. Upplagskrafterna R_A och R_B kan med jämvikt beräknas till $R_A = R_B = \frac{q_s L}{2}$. Utifrån ett frilagt snitt av balken fås momentet beroende på läget, x , som:



Figur 3.16: *Beräkning av upplagskrafter och momentfördelning för lastfall II i figur 3.15.*

$$M_{II}(x) = \frac{q_s L}{2} x - \frac{q_s x^2}{2} \quad (3.35)$$

Genom att kombinera dessa fås det totala momentet beroende på läget x som:

$$M(x) = M_I(x) + M_{II}(x) = M_s \left(\frac{x}{L} - 1 \right) + \frac{q_s}{2} (Lx - x^2) \quad (3.36)$$

Deriverar man uttrycket för $M(x)$ med avseende på x och sätter derivatan lika med noll hittas värdet på x då momentdiagrammet har sitt fältmaximum.

$$M'(x) = \frac{M_s}{L} + \frac{q_s}{2} (L - 2x) = 0 \quad (3.37)$$

$$x = \frac{M_s}{Lq_s} + \frac{L}{2} \quad (3.38)$$

där x motsvarar läget på flytleden i fält med kravet $0 \leq x \leq L$.

Genom att sätta in det här värdet på x i ekvation 3.36 fås momentet i läget där flytleden, vid en tillräckligt hög last, kommer att uppstå. Vi förutbestämmer därför värdet på momentet i det läget till flytmomentet, M_s , och kan på så sätt lösa ut gränslasten q_s .

$$M \left(\frac{M_s}{Lq_s} + \frac{L}{2} \right) = M_s \left(\frac{\frac{M_s}{Lq_s} + \frac{L}{2}}{L} - 1 \right) + \frac{q_s}{2} \left(L \left(\frac{M_s}{Lq_s} + \frac{L}{2} \right) - \left(\frac{M_s}{Lq_s} + \frac{L}{2} \right)^2 \right) = M_s \quad (3.39)$$

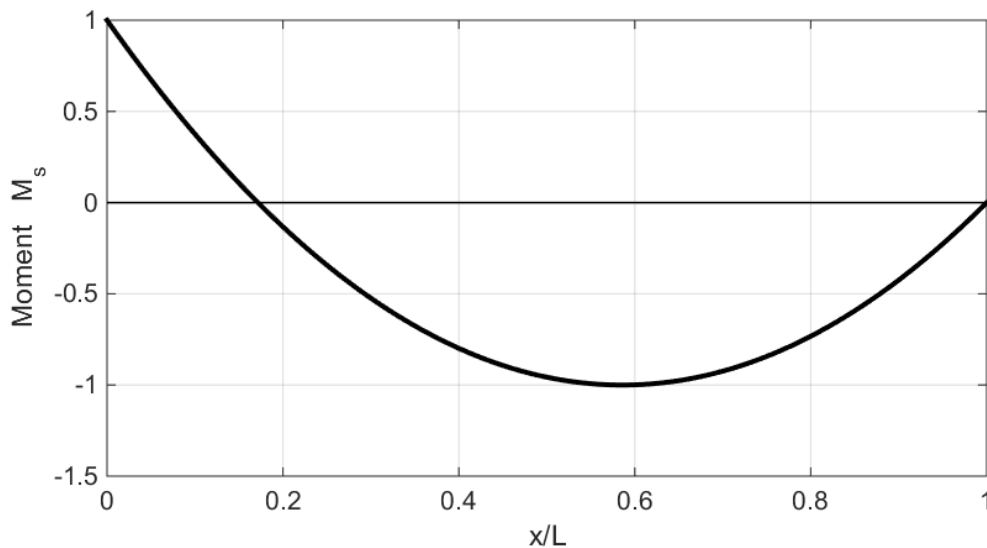
Löser man ut q_s ur ovanstående ekvation får man två lösningar:

$$q_s = \frac{6M_s}{L^2} \pm \sqrt{32} \frac{M_s}{L^2} \quad (3.40)$$

Man får alltså ut att $q_s = 11.66 \frac{M_s}{L^2}$ eller $q_s = 0.34 \frac{M_s}{L^2}$. Kontrollerar man värdet $q_s = 0.34 \frac{M_s}{L^2}$ i ekvation 3.38 ser man att man får ett värde på $x = 3.44L$. Det uppfyller ej kravet $0 \leq x \leq L$ och lösningen förkastas därför. Gränslasten ges alltså av $q_s = 11.66 \frac{M_s}{L^2}$ vid läget $x = 0.586L$. I figur 3.17 visas momentfördelningen i balken vid denna last.

Kinematiska metoden

För den kinematiska metoden löses detta exempel genom att man ritar upp balken i deformerat tillstånd enligt figur 3.18. Flytleden i fältet antas ligga på en sträcka



Figur 3.17: Statiska metoden, momentfördelning vid gränslasten q_s .

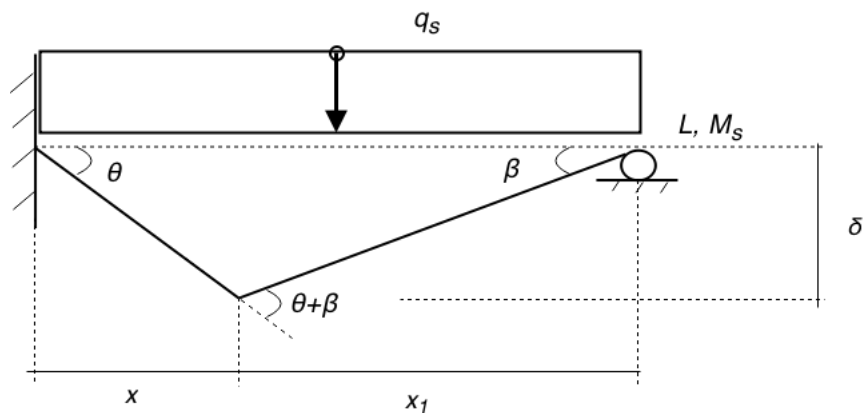
x_1 från högerkanten av balken. Vinklar och avstånd som används i beräkningarna bestäms först. För att kunna beräkna inre och yttre arbete införs avståndet δ samt vinkeln β .

$$\tan \theta = \frac{\delta}{L - x_1} \quad (3.41)$$

För små vinklar fås att $\tan \theta \approx \theta$. Detta ger:

$$\delta = \theta(L - x_1) \quad (3.42)$$

$$\tan \beta = \frac{\delta}{x_1} \quad (3.43)$$



Figur 3.18: Balk utsatt för en utbredd last, illustrerad i deformerat läge.

På motsvarande sätt som tidigare antas små vinklar vilket ger $\tan \beta \approx \beta$.

$$\beta = \frac{\theta(L - x_1)}{x_1} \quad (3.44)$$

Nu när alla vinklar och nedböjningar är uttryckta i L , x och θ kan det inre och yttre arbetet beräknas. Det yttre arbetet ges av lasten gånger utböjningen enligt ekvation 3.9.

$$A_y = q_s(L - x_1)\frac{\delta}{2} + q_s x_1 \frac{\delta}{2} \quad (3.45)$$

$$A_y = q_s L \frac{\theta(L - x_1)}{2} \quad (3.46)$$

Det inre arbetet ges av vinkeländringen gånger momentet enligt ekvation 3.10.

$$A_i = M_s \theta + M_s (\theta + \beta) \quad (3.47)$$

$$A_i = M_s \theta + M_s \left(\theta + \frac{\theta(L - x_1)}{x_1} \right) \quad (3.48)$$

$$A_i = M_s \theta \left(2 + \frac{(L - x_1)}{x_1} \right) \quad (3.49)$$

I enlighet med ekvation 3.11 sätts det yttre arbetet lika med det inre varpå följande erhålls och gränslasten q_s kan lösas ut.

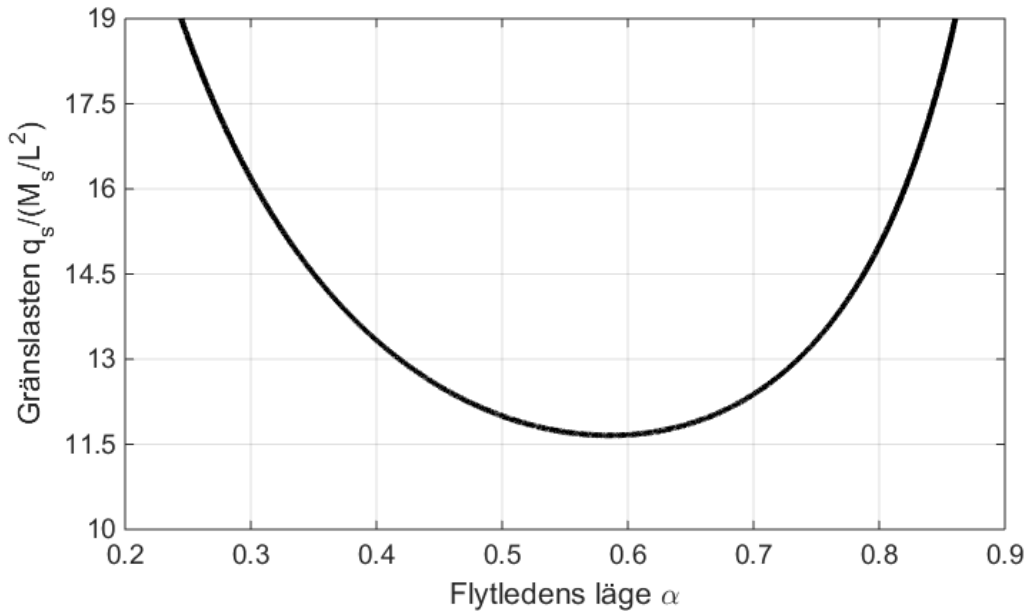
$$q_s L \frac{\theta(L - x_1)}{2} = M_s \theta \left(2 + \frac{(L - x_1)}{x_1} \right) \quad (3.50)$$

$$q_s = \frac{M_s}{L} \left(\frac{4}{(L - x_1)} + \frac{2}{x_1} \right) \quad (3.51)$$

Eftersom $x = L - x_1$ kan man byta ut x_1 i ekvationen ovan och istället få ett uttryck för gränslasten beroende på flytledens läge x från vänsterkanten. Vi kan vidare skriva om $x = \alpha L$ där $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$q_s = \frac{M_s}{L^2} \left(\frac{4}{\alpha} + \frac{2}{(1 - \alpha)} \right) \quad (3.52)$$

I figur 3.19 visualiseras gränslasten q_s . På x -axeln anges flytledens läge α , där $\alpha = \frac{x}{L}$, på y -axeln anges gränslasten i $q_s / \frac{M_s}{L^2}$. Kinematiska metoden ger gränslasten på den osäkra sidan, varför det lägsta värdet utläses och fås till $q_s = 11.66 \frac{M_s}{L^2}$. Jämför man den statiska och kinematiska metoden ser man att samma värde fås, man har alltså hittat den rätta gränslasten.



