23/5-18

Tentamen i Mekanik för V och Bi, VSM010, Problemdelen

En typisk tentamen - problemdelen:

Statik: Uppg 1-3 och Dynamik: Uppg 4-8

1) 2D Jämvikt
2) Ekvivalenta kraftsystem / 3D Jämvikt
3) Tyngdpunkt och ev. Tröghetsmoment / Friktion
4) Kinematik / Acc. Lagen 1D
5) Kinetik vid cirkelrörelse
6) Arbete och energi
7) Impuls och stöt / Svängningar
8) Stelkroppsdynamik

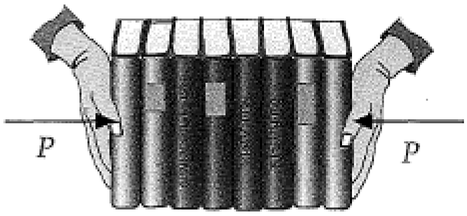
Obs!
Boken och en egenhändigt skriven formelsamling på max 3s är tillåtet hjälpmedel på problemdelen

Här följer exempel på tentamenstal från avsnitten *Statik och Partikeldynamik*

Demotentamen i Mekanik för V och Bi, Problemdelen

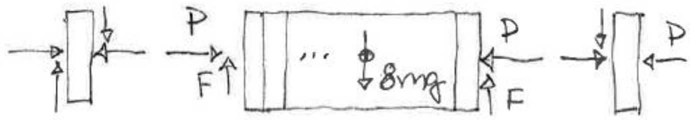
1) 2011-08-26

Man försöker hålla 10 böcker med händerna som figuren visar. Varje bok har massan m = 1 kg. Friktionstalet mellan böckerna är μ_s=0.4 och mellan hand och bok är friktionen tillräcklig för att förhindra glidning. Vilken är den minsta horisontella kraft P som krävs?



Ledning: Begynnande glidning sker samtidigt mellan bok 1 och 2 respektive 9 och 10.

1)



$(\uparrow)\quad 2F - 8mg = 0$

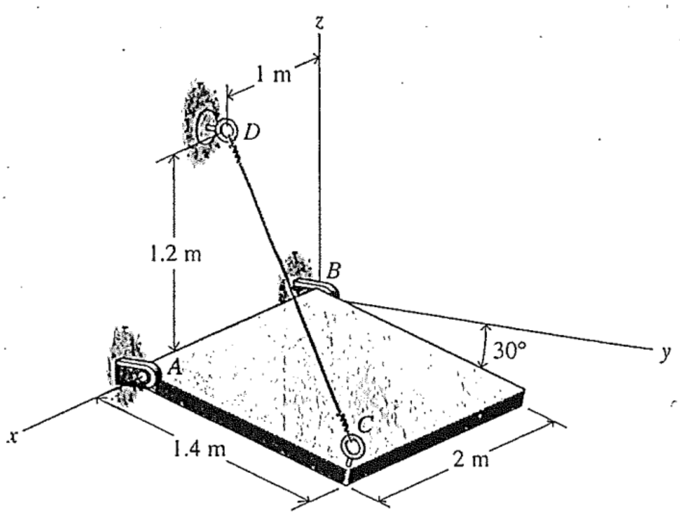
Begynnande glidning : $F = \mu_s P$ $\Rightarrow$

$\mu_s P = 4mg$; $P = 4mg/\mu_s = \underline{\underline{98.1}}$ N

3) 2012-01-12

En platta med massan *m*=75kg lutar 30° i förhållande till ett horisontellt xy-plan enligt figuren. Plattan är ledat infäst i A och B, samt upphängd i en lina vid C. Led A tar inte upp krafter i x-riktningen.

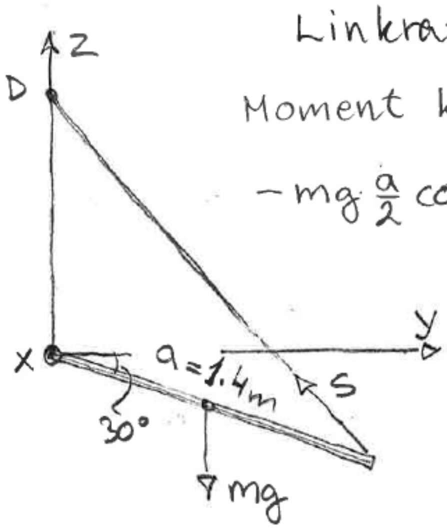
Bestäm kraften i linan CD.



