

Föreläsningsspass 21

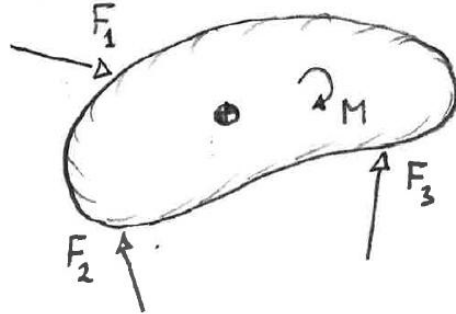
- * Kinetik vid generell plan rörelse
- * Energisamband

Avsnitt i kursboken: 9.2

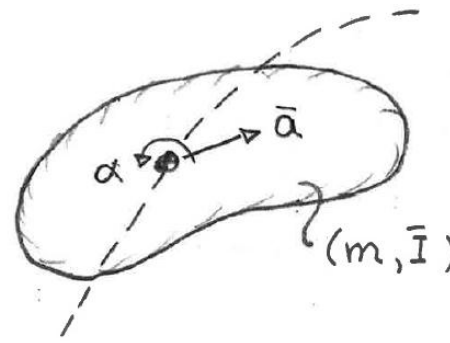
KINETIK VID GENERELL PLAN RÖRELSE

Stel kropp påverkad av krafter och moment:

Friläggning



Kinematik



Kraft- och moment-
ekvationerna:

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = m \vec{a} \\ \sum \vec{M} = \bar{I} \alpha \end{cases}$$

\vec{a} : TP:s acceleration

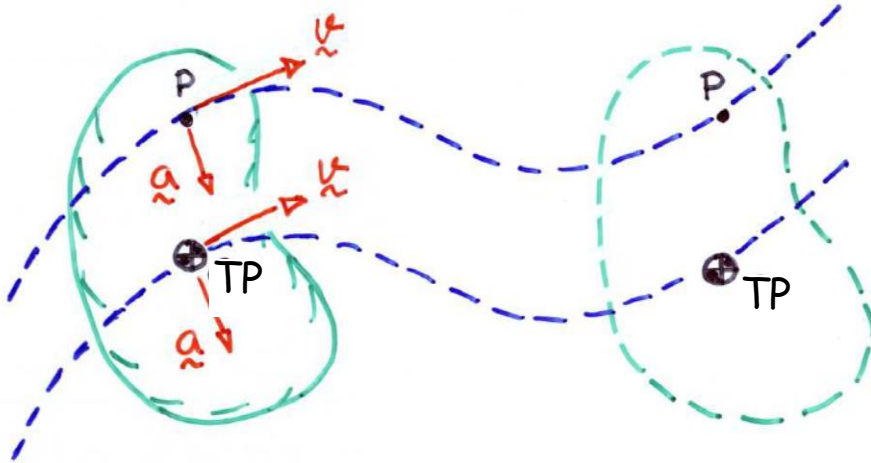
α : vinkelacceleration

Obs! Momentpunkten är inte godtycklig, använd TP här.

KINETIK - TRANSLATION

Translation betraktas som ett specialfall av generell plan rörelse med

$$\underline{\omega} = \underline{\alpha} = \underline{0}$$



Alla punkter har samma hastighet och acceleration.

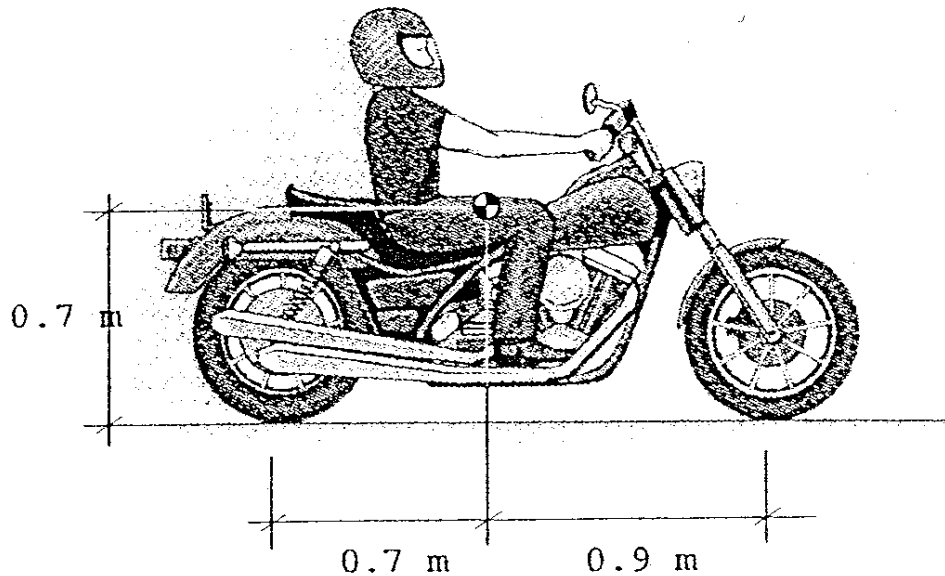
Kraft och momentekvationerna:

$$\sum \underline{F} = m \underline{\bar{a}}$$

$$\sum \underline{M} = 0$$

Anm. Momentekvationen måste tecknas map TP!