Figur 3.19: *Kinematiska metoden, gränslasten beroende på flytledens läge.*

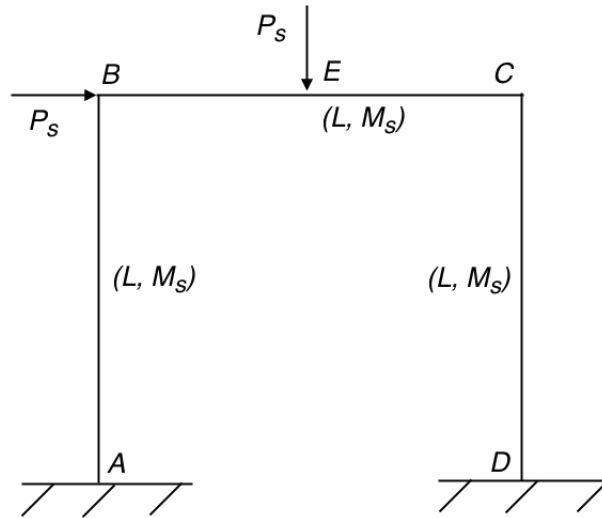
För elasticitetsteoretiska beräkningar, där man kombinerar elasticitetsteori med ett antagande om sprött brott vid momentet M_s , antar man att konstruktionen går till brott så fort det momentet uppnås i det högst belastade snittet. Momentet, M_s , uppnås först intill väggen i den fasta inspänningen. Det sker vid lasten $q = 8 \frac{M_s}{L^2}$ [8]. Gränslastberäkningar ger alltså en bärförmåga som är cirka 45% större än elasticitetsteoretiska beräkningar i det här fallet.

Inkrementell formulering

Eftersom vi inte vet det exakta läget för flytleden i fältet kan vi inte genomföra en Calfem-beräkning då vi ej vet var vi ska sätta in en rotationsfjäder. Detta undersöks närmare i kapitel 5.

3.4.3 Exempel 3: Ramverk belastat med två punktlaster

Den tredje konstruktionen som undersöks skiljer sig från föregående då den utgör ett ramverk. Ramen är belastad med två krafter som båda är av storleken P_s . Ramen är uppbyggd av samma material med flytmomentet M_s . Sidorna är lika långa och har längden L . Konstruktionen visas i figur 3.20.

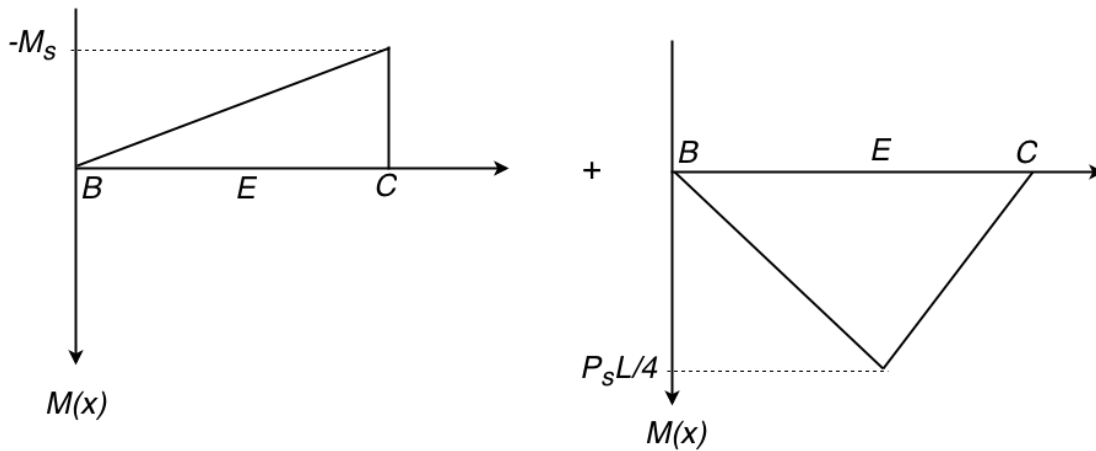


Figur 3.20: Ramverk belastat med två punktlaster.

Statiska metoden

När man analyserar ovanstående konstruktion med den statiska metoden måste man göra vissa antaganden. Konstruktionen är trefaldigt statiskt obestämd. Genom att bestämma momentet i tre punkter ges resten av momentdiagrammet därefter enligt jämvikt.

Vi gör antagandet att $M_B = 0$, $M_C = M_s$ och $M_D = M_s$. För att bestämma momentet i läge E nyttjas superposition enligt figur 3.21.



Figur 3.21: Momentfördelning enligt superposition för ramverkets horisontella del.

$$M_E = -\frac{M_s}{2} + \frac{P_s L}{4} \quad (3.53)$$

För att bestämma momentet i A behöver vi bestämma upplagskrafterna i D . Det görs genom tre friläggningar och beräkningarna nedan.

Ur friläggningen i figur 3.22a kan upplagskraften H_D lösas ut:

$$C : H_D L + M_s + M_s = 0 \quad (3.54)$$

$$H_D = -\frac{2M_s}{L} \quad (3.55)$$

Från friläggningen i figur 3.22b kan upplagskraften V_D lösas ut:

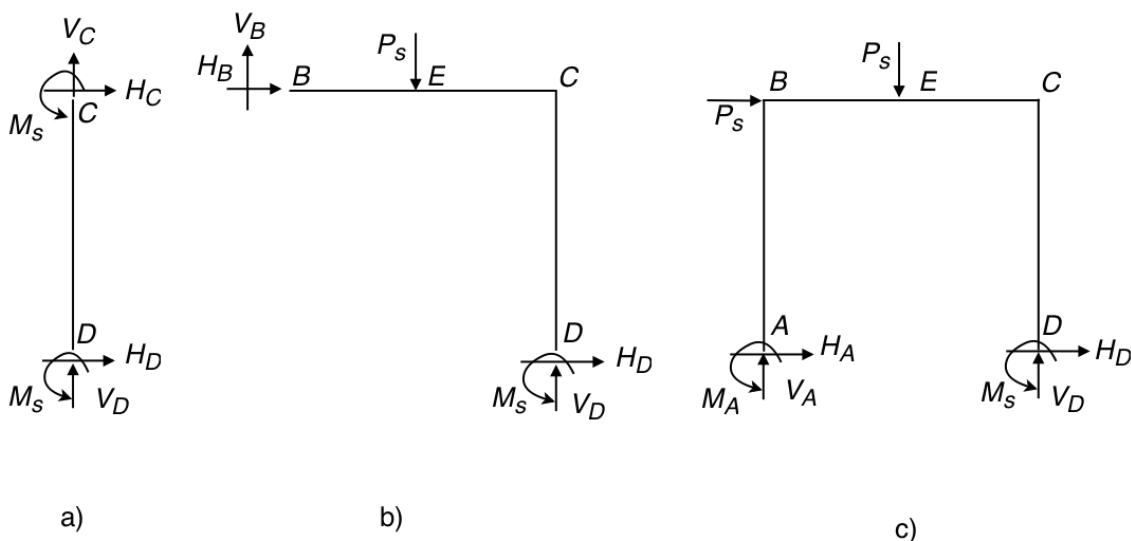
$$B : -P_s \frac{L}{2} + M_s + H_D L + V_D L = 0 \quad (3.56)$$

$$V_D = \frac{M_s}{L} + \frac{P_s}{2} \quad (3.57)$$

Tar man slutligen moment runt punkten A kan momentet M_A bestämmas:

$$A : M_A - \frac{P_s L}{2} - P_s L + V_D L + M_s = 0 \quad (3.58)$$

$$M_A = P_s L - 2M_s \quad (3.59)$$



Figur 3.22: *Friläggning av ramverket uppdelat i olika delar.*

I enlighet med det statiska teoremet får flytmomentet inte överskridas i någon punkt. Därför införs kravet att framtagna momenten M_A och M_E måste vara mindre eller lika med flytmomentet M_s .

$$M_E = -\frac{M_s}{2} + \frac{P_s L}{4} \leq M_s \quad (3.60)$$

$$P_s \leq 6\frac{M_s}{L} \quad (3.61)$$

$$M_A = P_s L - 2M_s \leq M_s \leq M_s \quad (3.62)$$

$$P_s \leq 3\frac{M_s}{L} \quad (3.63)$$

Då båda dessa villkor måste uppfyllas väljs det lägsta värdet, $P_s = 3\frac{M_s}{L}$. Detta är gränslasten framräknad på den säkra sidan.

Kinematiska metoden

När man beräknar gränslasten för exemplet ovan med den kinematiska metoden börjar man med att analysera vilka olika brottmekanismer som är möjliga. I figur 3.23 sammanställs dessa. Figur 3.23a visar en balkmekanism, figur 3.23b visar en förskjutningsmekanism och figur 3.23c en kombination av dessa. För att kunna avgöra vilken av dessa som ger den lägsta, och därmed mest korrekta, gränslasten måste man undersöka alla fallen var för sig.

Vi börjar med att anta att konstruktionen kollapsar som en balkmekanism enligt figur 3.23a. Det yttre och inre arbetet bestäms utifrån föreskrivna vinklar. Förskjutningen, δ , under punktlasten i mitten på ramverket tas fram under förutsättningen att vinkeln θ är liten så att $\tan \theta \approx \theta$.

$$\delta = \theta \frac{L}{2} \quad (3.64)$$

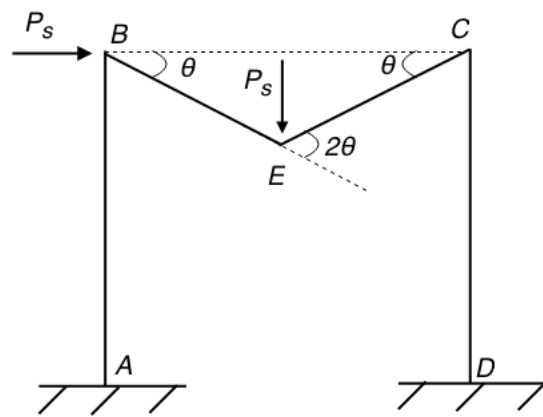
$$A_y = P_s \frac{\theta L}{2} \quad (3.65)$$

$$A_i = M_s \theta + M_s 2\theta + M_s \theta \quad (3.66)$$

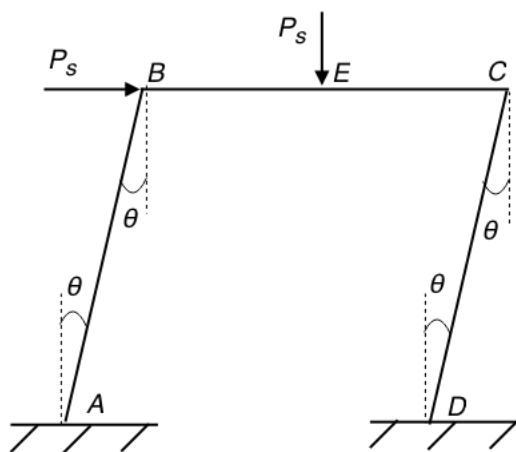
Sätter man sedan det yttre arbetet lika med det inre erhålls gränslasten för balkmekanismen:

$$P_s \frac{\theta L}{2} = 4M_s \theta \quad (3.67)$$

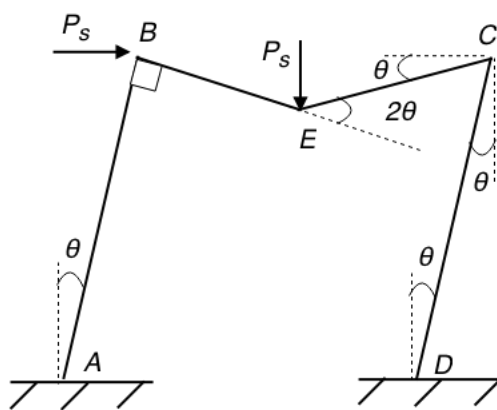
$$P_s = 8\frac{M_s}{L} \quad (3.68)$$



a)



b)



c)

Figur 3.23: Möjliga brottmekanismer.