3) Beräkna först kraften i Linan på vektorform:

$$\underset{\sim}{r}_{CD} = (1, 0, 1.2) - (2, 1.4\cos 30°, -1.4\sin 30°) =$$
$$= (-1, -1.212, 1.9)$$

$$\underset{\sim}{n}_{CD} = \underset{\sim}{r}_{CD} \Big/ \sqrt{1^2 + 1.212^2 + 1.9^2} = (-0.406, -0.492, 0.771)$$



Linkraften: $\underset{\sim}{S} = S\,\underset{\sim}{n}_{CD}$

Moment kring x-axeln ↺x :

$$-mg\frac{a}{2}\cos 30° - 0.492S \cdot a\sin 30° +$$
$$+0.771S \cdot a\cos 30° = 0 \;;$$

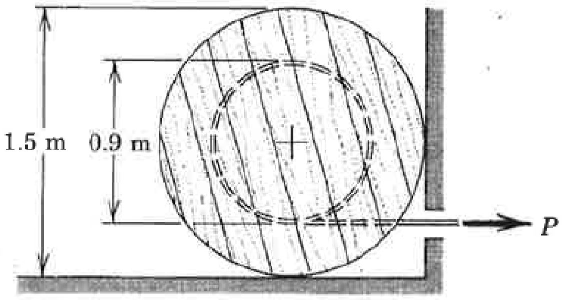
$$-446.0 - 0.344S + 0.935S = 0;$$

$$S = 446.0/0.591 = \underline{755N}$$

15-08-18

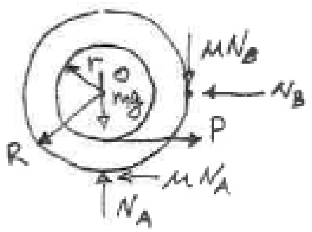
Uppgift 2 (7 p)

En kabeltrumma med massan m=80kg är i kontakt med en horisontell och en vertikal yta enligt figuren. Det kinematiska friktionstalet μ_k =0.25 vid båda kontaktpunkterna. Ytterdiameter $2R$ =1.5m och innerdiameter $2r$ =0.9m. Beräkna storleken på den horisontella kraft P som krävs för att dra ut kabeln med konstant hastighet.



2)

Friläggning:



$(\rightarrow)$ $P - N_B - \mu N_A = 0$

$(\uparrow)$ $N_A - \mu N_B - mg = 0$

$(\curvearrowright O)$ $P \cdot r - \mu N_B \cdot R - \mu N_A \cdot R = 0$

(Jämvikt pga konstant hastighet)

Numeriska värden $\Rightarrow$

$$\begin{cases} P - N_B - 0.25 N_A = 0 \\ N_A - 0.25 N_B = 80 \cdot 9.81 \\ 0.45P - 0.25 \cdot 0.75 \cdot N_B - 0.25 \cdot 0.75 \, N_A = 0 \end{cases}$$

3 ekv : 3 obek. $\Rightarrow$

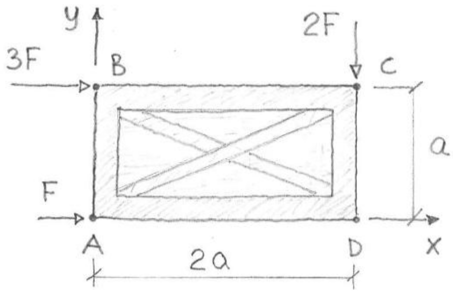
$N_A = 845 N$, $N_B = 241 N$ och $\underline{\underline{P = 453 N}}$

2) 2012-05-22

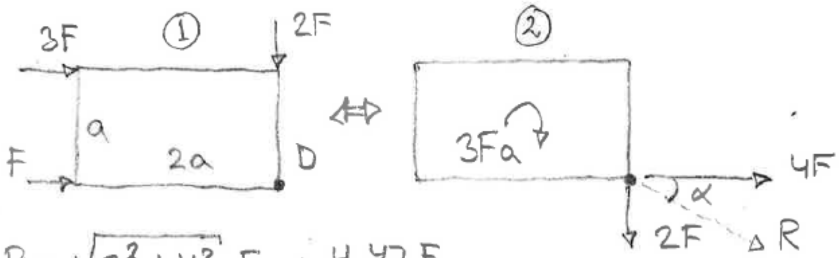
Tre personer knuffar en låda (sedd uppifrån) i vars ett hörn med krafter enligt figuren, där F=50N och a=1m.

