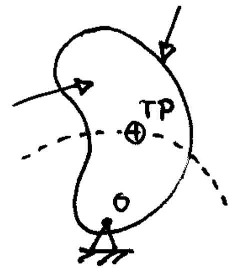
Föreläsningspass 19

- Tröghetsmoment
- Kinetik vid rotation kring fix axel
- Energisamband fix axel rotation

Avsnitt i kursboken: AI, 9.1

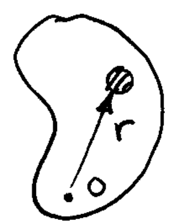
KRAFT- OCH MOMENT-EKVATIONEN VID ROTATION KRING FIX AXEL



$$\begin{cases} \Sigma F_s = m\bar{a}_s \\ \Sigma F_n = m\bar{a}_n \\ \Sigma M_O = I_O\,\alpha \qquad (\alpha = \dot{\omega}) \end{cases}$$

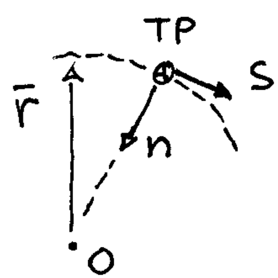
$\bar{a}_n$ och $\bar{a}_s$ är TP's acceleration.

Masströghetsmomentet I_O map. axel genom O ges av:



$$I_O = \int r^2\,dm$$

TPs acceleration ges av samband för cirkelrörelse kring O:

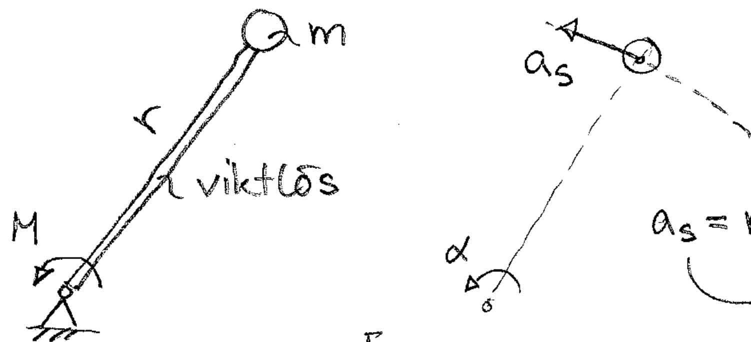


$$\begin{cases} \bar{a}_s = \bar{r}\,\alpha \\ \bar{a}_n = \bar{r}\,\omega^2 \end{cases}$$

$\bar{r}$ är avståndet från O till TP.

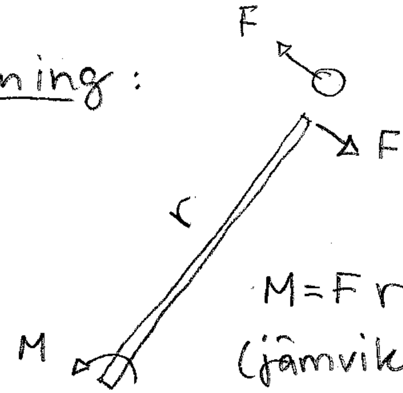
MOMENT-EKVATIONEN OCH TRÖGHETS-MOMENT :

Betrakta först en punktmassa stelt förbunden med rotationsaxeln:



$a_s = r\alpha$

Friläggning :



NII : $F = m a_s$

$M = F r$
(jämvikt)

; $F = \dfrac{M}{r}$

$$\Rightarrow \quad \frac{M}{r} = m r \alpha \quad ; \quad \boxed{M = \underbrace{mr^2}_{I}\alpha}$$

Stel kropp; summera över samtliga mass-element:

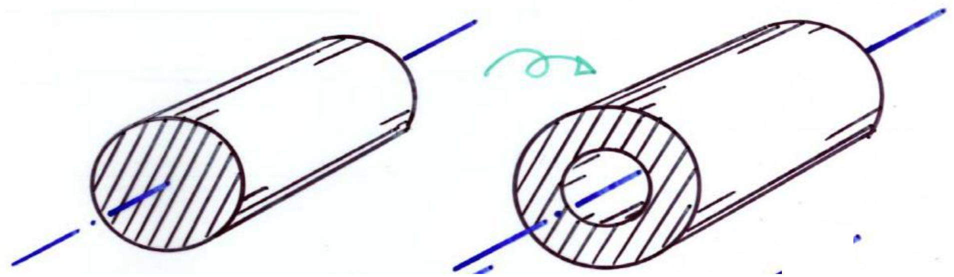
Fördelad massa :