Går man vidare och undersöker nästa brottmekanism, det vill säga förskjutningsmekanismen som visas i figur 3.23b, erhålls på motsvarande sätt nedanstående beräkningar.

$$\delta = \theta L \quad (3.69)$$

$$A_y = P_s \theta L \quad (3.70)$$

$$A_i = M_s \theta + M_s \theta + M_s \theta + M_s \theta \quad (3.71)$$

$$P_s \theta L = 4 M_s \theta \quad (3.72)$$

$$P_s = 4 \frac{M_s}{L} \quad (3.73)$$

Slutligen undersöks den kombinerade brottmekanismen som visas i figur 3.23c.

$$A_y = P_s \theta L + P_s \frac{\theta L}{2} \quad (3.74)$$

$$A_i = M_s \theta + M_s 2\theta + 2 M_s \theta + M_s \theta \quad (3.75)$$

$$\frac{3}{2} P_s \theta L = 6 M_s \theta \quad (3.76)$$

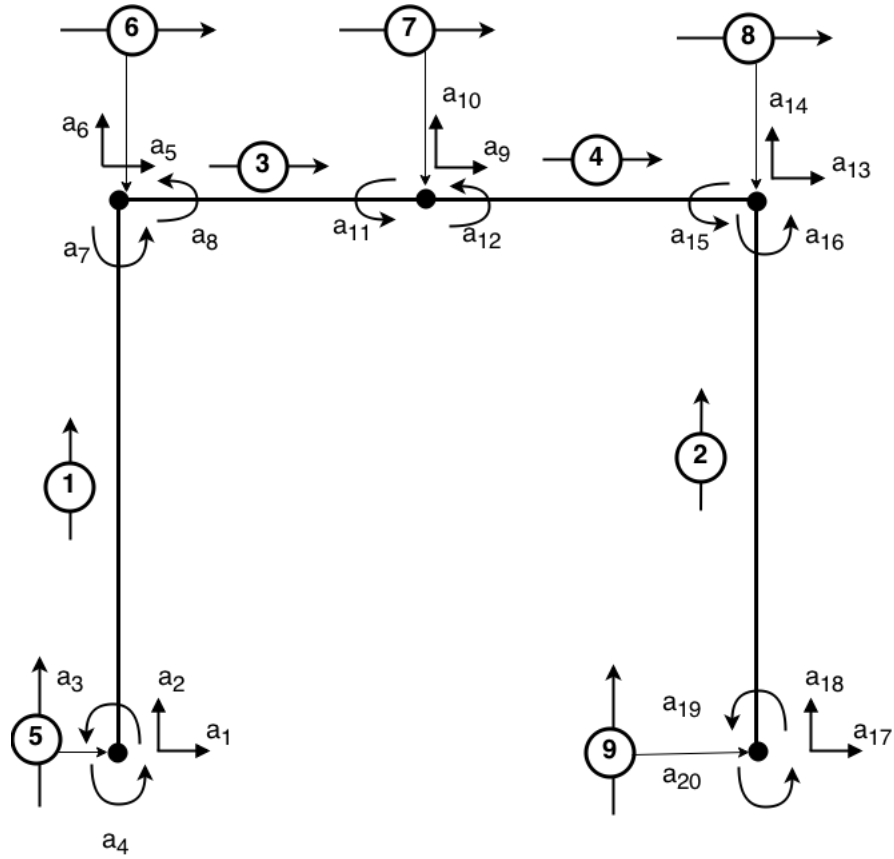
$$P_s = 4 \frac{M_s}{L} \quad (3.77)$$

Utifrån ovanstående beräkningar kan man konstatera att gränslasten beräknad på den osäkra sidan ger $P_s = 4 \frac{M_s}{L}$ då detta är det lägsta av de tre framtagna värdena. Jämför man detta med värdet framtaget med den statiska metoden ser man att detta är något högre. Den sanna gränslasten ligger alltså någonstans mellan dessa värden, $3 \frac{M_s}{L} \leq P_s \leq 4 \frac{M_s}{L}$.

Inkrementell formulering

Beräkningsmodellen byggs upp av 4 balkelement och 5 rotationsfjädrar med numrering och riktning enligt beräkningmodellen i figur 3.24. Rotationsfjädrarna ges en hög styvhet $k_\theta = 10^6 \frac{4EI}{3L}$. Då flytmomentet överskrider i något element reduceras denna styvhet till $k_\theta = 0$. För konstruktionen inför vi elasticitetsmodulen $E = 10^4$, tvärsnittsarean $A = 100$, tröghetsmomentet $I = 1$, flytmomentet $M_s = 1$ och balkens sidlängder $L = 1$.

För modellen behövs 20 frihetsgrader. Topologimatrisen för balkelementen respektive rotationsfjädrarna anges nedan:



Figur 3.24: Beräkningsmodell.

$$\text{Topologimatrix balkelement} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 17 & 18 & 19 & 13 & 14 & 16 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 9 & 10 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\text{Topologimatrix rotationsfjädrar} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 11 & 12 \\ 8 & 15 & 16 \\ 9 & 19 & 20 \end{bmatrix}$$

Det sker en successiv pålastning med ett lastinkrement $\Delta P = 10^{-2}N$. Lasten verkar positivt i frihetsgrad a_5 samt i a_{10} med negativ riktning. Den inkrementella lastvektorn ges således av:

$$\Delta \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

Den globala styvhetsmatrisen \mathbf{K}_T tas fram och med hjälp av den och den inkrementella lastvektorn beräknas de inkrementella förskjutningarna $\Delta \mathbf{a}$ med hjälp av ekvation 3.2.

De inkrementella momenten i rotationsfjädrarna fås till:

$$\Delta M^5 = 0.0026 \text{ Nm}$$

$$\Delta M^6 = 0.0013 \text{ Nm}$$

$$\Delta M^7 = 0.0017 \text{ Nm}$$

$$\Delta M^8 = -0.0028 \text{ Nm}$$

$$\Delta M^9 = 0.0032 \text{ Nm}$$

Efter 313 pålastningar är momenten i rotationsfjädrarna:

$$M^5 = 0.0026 \cdot 313 = 0.8138 \text{ Nm}$$

$$M^6 = 0.0013 \cdot 313 = 0.4069 \text{ Nm}$$

$$M^7 = 0.0017 \cdot 313 = 0.5321 \text{ Nm}$$

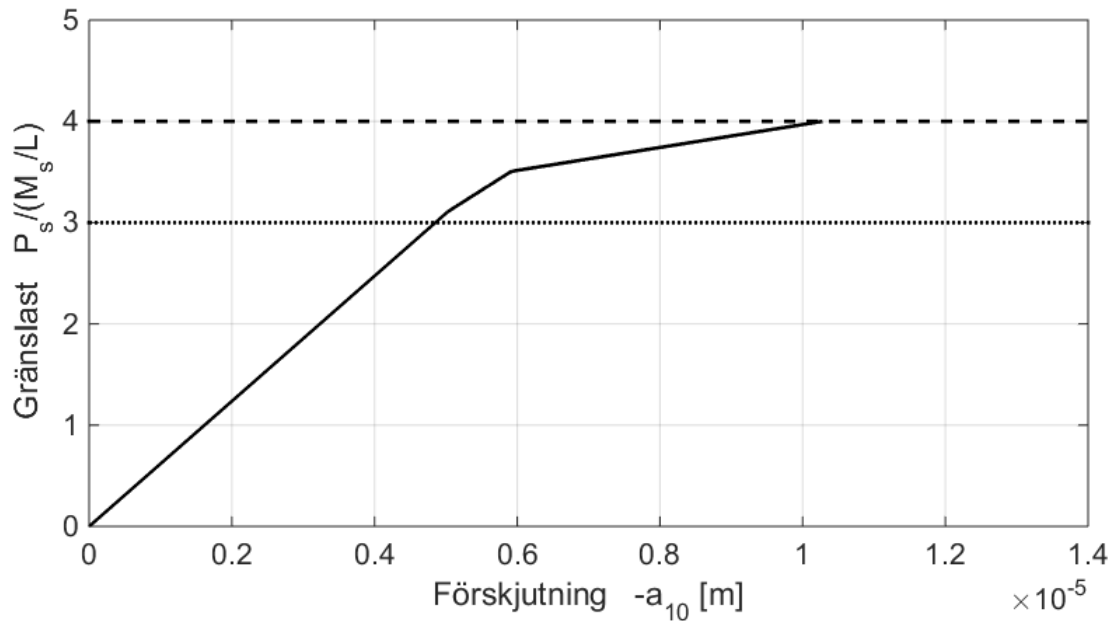
$$M^8 = -0.8764 \cdot 313 = -0.8764 \text{ Nm}$$

$$M^9 = 0.0032 \cdot 313 = 1.0016 \text{ Nm}$$

Eftersom flytmomentet överskrider i element 9 reduceras styvheten i den rotationsfjädrern, vi inför med andra ord $k_\theta^9 = 0$. Det här påverkar den globala styvhetsmatrisen. Beräknas en ny reducerad styvhetsmatris ser man att determinanten av den är större än noll, vilket innebär att pålastningen fortsätter. De nya inkrementella momenten

i rotationsfjädrarna beräknas och samma beräkninggång upprepas. Processen fortsätter på samma sätt tills dess att konstruktionen bildar en mekanism. Detta sker efter 400 pålastningar, varför gränslasten P_s ges av $P_s = 4\frac{M_s}{L}$.

I figur 3.25 visar den heldragna linjen last/förskjutningssambandet för frihetsgrad a_{10} under en successiv pålastning. Den punktade respektive streckade linjen i samma figur visar gränslasten framtagen med den statiska respektive kinematiska metoden.



Figur 3.25: Den heldragna linjen visar last/förskjutningssamband för den vertikala förskjutningen under punktlasten på ramverkets horisontella del. Den punktade respektive streckade linjen visar gränslasten framräknad med den statiska respektive kinematiska metoden.

Man kan i figur 3.25 se att den beräknade maxlasten, P_s , är cirka 27% större än då den första flytleden uppstår. Med andra ord; gränslastberäkningar ger en bärförmåga som är 27% högre än elasticitetsteoretiska beräkningar för den här konstruktionen.

Kapitel 4

Gränslastberäkningar för tvådimensionella konstruktionselement

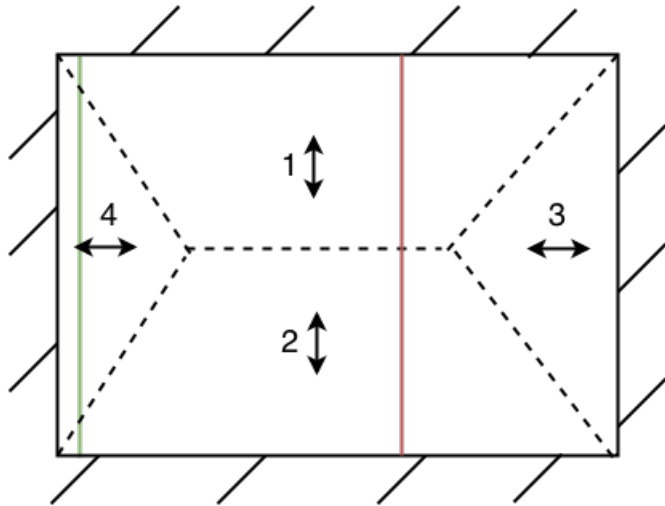
4.1 Introduktion

I kapitel 3 presenteras gränslastberäkningar för endimensionella konstruktionselement. Med gränslastteori är det då den statiska och kinematiska metoden som tillämpas. Konstruktionerna flyter i punkter. Har man ett tvådimensionellt konstruktionselement, som exempelvis en platta, flyter konstruktionen istället längs linjer. Nedan presenteras två metoder baserade på gränslastteori för tvådimensionella element. Strimlemetoden baseras på det statiska teoremet och brottlinjemetoden på det kinematiska teoremet.