Bestäm ett ekvivalent system med en enda kraft i hörnet D och ett kraftpar på lådan. Ange kraften till storlek och riktning.

Antag att man i stället vill dra lådan med en lina fäst i en av sidorna och åstadkomma ekvivalent kraft och momentverkan med enbart linan, var skall man då fästa linan? Motivera svaret.



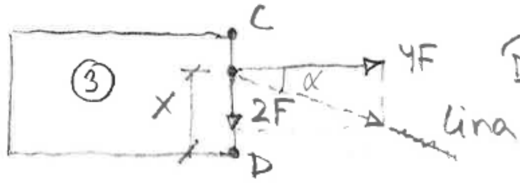
2)



$$R = \sqrt{2^2 + 4^2}\, F = \underline{4.47 F}$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{4} \; ; \quad \alpha = \underline{26.6°}$$

Ersätt med en enda kraft (lina):



$$4F \cdot x = 3Fa \; ;$$

$$x = \underline{\frac{3}{4} a}$$

Linan placeras mellan C och D $\frac{a}{4}$ under C.

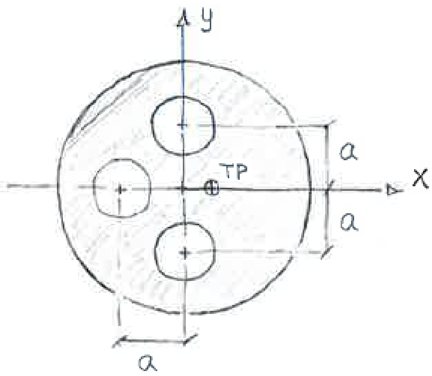
2014-01-15

Uppgift 3 (8 p)

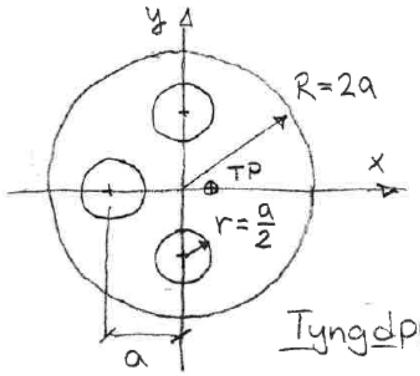
Den cirkulära jämntjocka skivan med radien $R=2a$, har tre cirkulära hål med *diametern* a=0.1m. Uppgiften är att beräkna både tyngdpunktens läge och tröghetsmomentet med avseende på origo. Massan för skivan utan hål m_{hel} =16kg.

Ledning: Tröghetsmomentet för en cirkelskiva (radie R och massa m) med avseende på centrumpunkten är $I=mR^2/2$.

Rätt svar: $x_{TP}=0.0769\ a$=7.69mm och $I_o=1.789\ m_{hel}\, a^2$=0.286kgm^2



3)



Area med hål : A

$$\begin{cases} A_{hel} = \pi(2a)^2 = 4\pi a^2 \\ A_{hål} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi a^2 \end{cases}$$

Tyngdpunkt : $X_{TP} = \sum x_i A_i / A \quad \ldots (*)$

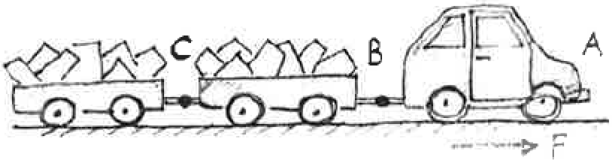
$$A = A_{hel} - 3A_{hål} = \frac{16\pi a^2}{4} - \frac{3}{4}\pi a^2 = \frac{13}{4}\pi a^2$$

$$(*) \Rightarrow \quad X_{TP} = \frac{-a\cdot(-A_{hål})}{A} = \frac{\pi/4}{13\pi/4}a = \frac{a}{13}$$

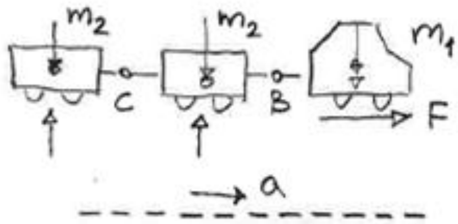
2014-05-27

Uppgift 4 (6 p)

En bagagebil A som har massan m_1=800 kg drar två vagnar som var och en har massan m_2=300 kg. Bilen utvecklar en konstant drivande kraft F = 480 N. Bestäm ekipagets acceleration och dragkrafterna i kopplingarna vid B och C. Hjulen rullar lätt och deras tröghetsmoment är försumbara.