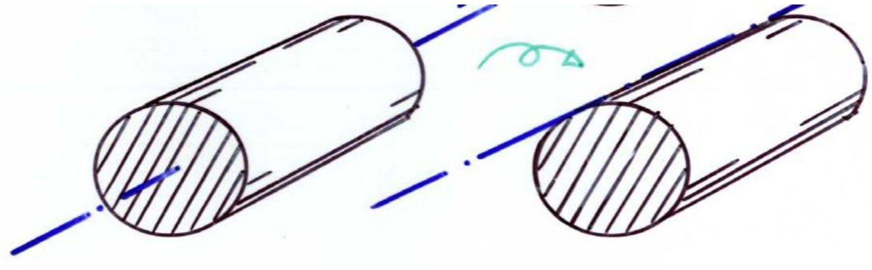
$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

TRÖGHETSMOMENT - EGENSKAPER

$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

Samma massa - olika I

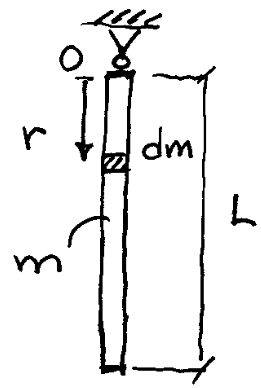




(Förflyttningssatsen)

Ex. Bestämning av tröghetsmoment:

Ex 1

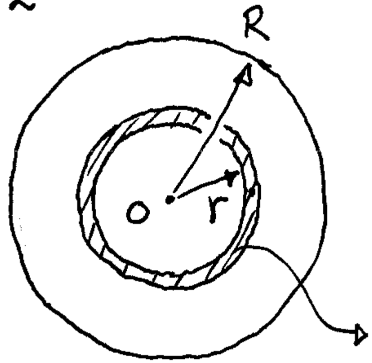


Bestäm tröghetsmomentet map. O för stången.

(massa/längdenhet m/L)

$dm = \frac{m}{L}\, dr$

Ex. 2



Bestäm tröghetsmomentet map O för cirkelskivan.

Densitet ρ, Tjocklek t

$dm = \underbrace{2\pi r\, dr}_{dA} \cdot t \cdot \rho$

TRÖGHETSMOMENT – EGENSKAPER forts.

* Definition

$$I = \int r^2 \, dm$$

* Byte av referensaxel

$$I_A = \bar{I} + md^2$$

Förflyttningssatsen = Steiners sats

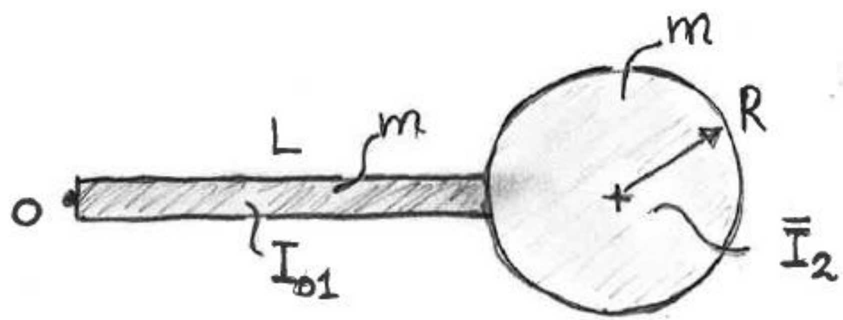
* Sammansatta kroppar

$$I_{tot} = I_1 + I_2 + \ldots$$

Beräkning för sammansatta kroppar utnyttjar också Steiners sats

Ex. Tröghetsmoment forts:

Använd Steiners sats för att bestämma den sammansatta kroppens tröghetsmoment m.a.p. *O*.



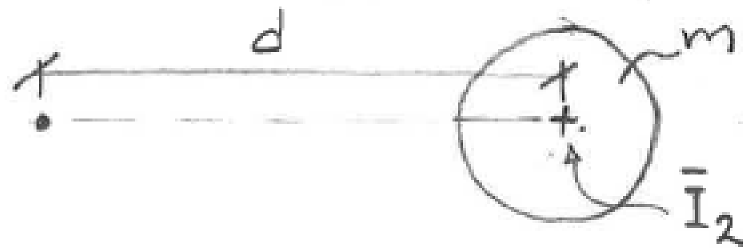
Enligt tidigare: $\begin{cases} I_{01} = \dfrac{mL^2}{3} \\ \bar{I}_2 = \dfrac{mR^2}{2} \end{cases}$ OBS! TP

Antag att stång och skiva har samma massa och att *L=2R*.