4.2 Strimlemetoden

Strimlemetoden utvecklades i mitten av 1950-talet och grundas på det statiska teoremet. Metoden ger beräkningar på den säkra sidan och är tänkt att användas vid dimensionering av armerade betongplattor. Den bygger på att man tar fram en momentfördelning som uppfyller jämviktsvillkoren. Man armerar därefter plattan utifrån denna [7].

För rektangulära plattor som är upplagda längs alla sidor kan den enkla strimlemetoden användas. Det första man gör är att markera ut de så kallade begränsningslinjerna. Längs dessa antas tvärkraften vara noll. För att bestämma hur dessa går



Figur 4.1: Avgränsningslinjer och bärande riktningar för respektive plattelement.

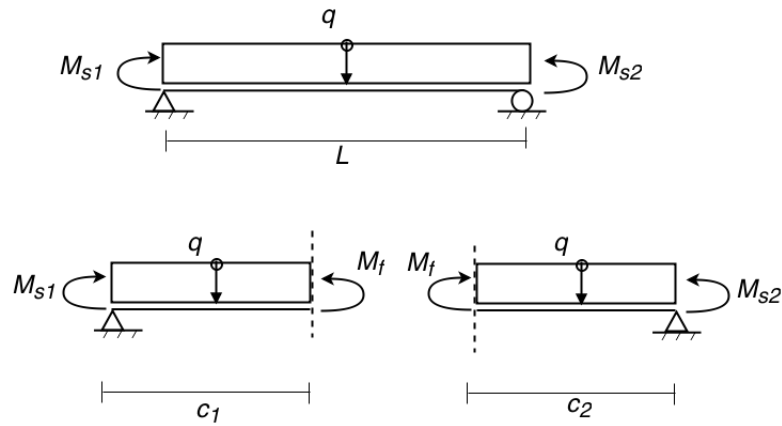
kan man följa vissa riktlinjer. Om plattan är fast inspänd längs två sidor som möts i ett hörn ska begränsningslinjen från det hörnet dras med lutningen 1:1, alternativt något närmre den kortare sidan. I ett hörn av plattan där två sidor som båda är fritt upplagda möts ska begränsningslinjen ritas ut markant närmre den kortare sidan. Är det ett hörn med en sida som är fast inspänd och en som är fritt upplagd ska begränsningslinjen dras mycket närmre den fritt upplagda sidan. Begränsningslinjerna för en rektangulär platta möter varandra i två punkter, se figur 4.1. Mellan dessa dras en rak linje som oftast blir parallell med plattans långsida [7].

Med hjälp av begränsningslinjerna delas plattan in i olika plattelement, se figur 4.1. Lasten på respektive del antas bäras upp i endast en armeringsriktning. Riktningarna som de olika delarna bär last i har markerats med pilar i figur 4.1 [7].

Varje plattelement delas därefter in i smala strimlor längs med den riktning som de antas bära last i. Inget vridmoment verkar i dessa strimlor. Varje strimla kan ses som en balk. Antag först att vi studerar en strimla markerad med rött enligt figur 4.1. Inspänningsmomenten längs infästningen resresenteras av m_{s1} och m_{s2} . Om hela plattan utsätts för en jämnt utbredd last q fås även en jämnt utbredd last q på varje balk. Delar man balken precis där tvärkraften är noll fås två delar med en friläggning enligt figur 4.2. Differensen mellan inspänningsmomentet och det maximala fältmomentet kan uttryckas enligt ekvationen nedan [7].

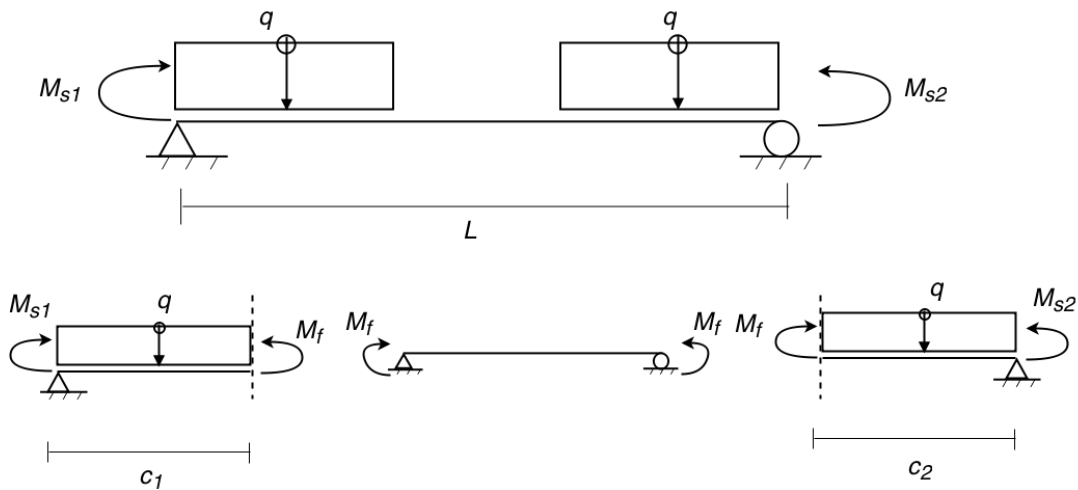
$$m_f - m_s = \frac{qc^2}{2} \quad (4.1)$$

Det vanliga fallet när man snittar plattan är dock inte att strimlorna från två plattelement möts utan att det är en obelastad del i mitten, se den gröna markeringen i figur 4.1. Man får då en strimla som kan ses som en balk med en utbredd last



Figur 4.2: *Friläggning av rödmarkerad strimla i figur 4.1.*

enligt figur 4.3. Tvärkraften är enligt antagna begränsningslinjer noll där balken är obelastad. Det medför att momentet m_f är oförändrat över den längden. Differensen mellan inspänningsmomentet och det maximala fältmomentet ges av samma ekvation som ovan, ekvation 4.1, utifrån friläggningen i figur 4.3. Det som skiljer sig är längden c [7].



Figur 4.3: *Friläggning av grönmarkerad strimla i figur 4.1.*

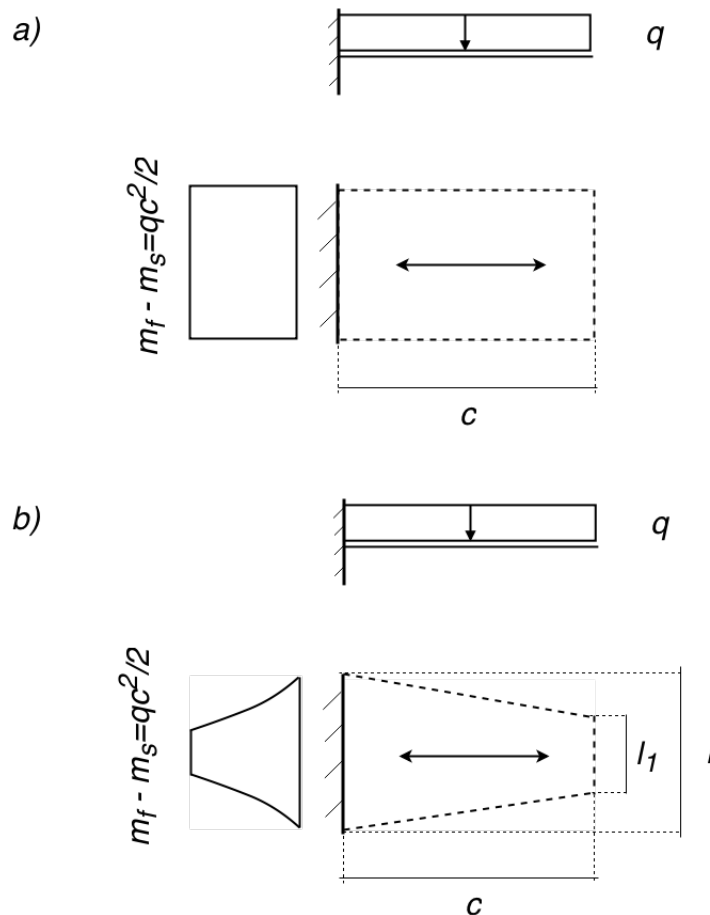
Vi har nu bestämt skillnaden mellan inspänningsmoment och maximalt fältmoment för de olika strimlorna. Vi vill bestämma ett medelmoment per breddmeter för de olika plattelementen. Antag först ett rektangulärt plattelement enligt figur 4.4a. Medelmomentet per breddmeter är då konstant:

$$m_f - m_s = \frac{qc^2}{2} \quad (4.2)$$

Om plattelementet utgörs av en parallelltrapets enligt figur 4.4b får man hitta ett uttryck för varje balkstrimma som beror på c och l . Genom att kombinera detta med ekvation 4.1 får man fram att det totala medelmomentet för plattdelen ges av:

$$m_f - m_s = \frac{qc^2(l + 2l_1)}{6l} \quad (4.3)$$

Plattelementen som vi har representerade i figur 4.1 utgörs av just två parallelltrapezter samt två specialfall där $l_1 = 0$. Det totala medelmomentet per breddmeter



Figur 4.4: Moment, $m_f - m_s$, beroende på plattelementens form. a) Rektangulärt plattelement. b) Parallelltrapezformat plattelement.

för ett sådant specialfall, det vill säga ett triangulärt plattelement, ges av:

$$m_f - m_s = \frac{qc^2}{6} \quad (4.4)$$

När medelmomentet bestämts görs en momentfördelning i sidled. Anledningen till detta är att momentet oftast är som störst för strimlorna i mitten och mindre för dem utåt kanterna, se fördelningen i figur 4.4b. Har man ett medelmoment, m_{av} kan man ställa upp följande villkor för två nya moment [7]:

$$m_{av}l = m_{d_1}l_1 + m_{d_2}l_2 \quad (4.5)$$

$$m_{d_1} = \frac{m_{av}}{\frac{l_1}{l} + \frac{m_{d_2}}{m_{d_1}} \left(1 - \frac{l_1}{l}\right)} \quad (4.6)$$

Förhållandet $\frac{m_{d_2}}{m_{d_1}}$ brukar väljas till $\frac{1}{2}$ eller $\frac{1}{3}$.

Om man inte har en platta som bärs upp längs med hela sidor, utan istället kanske hålls upp med hjälp av pelare, kan inte den enkla strimlemetoden användas. Då får man tillämpa den avancerade strimlemetoden. Eftersom det här arbetet endast syftar till att grundläggande belysa olika metoder för gränslastberäkningar analyseras endast den enkla strimlemetoden. Önskas vidare läsning hänvisas till litteratur om strimlemetoden, så som Strip Method Design Handbook skriven av A. Hillerborg [7].