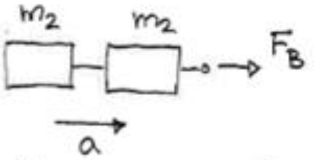
4)



Lättrörliga hjul ⇒ inget motstånd horisontellt

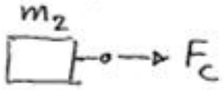
Acc. lagen : $(\rightarrow)$ $F = (m_1 + 2m_2)\,a$;

$a = 480/(800+600) = \underline{0.343 \text{ m/s}^2}$



$(\rightarrow)$ $F_B = 2m_2\,a = 600 \cdot 0.343 =$

$= \underline{206\text{ N}}$

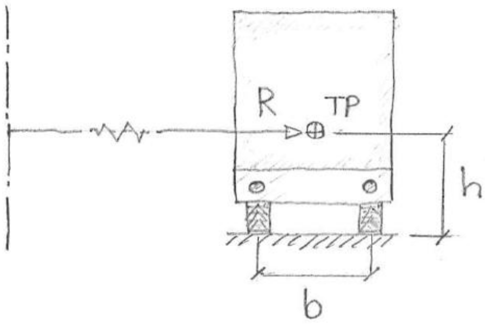


$(\rightarrow)$ $F_c = m_2\,a = 300 \cdot 0.343 =$

$= \underline{103\text{ N}}$

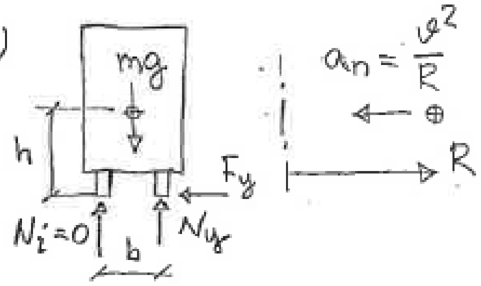
6) 2012-05-22

En lastbil kör i en plan kurva med krökningsradien R=100m. Bilen har tyngdpunkten symmetriskt placerad och på höjden h=1.5m enligt figuren. Bilen har bredden b=2m mellan varje hjulpar och den totala massan inklusive last m=5ton. Antag först att friktionen är tillräcklig.



Vid vilken hastighet lyfter de inre hjulen från underlaget? Ledning: Betrakta det som ett fall av (approximativ) translationsrörelse. D.v.s $\sum M_{TP}=0$ kan användas. Beräkna sedan vilken friktionskoefficient μ som minst krävs för att bilen inte skall sladda innan hjulen lyfter.

6)



$a_n = \frac{v^2}{R}$

$(\uparrow)\quad N_y - mg = 0 \; ; \; N_y = mg$

$(\leftarrow)\quad F_y = m\frac{v^2}{R}$

$\curvearrowleft TP\quad N_y\frac{b}{2} - F_y h = 0 \; ; \; \Rightarrow$

$mg\frac{b}{2} - m\frac{v^2}{R}h = 0 \; ; \quad v = \sqrt{\frac{bR}{2h}g} = \underline{25.6\ m/s} = 92 km/h$

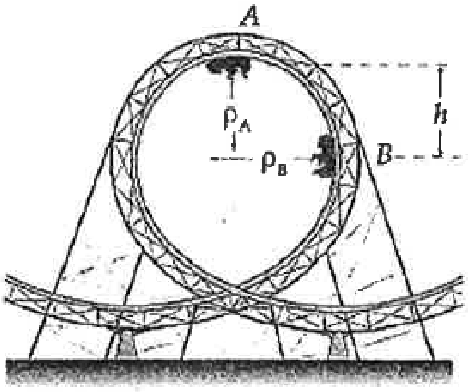
Minsta friktion: $F_y = \mu N_y \; ; \; \mu = \frac{m v^2/R}{mg} \; ;$

$\mu = \frac{v^2}{Rg} = \underline{0.67}$

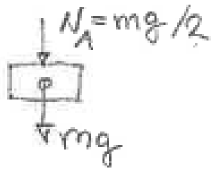
2011-08-26

Uppgift 6 (6 p)

I berg- och dalbanans översta punkt A är normalkraften från banan på vagnen $mg/2$, där mg är vagnens tyngd och m=700kg. Banans krökningsradie är där ρ_A =10m. Hur stor är då normalkraften på vagnen i läget B på nivån h=12m under A, om hastigheten där är vertikal och krökningsradien är ρ_B =15m. Friktionen försummas.