Lösning:

$I_0 = I_{01} + I_{02}$ men vi har $\bar{I}_2$ $\Rightarrow$

Steiners sats:



$I_{02} = \bar{I}_2 + md^2$ med $d = 3R$ $\Rightarrow$

$$I_{02} = \frac{mR^2}{2} + m \cdot (3R)^2 = \frac{19}{2} mR^2$$

Alltså:

$$I_0 = \underbrace{\frac{m(2R)^2}{3}}_{I_{01}} + \underbrace{\frac{19}{2} mR^2}_{I_{02}} = \underline{\underline{\frac{65}{6} mR^2}}$$

#

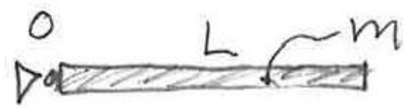
TRÖGHETSMOMENT – EGENSKAPER forts. 2

* Tröghetsradie

$$I = \int k^2 dm = k^2 m \qquad (k = \text{konstant})$$

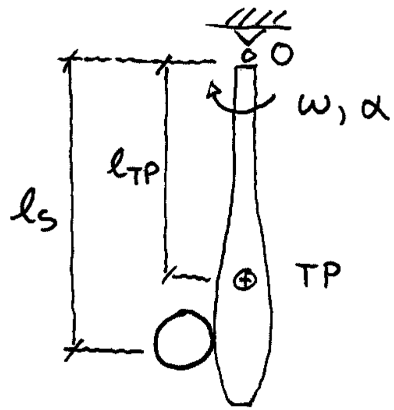
Tröghetsradien *k* är en räknestorhet som separerar massan och dess fördelning.

Ex. stången



$$I_0 = \frac{mL^2}{3} \Rightarrow \cancel{m} k_0^2 = \frac{\cancel{m} L^2}{3} \; ; \; \underline{\underline{k_0 = \frac{L}{\sqrt{3}}}} \quad \#$$

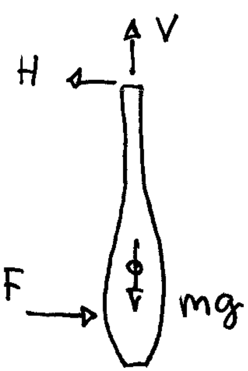
Ex. Bestämning av 'stötcentrum'



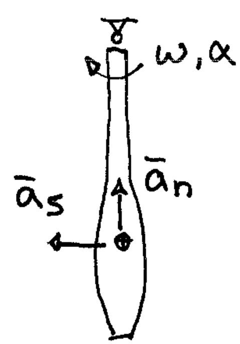
Visa att det finns en punkt på avståndet l_s där reaktionskrafterna i leden försvinner och att $l_s = \dfrac{I_0}{m\, l_{TP}}$

Visa speciellt för jämntjock stång att $l_s = 2/3\ L$.

Friläggning

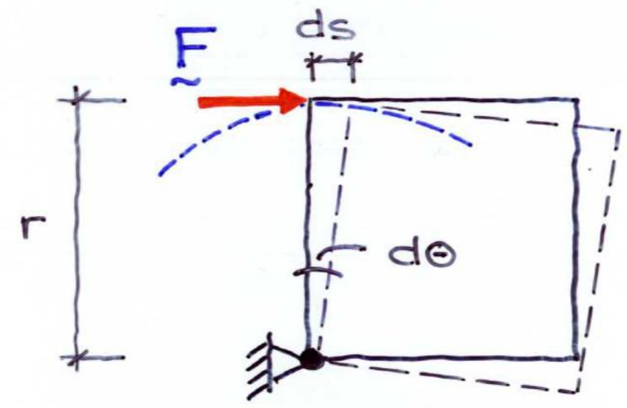


Kinematik



$$\begin{cases} \bar{a}_n = l_{TP}\,\omega^2 \\ \bar{a}_s = l_{TP}\,\alpha \end{cases}$$

ARBETE – STEL KROPP



$$\boxed{W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}$$

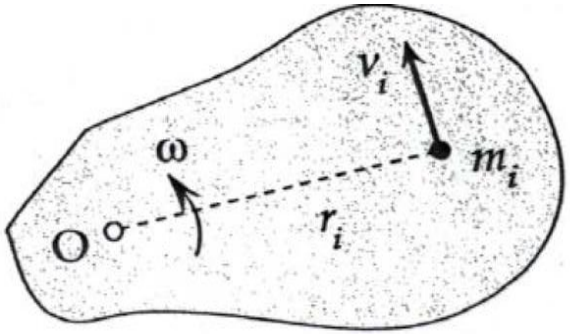
eller

$$\boxed{W = \int M \cdot d\Theta}$$

där $M = F_s \cdot r$ och $ds = r\, d\Theta$

Nytt är här att moment uträttar arbete ....