4.3 Brottlinjemetoden

Brottlinjemetoden bygger på det kinematiska teoremet, med andra ord ger den alltså en brottlast på den osäkra sidan. Det innebär att värdet man får fram är en för hög skattning av brottlasten eller den sanna [3].

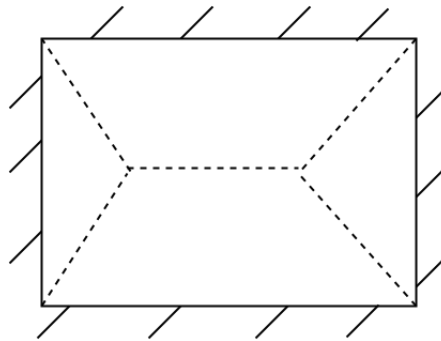
Betongkonstruktioner är ofta armerade för att förbättra hållfastheten i drag. Beroende på armeringsmängden brukar man konstatera att ett tvärsnitt är normalarmerat, balanserat eller överarmerat. I överarmerade tvärsnitt går konstruktionen till brott på grund av tryckbrott i betongen, vilket innebär att stålet inte uppnår flytmomentet [8]. Betongplattor är dock vanligen med god marginal normalarmerade. Det innebär att armeringsstålet börjar flyta innan betongen går till brott. När flytmomentet uppnås påverkas betongplattans styvhet och en omfördelning av moment sker. Då lasten fortsätter att öka kommer betongplattan att deformeras längs de så kallade brottlinjerna [12].

Vi förutsätter vidare att vi har en normalarmerad betongplatta. Innan betongen går till brott börjar således stålet att flyta eftersom vi antar ett elastiskt-idealplastiskt

material. Materialet kommer att flyta längs speciella linjer, brottlinjerna. De utgör ett sammanhängande mönster och delar in plattan i olika segment. Längs med dessa linjer sker en vinkeländring. I övrigt antas segmenten förbli plana och odeformerade. I brottlinjerna verkar moment och tvärkrafter. Med hjälp av kinematiska beräkningar kan man bestämma brottlasten för konstruktionen utifrån detta [11].

För att genomföra beräkningar enligt denna metoden måste man först göra ett antagande om brottlinjefiguren. Eftersom metoden är baserad på det kinematiska teoremet är det lämpligt att testa flera olika alternativa brottlinjefigurer för att hitta den som ger lägst värde på gränslasten. Väljs en felaktig modell kan konstruktionen armeras för lite eller dess bärförmåga överskattas. Det finns med anledning av detta bestämmelser om anger att man ska vara väldigt noggrann vid bestämmandet av brottlinjefigur [11].

För enkla konstruktioner är det oftast uppenbart var brottlinjerna kommer att uppstå. I mer avancerade konstruktioner med annorlunda upplagsvillkor kan det dock vara svårare att lokalisera dessa. Brottlinjefigurens utseende beror på lasten och dess utbredning samt upplagsvillkor. Man skiljer på positiva och negativa brottlinjer, där positiva innebär drag i underkant och negativa drag i ovankant. Det här påverkar var i tvärsnittet man behöver extra armering [12]. Ett exempel på brottlinjefigur visas i figur 4.5.



Figur 4.5: *Exempel på brottlinjefigur enligt brottlinjemetoden.*

När brottlinjefiguren bestämts kan man beräkna brottlasten med det virtuella arbetets princip. Värt att notera igen är att metoden ger lasten på den osäkra sidan. Dimensionerar man någonting med brottlinjemetoden bör man därför vara medveten om att det kan innebära att man får en för liten mängd armering. Brottlinjemetoden är av den anledningen kanske bäst lämpad för kontrollberäkningar av brottsäkerhet [12]. För en mer ingående beskrivning hänvisas till litteratur som till exempel Betonghandboken [11].

Kapitel 5

Utveckling av beräkningsmetod i Calfem

5.1 Problembeskrivning

I avsnitt 3.3.2 konstateras att det finns brister med den presenterade strategin för en inkrementell formulering som presenteras i avsnitt 3.1. Den utgår från att man på förhand för in rotationsfjädrar med en hög styvhet där flytleder kan uppstå. Dessa lägen ges typiskt av fasta inspänningar, ramhörn och under punktlaster. När vi har en utbredd last blir det dock svårt att tillämpa denna strategi då det inte längre är uppenbart var konstruktionen kommer att flyta. Nedan följer en utveckling av strategin i Calfem där man kan beräkna gränslasten även för konstruktioner utsatta för utbredda laster.

5.2 Framtagning av generell strategi

5.2.1 Program som för in rotationsfjädrar

Syfte

Antag att vi har en konstruktion som är utsatt för en jämnt utbredd last. Eftersom vi inte vet i vilka punkter vi ska införa rotationsfjädrar vill vi istället föra in väldigt många på det belastade balkelementet. Dessa delar in balkelementet i flera mindre element. Införandet av rotationsfjädrar påverkar således topologimatrisen för både balkelementen och fjäderelementen. Vidare påverkas även matriserna som beskriver

de olika elementen; $ep1$, $ep2$, ex samt ey . Ett program har utvecklats för att införa ett valt antal rotationsfjädrar på ett visst element. Det beskrivs mer i detalj nedan.

Indata och utdata

Indata till programmet ges av den ursprungliga beräkningsmodellens topologimatrix för balkelementen, $Edof1$, respektive rotationsfjädrarna, $Edof2$. Man anger balkelementens elasticitetsmodul, tvärsnittsarea och tröghetsmoment i $ep1$. I $ep2$ anges rotationsfjädrarnas styvhet. Vidare ska man ange vilket element s som utsätts för en utbredd last och hur många rotationsfjädrar n som man vill införa. Om det är flera element som utsätts för en utbredd last börjar man med att köra programmet för det högst numrerade balkelementet. Säg till exempel att både element tre och två i en viss modell har en utbredd last, då körs programmet först för $s = 3$ och sedan för $s = 2$. Det beror på att införandet av rotationsfjädrar ökar antalet balkelement i modellen vilket påverkar numreringen av dem i topologimatriken, $Edof1$.

Utdata från programmet ges av de uppdaterade topologimatriskerna $Edof1$ och $Edof2$. Vidare fås uppdaterade matriser innehållande balkelementens elasticitetsmodul, tvärsnittsarea och tröghetsmoment i $ep1$ respektive rotationsfjädrarnas styvhet i $ep2$. I matriserna ex och ey anges koordinater för samtliga balkelement i den uppdaterade beräkningsmodellen. I j anges antal frihetsgrader i den nya beräkningsmodellen.

```
[Edof1 , Edof2 , ep1 , ep2 , ex , ey , j]=  
nonlin ( Edof1 , Edof2 , s , ep1 , ep2 , ex , ey , n )
```

Beskrivning av programmet

Programmet börjar med att avgöra hur många frihetsgrader f som den ursprungliga modellen har genom att hitta det största värdet i topologimatriskerna. Detta görs för att veta vilket nummer de nya frihetsgraderna ska tilldelas. Man plockar även ut vilka frihetsgrader element s är kopplat till i start respektive slutnod, $abeg$ och $aend$. För att veta elasticitetsmodul, tvärsnittsarea och tröghetsmoment för balkelement s plockas rätt rad ut ur $ep1$. Även x - och y -koordinaterna för det aktuella balkelementet s plockas ut.

```
f=max(max(Edof1 (:)) , max(Edof2 (:)));  
abeg=Edof1 ( s , 2 : 4 );  
aend=Edof1 ( s , 5 : 7 );  
epss=ep1 ( s , : );  
xs=ex ( s , : );  
ys=ey ( s , : );
```


Programmet bygger upp en ny topologimatrix, *top1*, som beskriver det valda elementet men indelat i flera nya element. Antag att vi inför n rotationsfjädrar, antalet nya balkelement ges då av $k = n + 1$. Antalet nya frihetsgrader som införs ges av $4n$ och det totala antalet frihetsgrader som nyttjas i den nya uppdaterade modellen är $j = f + 4n$. För att bygga upp topologimatrixen, *top1* skapas en vektor h som innehåller de nya frihetsgrader som införs.

```
k=n+1;
j=f+n*4;
h=(f+1):j;
```

Storleken av topologimatrixen *top1* ges av k antal rader och 7 kolonner. Oavsett hur många rotationsfjädrar n som vi väljer att föra in så kommer *top1*(1, 2 : 4) ges av frihetsgraderna i element s startnod och *top1*(k , 5 : 7) av frihetsgraderna i element s slutnod.

```
top1=zeros(k,7);
top1(1,2:4)=abeg;
top1(k,5:7)=aend;
```

För övriga element i *top1* hittas ett samband för vilka frihetsgrader ur vektorn h som ska placeras in på vilka platser i matrisen. Matrisen byggs upp med hjälp av en for-loop. Första kolonnen i *top1* rättas till senare i programmet då *top1* slås ihop med den ursprungliga topologimatrixen för att få den nya matrisen *Edof1* som beskriver den uppdaterade beräkningsmodellen.

```
for i=1:n
top1(i+1,2:3)=h((4*i-3):(4*i-2));
top1(i+1,4)=h(4*i);
top1(i,5:7)=h((4*i-3):(4*i-1));
end
```

Efter att detta skett skapas topologimatrixen för de införda rotationsfjädrarna, *top2*. Storleken på denna ges av antalet rotationsfjädrar n som rader och 3 kolonner. För att få in rätt värden i matrisen hittas ett samband för vilka frihetsgrader ur vektorn h som ska placeras in på vilka platser i topologimatrixen *top2* som sedan byggs upp med hjälp av en for-loop. Första kolonnen rättas till senare i programmet då *top2* slås ihop med den ursprungliga topologimatrixen för att få den nya matrisen *Edof2* som beskriver samtliga rotationsfjädrar i den uppdaterade beräkningsmodellen.

```
top2=zeros(n,3);
for i=1:n
top2(i,2:3)=h((4*i-1):(4*i));
end
```

Även matriserna $ep1$ och $ep2$ måste anpassas efter att balkelement s delats in i k nya balkelement. Samtliga nya balkelement k antas få samma elasticitetsmodul, tvärsnittsarea och tröghetsmoment som s . Initialt ges alla nya rotationsfjädrar en hög styvhet.

```
eps1=[epss(1)*ones(k,1) epss(2)*ones(k,1) epss(3)*ones(k,1)];
eps2=4e6/3*epss(1)*epss(3)*ones(k,1);
```

När balkelement s delas in i k delar måste man vidare skapa en ny vektor som beskriver x - och y -koordinater för dessa. Det görs genom att en vektor skapas innehållande längden för s i x - respektive y -led uppdelade i k lika stora delar. Med hjälp av en for-loop bestäms sedan längden för de k olika elementen och sparas i $xvec$ respektive $yvec$ som båda är matriser med storleken $(k, 2)$.

```
xh=linspace(xs(1),xs(2),k+1);
xvec=zeros(k,2);
for i=1:k
    xvec(i,1:2)=[xh(i) xh(i+1)];
end
```

```
yh=linspace(ys(1),ys(2),k+1);
yvec=zeros(k,2);
for i=1:k
    yvec(i,1:2)=[yh(i) yh(i+1)];
end
```