6) Betrakta först läge A :



NII : (↓) $\frac{3}{2}\cancel{m}g = \cancel{m}a_n$

kinematik $a_n = v_A^2/\rho_A \Rightarrow v_A^2 = \frac{3}{2} g \rho_A \quad \ldots (*)$

Energi för lägena A och B :

$E_A = mgh_A + \frac{1}{2}mv_A^2$, $E_B = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2$

$h_A = h = 12\text{m}$ och $h_B = 0$ (0-nivå)

Energibalans (inga förluster) :

$E_A = E_B \Rightarrow \cancel{m}gh + \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2$;

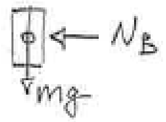
$2gh + v_A^2 = v_B^2$

Använd $(*) \Rightarrow v_B^2 = 2gh + \frac{3}{2} g \rho_A \quad \ldots (**)$

6) forts.

Normalkraften:

Betrakta läge B:



NII $(\leftarrow)$: $N_B = m \dfrac{v_B^2}{\rho_B}$

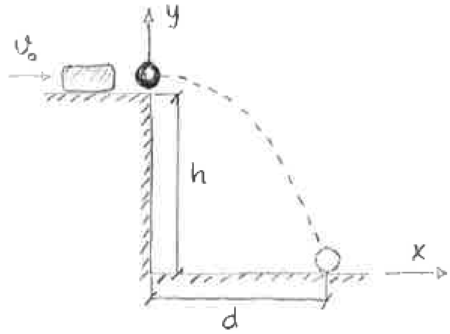
Sätt in $(**)$ $\Rightarrow$ $N_B = \dfrac{mg}{\rho_B}\left(2h + \dfrac{3}{2}\rho_A\right)$

$$N_B = \frac{700 \cdot 9.81}{15} \cdot \left(2 \cdot 12 + 1.5 \cdot 10\right) = \underline{\underline{17.9 \text{ kN}}}$$

2013-05-28

Uppgift 7 (7 p)

En kula som har massan m=0.15kg vilar på kanten enligt figuren då den träffas av ett block med massan $M=2m$ som har den horisontella hastigheten v_0=3m/s. Stöten antas vara helt elastisk d.v.s. stöttalet e=1. Det vertikala avståndet h=10m över nivån där kulan landar. Bestäm horisontella avståndet d som kulan når där den slår ner. Avgör också om blocket trillar över kanten. Luftmotstånd och friktion försummas.



7) <u>Stötförloppet</u>:

$\xrightarrow{v_0} \boxed{2m} \quad \bigcirc\ m \quad , \quad \square \xrightarrow{v_1''} \quad \bigcirc \xrightarrow{v_2''}$

$$(\rightarrow) \quad 2\cancel{m} v_0 = 2\cancel{m} v_1'' + \cancel{m} v_2''$$

$$e = \frac{v_2'' - v_1''}{v_0} = 1 \ ; \quad v_2'' - v_1'' = v_0$$

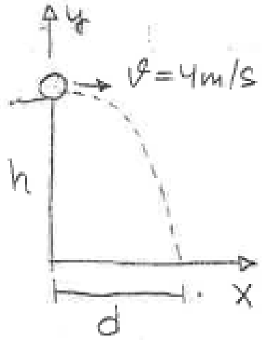
$$\begin{cases} 2v_1'' + v_2'' = 2v_0 & \ldots (1) \\ -v_1'' + v_2'' = v_0 & \ldots (2) \end{cases} \qquad 2\times(2) + (1) \Rightarrow$$

$$3v_2'' = 4v_0 \ ; \quad v_2'' = \frac{4}{3} v_0 = \underline{\underline{4\,m/s}}$$

$$(2) \Rightarrow \quad v_1'' = v_2'' - v_0 = \frac{1}{3} v_0 > 0,$$ blocket trillar över kanten

7 forts.