RÖRELSEENERGI
- STEL KROPP -
FIX AXEL



Figur 9.1.4

(Boken s. 407)

Kinetisk energi

För att teckna den kinetiska energin för en kropp, som roterar kring en fix axel O, tänker vi oss kroppen som ett partikelsystem enligt figur 9.1.4. Partikeln med massan m_i har hastigheten $v_i = r_i\omega$. Kinetiska energin för kroppen är då:

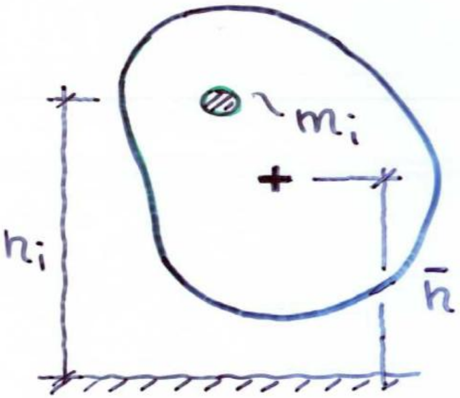
$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2$$

$v = r\omega$

Den sista summan är lika med kroppens tröghetsmoment m a p axeln O, varför

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_O \omega^2} \qquad (9.1.7)$$

POTENTIELL ENERGI



Lägesenergi:

$$V_{gi} = m_i g h_i$$

$$V_g = \sum m_i g h_i = g \underbrace{\sum m_i h_i}_{m\bar{h}}$$

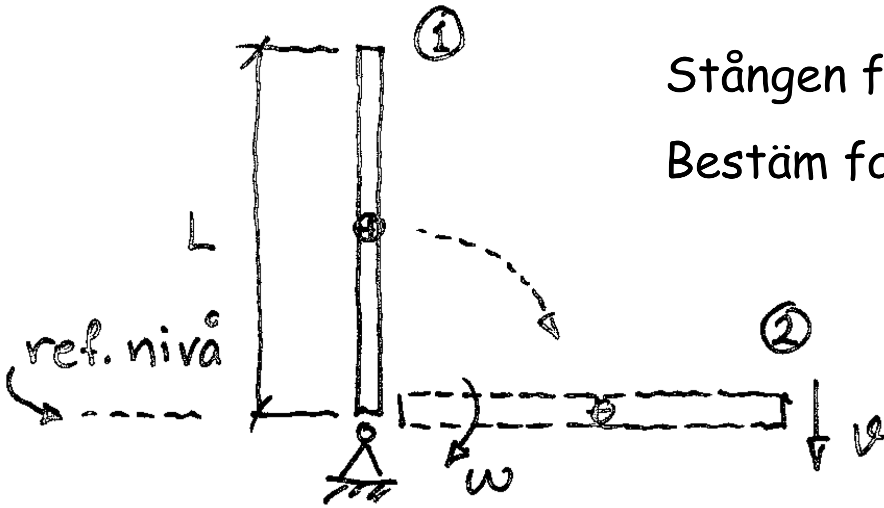
$$\boxed{V_g = m g \bar{h}}$$

Fjäderenergi:

$$\boxed{V_e = \frac{1}{2} k x^2}$$

Dvs. samma som tidigare ...

Ex. Energisamband



Stången faller fritt från läge 1.

Bestäm farten i toppen för läge 2

Lösning:

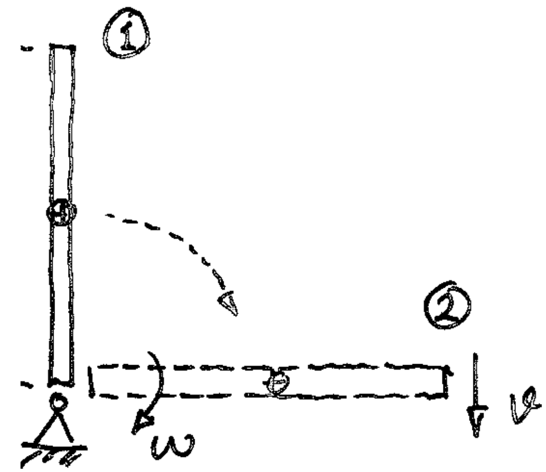
Energilag $\Delta(T+V_g)=0$; $T+V_g=$ konst.

Läge ① : $T_1=0$

$V_{g1}=mg\frac{L}{2}$

Läge ② : $T_2=\frac{1}{2}I_o\omega^2$ (Obs! T)

$V_{g2}=0$



$T_1+V_{g1}=T_2+V_{g2}$; $mg\frac{L}{2}=\frac{1}{2}I_o\omega^2$

$I_o=\frac{1}{3}mL^2 \Rightarrow \cancel{m}g\frac{L}{\cancel{2}}=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{3}\cancel{m}L^2\omega^2$;

$\omega^2=\frac{3g}{L}$; $\omega=\sqrt{\frac{3g}{L}}$

Hastighet i toppen : $v=\omega L=\sqrt{3gL}$