Nu har alla nya matriser för indelningen av element s byggts upp. Det som återstår att göra är att sätta ihop dessa med de ursprungliga matriserna ifrån indatan för att få matriser som beskriver den nya uppdaterade beräkningsmodellen. Det första som görs är att skapa den uppdaterade topologimatrisen $Edof1$. Programmet lägger in topologimatrisen för indelningen, $top1$, på rad s i den ursprungliga topologimatrisen. Sedan korrigeras den första kolonnen som beskriver elementindelningen.

```
v=size(Edof1,1);
edo1=[];
for i=1:v
    if i==s
        edo1=[edo1;top1];
    else
        edo1=[edo1;Edof1(i,:)];
    end
end
v=size(edo1,1);
edo1(:,1)=(1:v);
Edof1=edo1;
```

På motsvarande sätt slås även *xvec* ihop med *ex*, *yvec* med *ey* och *eps1* med *ep1*. Anledningen till att man inte lägger in matriserna för indelningen i slutet av de ursprungliga är att raden i respektive matris som motsvarar elementet *s* ska ersättas och med andra ord inte finnas kvar den också.

```
v=size(ep1,1);
epo1=[];
for i=1:v
    if i==s
        epo1=[epo1;eps1];
    else
        epo1=[epo1;ep1(i,:)];
    end
end
ep1=epo1;
```

```
v=size(ex,1);
exo=[];
for i=1:v
    if i==s
        exo=[exo;xvec];
    else
        exo=[exo;ex(i,:)];
    end
end
ex=exo;
```

```
v=size(ey,1);
eyo=[];
for i=1:v
    if i==s
        eyo=[eyo;yvec];
    else
        eyo=[eyo;ey(i,:)];
    end
end
ey=eyo;
```

För rotationsfjädrarna kan vi dock föra in den nya topologimatrisen *top2*, i slutet av den ursprungliga. Numreringen för rotationsfjädrarna kommer således att bli att de ursprungliga rotationsfjädrarna behåller sin numrering och sen kommer varje ny fjäder i tur och ordning som de införs. I den nya sammanslagna topologimatrisen för

rotationsfjädrarna, $Edof2$, korrigeras den första kolonnen som beskriver elementindelningen. För att få fram den nya matrisen $ep2$ följs samma princip.

```
Edof2=[Edof2; top2 ];  
v=size (Edof2 ,1);  
Edof2 (: ,1)=(1:v);
```

```
ep2=[ep2; eps2 ];
```

Programmet återfinns i sin helhet i bilaga A.

5.2.2 Program som beräknar gränslasten

Syfte

Nu har vi alltså utvecklat ett program som tar ett valt balkelement och gör en indelning av detta samt inför rotationsfjädrar i noderna. Nedan beskrivs ett program där man enkelt kan ändra på markerade indata för att beräkna gränslasten för olika beräkningsmodeller. Programmet bygger på samma princip som i beskrivningen i avsnitt 3.1, det vill säga en inkrementell pålastning. Skillnaden är att man kan nyttja programmet ovan för att beräkna gränslasten för konstruktioner med en jämnt utbredd last.

Indata och utdata

I programmet är det en del parametrar som man måste gå in och justera beroende på vilken konstruktion man beräknar gränslasten för. I programmets första del ska man ange elasticitetsmodul, tvärsnittsarea, tröghetsmoment, sidlängder och flytmoment. Man fyller vidare i topologimatrисerna för balkelementen respektive rotationsfjädrarna. Att tänka på när man gör detta är att man ser till att ge de elementen som belastas med en utbredd last högst nummer vid elementindelningen. Vidare börjar numreringen av rotationsfjädrarna på 1. Man fyller på vanligt sätt i elasticitetsmodul, tvärsnittsarea och tröghetsmoment i $ep1$ samt rotationsfjädrarnas styvhet i $ep2$. Koordinater för samtliga balkelement anges i ex och ey . För kommande beräkningar måste man även ha angett antal balkelement som inte belastas med en utbredd last, ob .

I del två nyttjar man programmet som togs fram i avsnitt 5.2.1 för att göra en elementindelning och införa rotationsfjädrar på elementen som belastas med en jämnt utbredd last. Det man här måste ange är antal rotationsfjädrar man vill införa, n ,

samt på vilket balkelement, s . Här måste man vara observant om man har fler än ett balkelement med utbredd last. Då ska man genomföra steget för elementet med högst nummer enligt elementindelningen först. Därefter kopierar man stycket och genomför det för nästa. Säg exempelvis att vi vill göra en indelning av både element 3 och 2 i en konstruktion. Genomför del 2 för $s = 3$ först och därefter för $s = 2$. Detta med anledning av att element 3 kommer att ha tilldelats ett nytt elementnummer om indelningen av element 2 görs först.

När detta steg är avklarat har vi alla matriser som beskriver vår konstruktion. Det som återstår att göra är en inkrementell pålastning där vi undersöker momentet i samtliga rotationsfjädrar. Pålastningen fortsätter tills dess att maximalt antal möjliga flytleder uppstått och konstruktionen således utgör en mekanism, eller då determinanten av den reducerade styvhetsmatrisen är noll vilket även det indikerar instabilitet. För att genomföra dessa beräkningar behöver man i del tre ange maximalt antal flytleder $fmax$, upplagsvillkor bc , lastinkrementens storlek dq samt antal iterationer $iter$. Efter detta är programmet skrivet på ett sånt sätt att det sköter sig själv. Det som kan behöva korrigeras är om någon last utöver den utbredda lasten belastar konstruktionen, till exempel en punktlast eller ett moment. Programmet förutsätter även att den utbredda lasten är lika stor i alla delar av konstruktionen vilket får justeras om så inte är fallet.

Programmet skriver ut i vilken rotationsfjäder en flytled uppstår, vid vilken iteration och vilken last det motsvarar.

Beskrivning av programmet

Det första som görs är att indata justeras efter aktuell beräkningsmodell, se Indata och utdata ovan. När detta fyllts i kan man köra programmet. Det första som görs är att beräkningsmodellen anpassas så att fler rotationsfjädrar förs in på elementen som är belastade med en utbredd last.

Det som görs efter detta är att vektor e skapas. Denna anger vilka element som ej är belastade med en utbredd last. En vektor eu skapas som på motsvarande sätt anger vilka element som är belastade med en utbredd last. Dessa kommer att behövas vid skapandet av den globala styvhetsmatrisen K . Programmet bestämmer även hur många rotationsfjädrar d som den uppdaterade beräkningsmodellen innehåller.

```
e = [1:ob];  
w = size(Edof1, 1);  
eu = (ob + 1):w;  
d = size(Edof2, 1);
```

För att bestämma gränslasten startas därefter en for-loop som går från $i = 1 : iter$. Först införs dock värden på vissa variabler som behövs i loopen. I varje iteration

byggs den inkrementella lastvektorn och den aktuella styvhetsmatrisen upp. Styvhetsmatrisen byggs upp genom tre olika for-loopar. Den första för in styvhetsmatriserna för de obelastade elementen, den andra styvhetsmatriserna för elementen belastade med en utbredd last och den tredje styvhetsmatriserna från rotationsfjädrarna. I den andra for-loopen byggs även den inkrementella lastvektorn upp. Efter det här steget genomförs en kontroll av den reducerade styvhetsmatrisen. Om determinanten av den är noll betyder det att konstruktionen är instabil. Det indikerar att konstruktionen övergått till en mekanism och pålastningen avbryts om så är fallet.

```

K=zeros(j);
df=zeros(j,1);

for i=e
    ke=beam2e(ex(i,:),ey(i,:),ep1(i,:));
    K=assem(Edof1(i,:),K,ke);
end
for i=eu
    [ke1,fe]=beam2e(ex(i,:),ey(i,:),ep1(i,:),[0 -dq]);
    [K,df]=assem(Edof1(i,:),K,ke1,df,fe);
end
for i=1:d
    ke2=spring1e(ep2(i));
    K=assem(Edof2(i,:),K,ke2);
end

redK=red(K,bc);
if det(redK)<=1
    disp(['Determ. _noll_vid_lasten_qs=',num2str((i-1)*dq)])
    break
end

```

För varje iteration beräknas de inkrementella förskjutningarna och upplagskrafterna med hjälp av funktionen *solveq*. De inkrementella momenten i rotationsfjädrarna bestäms som *des2* med hjälp av två *calcfem*funktioner. Funktionen *extract* plockar ut inkrementella förskjutningarna för respektive rotationsfjädrar och *spring1s* beräknar de inkrementella momenten i dem. För varje rotationsfjädrar uppdateras de totala momenten i vektorn *es2*.

```

[da,dr]=solveq(K,df,bc);
a=a+da;
r=r+dr;

dEd2=extract(Edof2,da);
des2=zeros(d,1);
for i=1:d

```

```

des2(i)=spring1s(ep2(i),dEd2(i,:));
es2(i)=es2(i)+des2(i);
end

```

För att veta om flytmomentet uppnåtts i någon punkt jämförs momenten i samtliga fjäderelement med flytmomentet My . I en variabel *nypled* summeras antalet rotationsfjädrar där flytmomentet överskrids. Om värdet i den här variablen överstiger antalet redan uppkomna flytleder, *pled*, införs en ny flytled. Programmet hittar vilka rotationsfjädrar som flytmomentet uppnåtts i och ändrar styvheten för dessa till noll i *ep2*. När antalet flytleder, *pled*, överstiger eller motsvarar det maximalt tillåtna antalet flytleder, *fmax*, avbryts programmet.

```

nypled=sum(abs(es2)>=My);

if nypled>pled
    flyt=find([abs(es2)>=My]);
    ep2(flyt)=0;
    fn=flyt
    pled=nypled;
    disp([num2str(pled), '_ flyt _ vid _ q=_ ', num2str((z)*dq)])
end
if pled>=fmax; break; end;

```

Programmet återfinns i sin helhet i bilaga B.

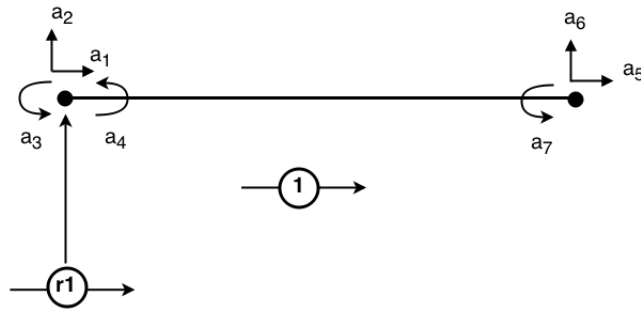
5.3 Tillämpningsexempel

5.3.1 Balk belastad med en utbredd last (Exempel 2)

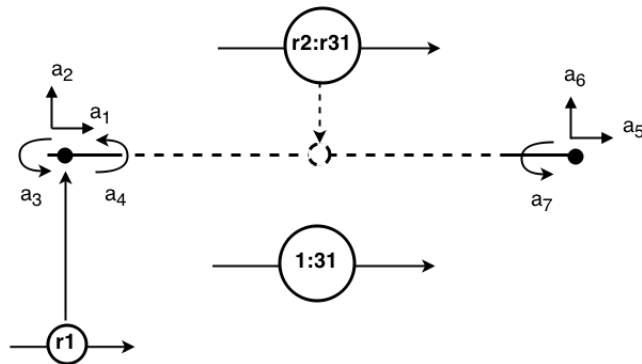
I avsnitt 3.3.2 presenterades ett exempel med en balk som är fast inspänd i den ena änden och upplagd på ett rullager i den andra. Den belastades med en jämnt utbredd last. Då kunde vi inte lösa problemet med Calfem enligt avsnitt 3.1. Med programmen som utvecklats i avsnitt 5.2 går det dock att lösa problemet.