<u>Kastparabel</u>:



x-led: $v_x = v$; $x = v \cdot t$;

$x = d \Rightarrow t = \frac{d}{v}$

y-led: $v_y = -gt$

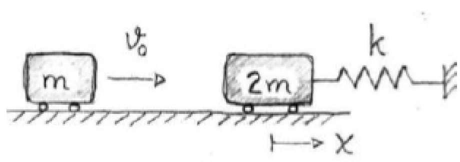
$y = h - g\frac{t^2}{2}$

$y = 0$ då $t = \frac{d}{v} \Rightarrow h - \frac{g}{2}\frac{d^2}{v^2} = 0$;

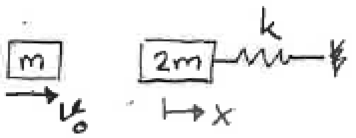
$d = \sqrt{\frac{2hv^2}{g}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 16}{9.81}} = \underline{5.71\,m}$

2017-06-02 Uppgift 7 (7p)

Den större massan som är i vila och kopplad till en fjäder, träffas av en mindre massa som har hastigheten v_0=1.2m/s strax innan stöten. Visa att hastigheten för den stora massan strax efter stöten är 0.72m/s om stöttalet e=0.8. Bestäm sedan periodtid T och amplitud A för den efterföljande svängning som den större massan genomför. (Stöttalet är tillräckligt stort för att det inte skall bli en andra stöt.) Sätt k=500N/m och m=1kg.



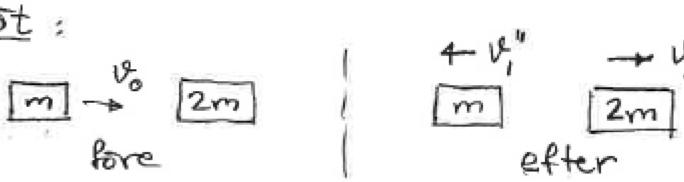
Stötförloppet:



$e = 0.8 \quad k = 500\,N/m$

$m = 1\,kg$ och $v_0 = 1.2\,m/s$

<u>stöt</u>:



Rörelsemängden bevaras:

$(\rightarrow) \quad \cancel{m} v_0 = 2\cancel{m} v_2'' - \cancel{m} v_1'' \quad \ldots (1)$

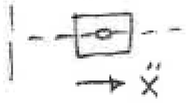
Stöttal: $\dfrac{v_2'' + v_1''}{v_0} = e \quad \ldots (2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} -v_1'' + 2v_2'' = v_0 \\ v_1'' + v_2'' = e\, v_0 \end{array} \right\} \text{ addera} \Rightarrow 3v_2'' = (1+e)v_0 \,;$$

$$v_2'' = \frac{1+e}{3} v_0 = \frac{1.8}{3} \cdot 1.2 = \underline{\underline{0.72}}\ m/s$$

Svängning:

$\boxed{2m} \leftarrow kx$

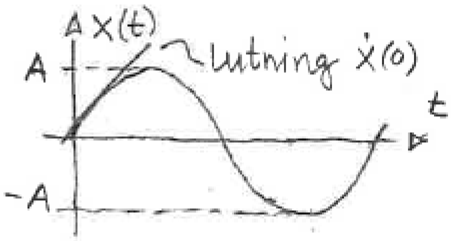


NII: $\quad -kx = 2m\ddot{x}\ ; \quad \ddot{x} + \frac{k}{2m}x = 0$

$\omega_n = \frac{2\pi}{T}$ och $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{2m}} \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\cdot 1}{500}} = \underline{0{,}40\ s}$

Amplitud: Ansats $x = A\sin\omega_n t \quad (x(0)=0)$



$\dot{x} = A\omega_n\cos\omega_n t$

$\dot{x}(0) = \frac{1+e}{3}v_0$

Men $\dot{x}(0) = A\omega_n\ ; \quad \dot{x}(0) = A\frac{2\pi}{T} \Rightarrow$

$\frac{1+e}{3}v_0 = A\frac{2\pi}{T}\ ; \quad A = \frac{1+e}{6\pi}v_0 T\ ;$

$A = \frac{1.8}{6\cdot\pi}\cdot 1.2\cdot 0.4 = \underline{0{,}046\ m}$