Det första som görs är att en beräkningsmodell med ett balkelement och en rotationsfjäder ställs upp med numrering och riktning enligt figur 5.1a. Initialt ges rotationsfjäders en hög styvhet $k_\theta = 10^6 \frac{4EI}{3L}$. För konstruktionen inför vi elasticitetsmodulen $E = 10^4$, tvärsnittsarean $A = 100$, tröghetsmomentet $I = 1$, flytmomentet $M_s = 1$ och balklängden $L = 1$.

För modellen behövs 7 frihetsgrader. Topologimatrisen för balkelementen respektive



a)



b)

Figur 5.1: a) Beräkningsmodell före införandet av rotationsfjädrar. b) Beräkningsmodell efter införandet av rotationsfjädrar.

rotationsfjädrarna anges nedan:

$$\text{Topologimatrix balkelement} = [1 \ 1 \ 2 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$$

$$\text{Topologimatrix rotationsfjädrar} = [1 \ 3 \ 4]$$

Programmet från avsnitt 5.2.2 utnyttjas. Eftersom konstruktionen har ett element som är utsatt för en utbredd last får vi $s = 1$ och $ob = 0$. Vi väljer att föra in $n = 30$ stycken rotationsfjädrar. En uppdaterad beräkningsmodell visas i figur 5.1b. Maximalt antal tillåtna flytleder ges av $fmax = 2$ och i enlighet med upplagsvillkoren föreskrivs förskjutningen i frihetsgraderna $a1$, $a2$, $a3$ samt $a6$ till noll. Vi väljer ett lastinkrementet $dq = 1/100$ och $iter = 2000$. I programmet anges alltså följande:

```
E=10000; A=100; I=1; L=1; My=1;
Edof1=[1 1 2 4 5 6 7];
Edof2=[1 3 4];
ep1=[E A I];
ep2=4e6*[E*I/3/L];
ex=[0 L];
ey=[0 0];
```



```

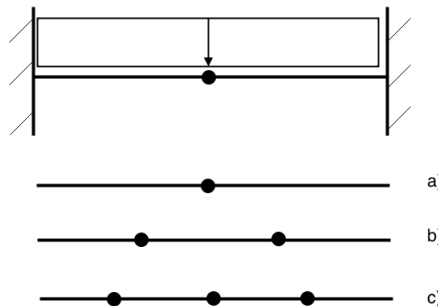
ob=0;
n=30;
s=1;
[Edof1 ,Edof2 ,ep1 ,ep2 ,ex ,ey ,j]=
nonlin (Edof1 ,Edof2 ,s ,ep1 ,ep2 ,ex ,ey ,n );
fmax=2;
bc=[1 0;2 0;3 0;6 0];
dq=1/100;
iter=2000;

```

All nödvändig information är nu angiven och programmet sköter beräkningen av gränslasten. Ut ur programmet får vi att den första flytleden kommer att uppstå vid lasten $q = 8.01 \frac{M_s}{L^2}$. Den andra flytleden som uppstår får konstruktionen att bli en mekanism. Gränslasten ges då av $q_s = 11.67 \frac{M_s}{L^2}$. Väljer vi mindre lastinkrement och en finare indelning med fler n närmar sig gränslasten $q_s = 11.66 \frac{M_s}{L^2}$. Det värdet överensstämmer med framräknade värden för den statiska och kinematiska metoden. I avsnitt 5.4 diskuteras hur valet av antal införda rotationsfjädrar n och storleken på lastinkrementet dq påverkar gränslasten.

5.4 Analys av resultat och utvecklingspotential

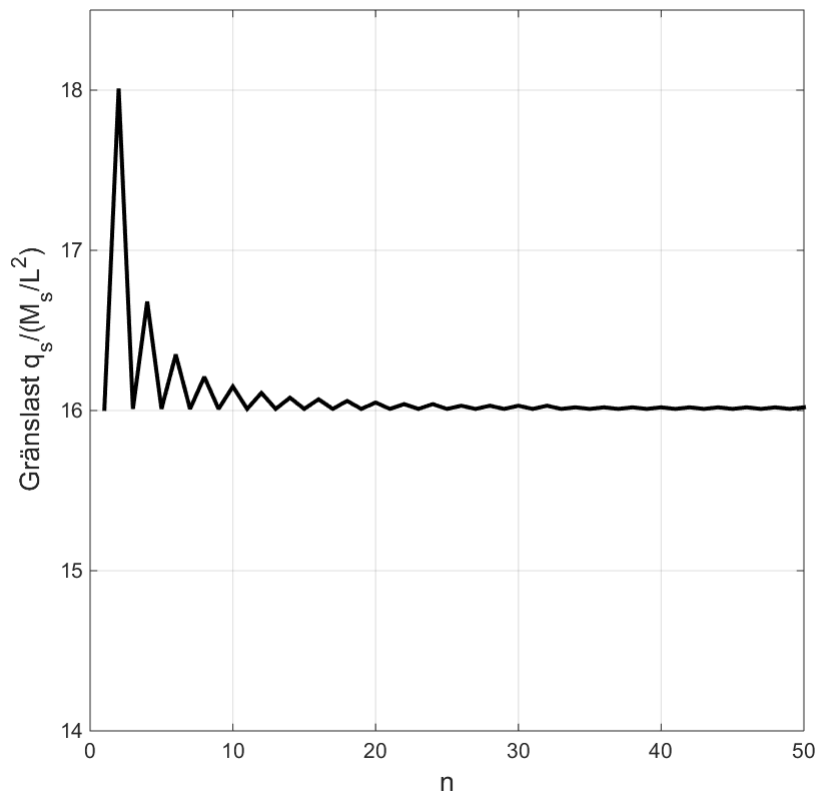
Programmen som utvecklats i avsnitt 5.2 ger ett snabbt sätt att beräkna gränslasten för konstruktioner med utbredda laster. Man kan styra noggrannheten i sitt resultat genom att variera antalet rotationsfjädrar som man för in, n , och lastinkrementens storlek, dq . Dock bör man vara väldigt medveten om vad som faktiskt skapar noggrannhet när man använder programmet, det är nämligen inte självklart att ett högre n ger en mer exakt gränslast. Metoden ger gränslasten på den osäkra sidan,



Figur 5.2: *Rotationsfjädrarnas positioner vid införande av olika antal. a) $n = 1$. b) $n = 2$. c) $n = 3$.*

det vill säga den rätta eller högre. Därför är det lämpligt att undersöka flera värden på n och dq . Gissar man rätt från början kan det räcka med ett litet n . Annars behövs ett större.

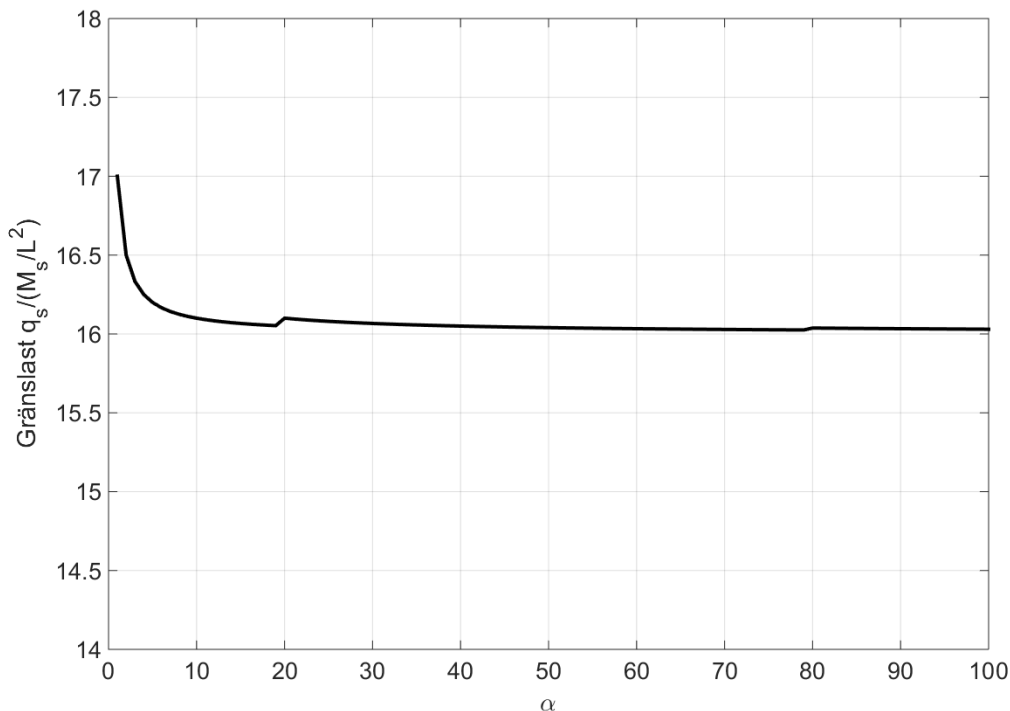
Strategin bygger på att man delar in balken i k delar och placerar ut n stycken rotationsfjädrar i noderna. Om man lyckas placera in en rotationsfjäder i rätt punkt eller inte beror på hur många rotationsfjädrar man för in och hur pass bra gissningen är. Antag till exempel att man har en balk som är fast inspänd i båda ändarna. Flytleden i fält kommer att uppstå i mitten. Antag att vi väljer $n = 1$. Rotationsfjädern placeras då precis i mitten och vi får direkt den exakta gränslasten, se figur 5.2a. Väljer vi istället $n = 2$ kommer rotationsfjädrarna att placeras ut med jämna mellanrum enligt figur 5.2b. Denna placering av rotationsfjädrarna leder till ett för högt värde på gränslasten. Väljer vi $n = 3$ får vi återigen en rotationsfjäder som är placerad i rätt punkt, se figur 5.2c. I figur 5.3 visas hur gränslasten för den här konstruktionen beror på valt värde på n . Vi ser att gränslasten fås exakt om man väljer ett udda tal. När man väljer ett jämnt tal ger ett tal ungefär $n > 15$ också en god approximation av gränslasten.



Figur 5.3: Gränslasten beroende på val av n .

Väljer man ett högt n kan man generellt säga att det är högre sannolikhet att man lyckas placera rotationsfjädrarna rätt. Dock finns det en risk i att placera ut för många också. Säg att vi har väldigt många rotationsfjädrar. Det innebär att två stycken som ligger nära varandra kan börja plasticera vid samma pålastning, speciellt i kombination med för stora lastinkrement. Om det maximala antalet flytleder får vara två avbryts pålastningen för tidigt. Väljer man ett väldigt stort n tar programmet dessutom väldigt mycket längre tid då varje n innebär att matriserna ökar med en rad och att antalet frihetsgrader ökas med fyra. Det är alltså en stor skillnad i tidsåtgång beroende på om man väljer $n = 10$ eller $n = 100$.

Som sagt påverkar även storleken på lastinkrementen dq . I figur 5.4 visas hur gränslasten för konstruktionen som är inspänd i båda ändarna påverkas av olika värden på dq . Vid framtagningen av figuren användes ett värde $n = 30$ och lastinkrementen $dq = 1/\alpha$. Det är väldigt viktigt att lastinkrementen inte är för stora. Det ger en för hög approximation av gränslasten. Väljs väldigt små lastinkrement tar programmet dock mycket längre tid. Det gäller alltså att hitta en lämplig avvägning mellan antalet rotationsfjädrar n och lastinkrementens storlek dq .



Figur 5.4: Gränslasten beroende på val av dq där $dq = 1/\alpha$.

Alternativa sätt att utforma programmet hade varit att man för in rotationsfjädrar efterhand istället för att föra in väldigt många på förhand. Man hade kunnat undersöka momentfördelningen i balken och valt att direkt införa en rotationsfjädrar där

momentet överstiger flytmomentet. Detta hade varit möjligt med Calfemfunktionen *beam2s* som ger momentet i ett valt antal punkter. Väljer man ett högt värde för antalet punkter som man vill veta momentet i kan man förbättra noggrannheten i resultatet. När momentet nått flytmomentet hittar man vilken position på balken detta motsvarar. Fyra frihetsgrader och en rotationsfjäder införs i den punkten. Det innebär att elementet delas i två delar, vars längd beror på flytledens läge, och nya matriser som beskriver den uppdaterade beräkningsmodellen måste tas fram. Fördelar med denna metod hade varit att programmet troligtvis hade arbetat mycket snabbare då man begränsar storleken på matriserna som beskriver beräkningsmodellen. De har sin ursprungliga storlek och växer med en rad per flytled istället för exempelvis hundra rader om $n = 100$. Det är helt klart en potential i den utvecklade strategin som hade varit intressant att utveckla vidare.

Kapitel 6

Slutsats

I det här arbetet har gränslastberäkningar baserade på två olika typer av metoder analyserats, dels gränslastteori och dels en inkrementell formulering. I arbetet har med hjälp av beräkningar baserade på gränslastteori belysts att den statiska metoden ger en gränslast på den säkra sidan och den kinematiska metoden på den osäkra sidan. När det gäller beräkningar med en inkrementell formulering har last/förskjutningsdiagram tagits fram. Dessa visar tydligt på hur en konstruktion förlorar styvhet då det uppstår en ny flytled. Maxvärdet i dessa diagram ger gränslasten.

Gränslasten för olika konstruktioner framtagen med gränslastberäkningar har jämförts med elasticitetsteoretiska beräkningar, där man förutsatt ett sprött brott vid momentet M_s . Skillnaden i bärförmåga har varierat från 12-45%.

För gränslastberäkningar baserade på en inkrementell formulering har Calfem kunnat användas då konstruktionen belastats med punktlaster. Problemet som konstaterades i inledningen är att hitta ett sätt att genomföra dessa beräkningar om konstruktionen utsätts för en utbredd last. I det här arbetet har två program utvecklats. I det första för man in matriser som beskriver en viss konstruktion samt anger på vilket element man har en utbredd last. Det programmet gör är att det inför ett valt antal rotationsfjädrar på det här elementet. Det ger punkter i vilka man kan undersöka moment och modellera flytleder. Programmet returnerar matriser som beskriver det uppdaterade systemet med de införda rotationsfjädrarna. Det andra programmet anropar det första programmet för att föra in fler rotationsfjädrar, varpå det på ett automatiserat sätt beräknar gränslasten. Genom att nyttja dessa program kan man alltså med hjälp av Matlab beräkna gränslasten för konstruktioner belastade med en utbredd last. Det enda man behöver korrigera är matriserna som beskriver den aktuella konstruktionen.

I programmet finns dock en del parametrar som man ska välja, vilket medför att man bör vara medveten om hur de påverkar resultatet så att de väljs rätt. Man

ska ange hur många rotationsfjädrar man vill införa samt hur stora lastinkrement man vill ha. När det gäller antal rotationsfjädrar kan man lyckas välja ett antal som placerar rotationsfjädrar precis där flytlederna kommer att uppstå. Då får man den rätta gränslasten direkt. Generellt gäller dock att ett stort antal rotationsfjädrar och små lastinkrement ger den bästa approximationen av gränslasten. Vidare bör man vara medveten om att programmet beräknar gränslasten på den osäkra sidan.

När man väljer ett stort antal rotationsfjädrar och små lastinkrement tar dock programmet längre tid. Matriserna som beskriver systemet blir snabbt väldigt stora. Det finns en utvecklingspotential i att hitta ett mer effektivt sätt att lösa samma problem. Det skulle man kunna göra genom att till exempel införa rotationsfjädrar efterhand som flytmomentet uppnås i olika punkter.

Litteraturförteckning

- [1] Austrell Per-Erik *et al.*: *CALFEM - A finite element toolbox, version 3.4*. Studentlitteratur, Lund, 2004.
- [2] Avén Sigurd, Lorentsen Mogens och Åkesson Bengt: *Handboken Bygg, Allmänna grunder*. LiberFörlag, Stockholm, 1983.
- [3] Clarke LA och Cope RJ: *Concrete slabs: analysis and design*. CRC Press, 1984.
- [4] Dahlblom Ola och Olsson Karl-Gunnar: *Strukturmekanik - Modellering och analys av ramar och fackverk*. Studentlitteratur AB, Lund, 2010.
- [5] Fortifikationsförvaltningen: *Gränslasthandbok*. Stålbyggnadsinstitutet, 1973.
- [6] Heyden Susanne *et al.*: *Introduktion till strukturmekaniken*. Studentlitteratur, Lund, fjärde utgåva, 2007.
- [7] Hillerborg Arne: *Strip method design handbook*. CRC Press, London, 1996.
- [8] Isaksson Tord, Mårtensson Annika och Thelandersson Sven: *Byggkonstruktion*. Studentlitteratur, Lund, 2:3 utgåva, 2010.
- [9] Nationalencyklopedin: *Gränslastteori*, april 2015.
<http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/lång/gränslastteori>.
- [10] Structural Mechanics, LTH, Lund: *Kompletteringsmaterial för byggnadsmekanik*, 2002. ISSN 0281-8879.
- [11] Svensk Byggtjänst: *Betonghandbok-konstruktion*, 1990.
- [12] Winter George H. och Nilson Arthur: *Design of Concrete Structures*. McGraw Hill Companies, tionde utgåva, 1986.

Bilaga A

Program som inför rotationsfjädrar

```
function [Edof1 ,Edof2 , ep1 , ep2 , ex , ey , j]=  
nonlin (Edof1 ,Edof2 , s , ep1 , ep2 , ex , ey , n)
```

```
f=max(max(Edof1 (:)) ,max(Edof2 (:)));  
abeg=Edof1 ( s , 2 : 4 );  
aend=Edof1 ( s , 5 : 7 );  
epss=ep1 ( s , : );  
xs=ex ( s , : );  
ys=ey ( s , : );
```

```
k=n+1;  
j=f+n*4;
```

```
h=(f+1):j;
```

```
top1=zeros(k,7);
```

```
top1(1,2:4)=abeg;  
top1(k,5:7)=aend;  
  for i=1:n  
    top1(i+1,2:3)=h((4*i-3):(4*i-2));  
    top1(i+1,4)=h(4*i);  
    top1(i,5:7)=h((4*i-3):(4*i-1));  
  end
```

```
top2=zeros(n,3);  
  for i=1:n
```

```

        top2(i,2:3)=h((4*i-1):(4*i));
    end

```

```

    xh=linspace(xs(1),xs(2),k+1);
    xvec=zeros(k,2);
    for i=1:k
        xvec(i,1:2)=[xh(i) xh(i+1)];
    end

```

```

    yh=linspace(ys(1),ys(2),k+1);
    yvec=zeros(k,2);
    for i=1:k
        yvec(i,1:2)=[yh(i) yh(i+1)];
    end

```

```

    eps1=[epss(1)*ones(k,1) epss(2)*ones(k,1) epss(3)*ones(k,1)];
    eps2=4e6/3*epss(1)*epss(3)*ones(k,1);

```

```

    v=size(Edof1,1);
    edo1=[];
    for i=1:v
        if i==s
            edo1=[edo1;top1];
        else
            edo1=[edo1;Edof1(i,:)];
        end
    end

```

```

    end
    v=size(edo1,1);
    edo1(:,1)=(1:v);
    Edof1=edo1;

```

```

    Edof2=[Edof2;top2];
    v=size(Edof2,1);
    Edof2(:,1)=(1:v);

```

```

    v=size(ep1,1);
    epo1=[];
    for i=1:v
        if i==s

```

```

    epo1=[epo1;eps1 ];
    else
        epo1=[epo1;ep1(i,:)];
    end
end
ep1=epo1;

```

```

ep2=[ep2;eps2 ];

```

```

v=size(ex,1);
exo=[];
for i=1:v
    if i==s
        exo=[exo;xvec];
    else
        exo=[exo;ex(i,:)];
    end
end
ex=exo;

```

```

v=size(ey,1);
eyo=[];
for i=1:v
    if i==s
        eyo=[eyo;yvec];
    else
        eyo=[eyo;ey(i,:)];
    end
end
ey=eyo;

end

```


Bilaga B

Program som beräknar gränslasten

```
% 1. FYLL I INDATA NEDAN:
%Balkelement med en utbredd last ges hogst nummer
%OBS numrera rotationsfjadrarna med start pa 1
E=10000; A=100; I=1; L=1; My=1;
Edof1=[1 1 2 4 5 6 7];
Edof2=[1 3 4;2 7 8];
ep1=[E A I];
ep2=4e6*[E*I/3/L;E*I/3/L];
ex=[0 L];
ey=[0 0];
ob=0;

%2. FLER ROTATIONSFJADRAR
%Borja med elementet med hogst elementnummer

%a)FYLL I n och s
n=30;
s=1;

[Edof1 ,Edof2 ,ep1 ,ep2 ,ex ,ey ,j]=
nonlin (Edof1 ,Edof2 ,s ,ep1 ,ep2 ,ex ,ey ,n);

%b) Om fler element med utbredd last , upprepa a)

%3. FYLL I fmax, bc, dq och iter

fmax=4;
bc=[1 0;2 0;3 0;5 0;6 0;8 0];
dq=1/100;
```

```

iter=2000;

%Nu skoter programmet resten
e=[1:ob];
w=size(Edof1,1);
eu=(ob+1):w;
d=size(Edof2,1);

z=0;
a=0;
r=0;
es2=zeros(d,1);
pled=0;

for i=1:iter
z=z+1;

K=zeros(j);
df=zeros(j,1);

    for i=e

        ke=beam2e(ex(i,:),ey(i,:),ep1(i,:));
        K=assem(Edof1(i,:),K,ke);
    end

    for i=eu
        [ke1,fe]=beam2e(ex(i,:),ey(i,:),ep1(i,:),[0 -dq]);
        [K,df]=assem(Edof1(i,:),K,ke1,df,fe);
    end

    for i=1:d

        ke2=spring1e(ep2(i));
        K=assem(Edof2(i,:),K,ke2);
    end

redK=red(K,bc);
    if det(redK)<=1
        disp(['Det_noll_vid_lasten_q=',num2str((i-1)*dq)])
    end
end

```

```

        break
    end

[da, dr]=solveq(K, df, bc);
a=a+da;
r=r+dr;

dEd2=extract(Edof2, da);
des2=zeros(d, 1);
    for i=1:d
        des2(i)=spring1s(ep2(i), dEd2(i, :));
        es2(i)=es2(i)+des2(i);
    end

    nypled=sum(abs(es2)>=My);

        if nypled>pled
            flyt=find([(abs(es2))>=My]);
            ep2(flyt)=0;
            fn=flyt
            pled=nypled;
disp([num2str(pled), ' Flytled_q= ', num2str((z)*dq)])
            end

        if pled>=fmax; break; end;

end

```