Ex. Accelererande motorcykel



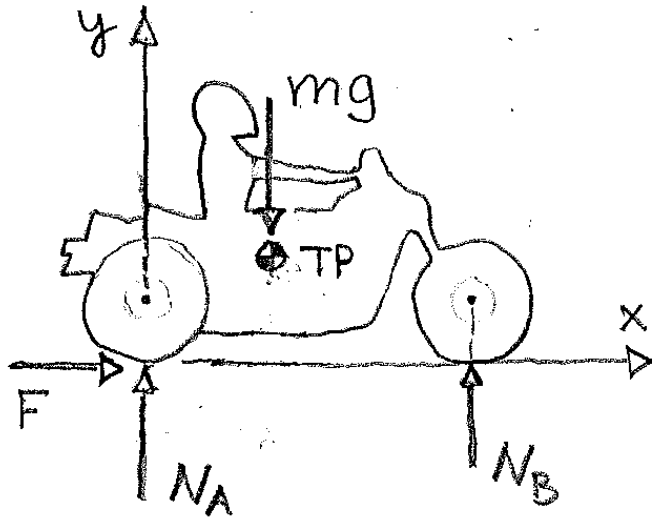
Motorcykel och förare har sammanlagda massan 200kg.

Beräkna den acceleration som krävs för att framhjulet precis skall lyfta.

Friktionen antas vara tillräcklig.

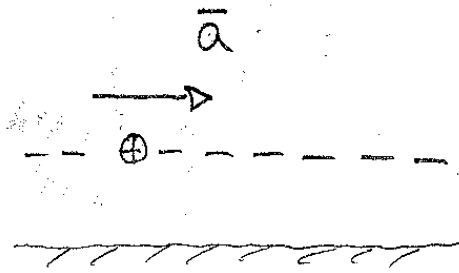
Ex. Motorcykel forts.

Friläggning:

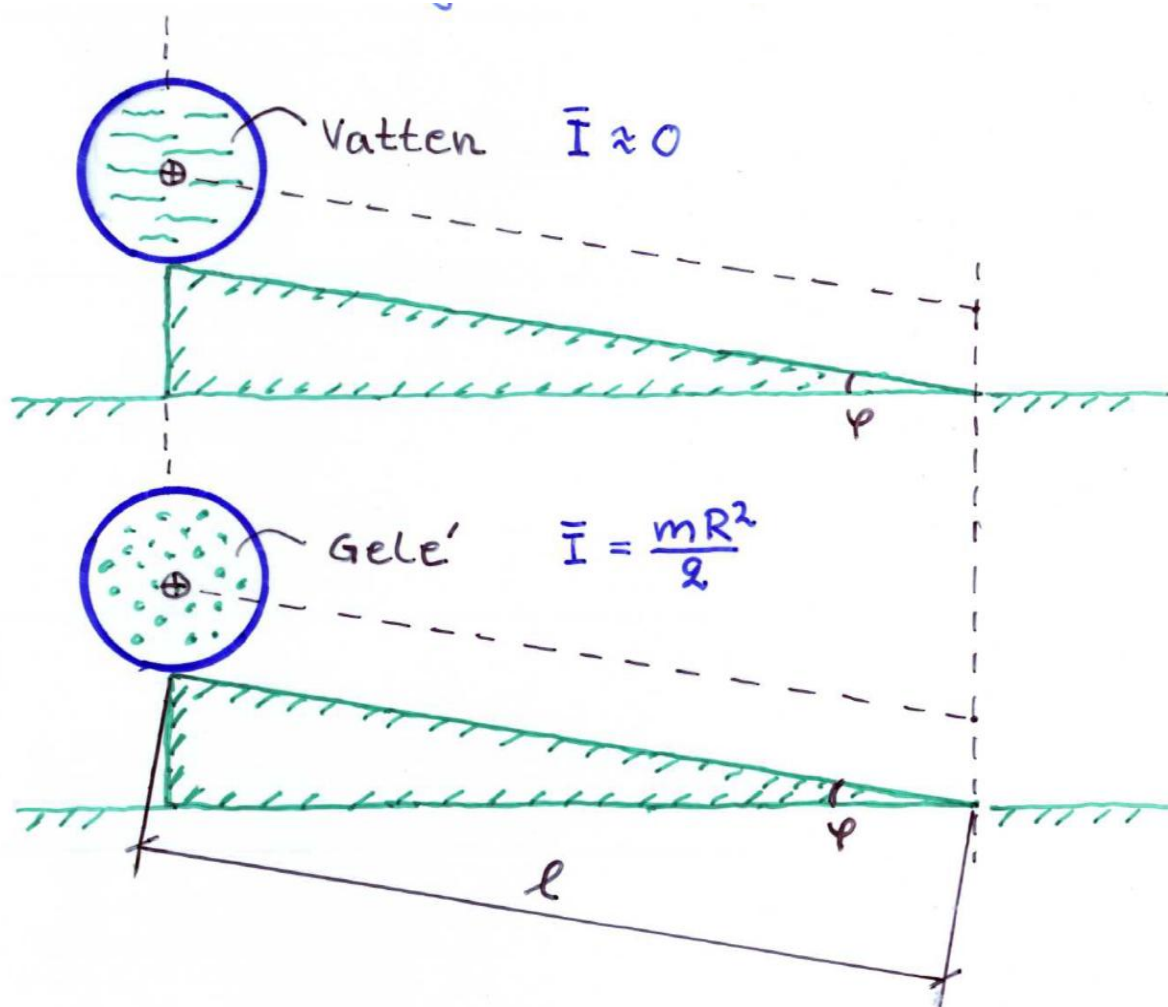


$$\bar{x} = \bar{y} = 0.7 \text{ m}$$

kinematik:



Ex. Rullande cylindrar

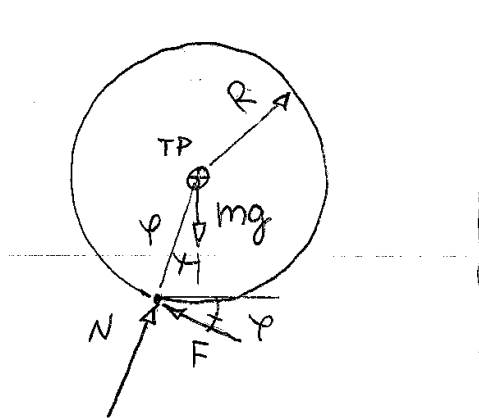


Beräkna hur lång tid det tar för cylindrarna att rulla sträckan l längs det lutande planet i de båda fallen.

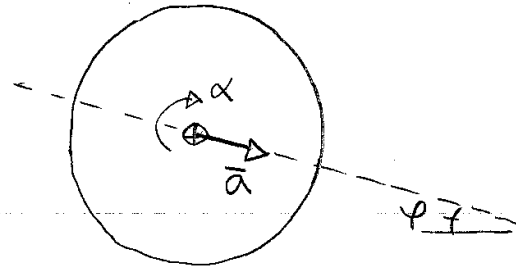
Cylindrarna har radie R

Lösning: Rullande cylindrar m. rörelsekv.

◦ Friläggning:



◦ Kinematik:



◦ Kraft och momentekvationen:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\rightarrow) \quad mg \sin \varphi - F = m \bar{a} \\ (\uparrow) \quad N - mg \cos \varphi = 0 \\ \overset{\curvearrowright}{TP} \quad F \cdot R = \bar{I} \alpha \end{array} \right. \quad (\text{3 ekv.} \hat{=} \text{4 obek.})$$

$$(\rightarrow) \Rightarrow F = mg \sin \varphi - m \bar{a}, \text{ insatt i } \overset{\curvearrowright}{TP} \Rightarrow$$

$$(mg \sin \varphi - m \bar{a}) R = \bar{I} \alpha \quad \dots (*)$$

Lösning forts.

o Kinematik (samband $\bar{a} \rightarrow \alpha$)

$$\text{Rullning} \Rightarrow \underline{\bar{a} = R\alpha}, \quad \alpha = \frac{\bar{a}}{R}$$

$$\text{insatt i (*)} \Rightarrow mg \sin\varphi - m\bar{a} = \left(\frac{\bar{I}}{R} \cdot \frac{\bar{a}}{R}\right);$$

$$g \sin\varphi = \left(1 + \frac{\bar{I}}{mR^2}\right) \bar{a}; \quad \bar{a} = \frac{g \sin\varphi}{1 + \bar{I}/mR^2} \dots (**)$$

Konstant acceleration från stillastående \Rightarrow

$$l = \frac{\bar{a}t^2}{2}; \quad t = \sqrt{\frac{2l}{\bar{a}}}$$

$$\text{Dvs (**)} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l(1 + \bar{I}/mR^2)}{g \sin\varphi}}$$

Cylindrarna har samma massa men ...

- 1) Cylinder m. vatten $\bar{I} \approx 0$ (tid t_v)
- 2) Cylinder m. gele' $\bar{I} = \frac{mR^2}{2}$ (tid t_g)

$$\Rightarrow t_v = \sqrt{\frac{2l}{g \sin\varphi}} < t_g = \sqrt{\frac{3l}{g \sin\varphi}}$$

$$\frac{t_v}{t_g} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.82$$

BERÄKNINGSGÅNG - KINETIK PLAN RÖRELSE

- * Avgränsa systemet och för in yttre krafter (figur)
- * Bestäm tyngdpunktens läge
- * Skissera tyngdpunktens rörelsebanor och ange tyngdpunktens acceleration (figur)
- * Välj positiva riktningar
- * Ställ upp rörelseekvationer
 - $(\rightarrow) \sum F_x = m\bar{a}_x$
 - $(\uparrow) \sum F_y = m\bar{a}_y$
 - $(\curvearrowright) \sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$
- * utnyttja eventuellt ytterligare kinematiska samband

ENERGISAMBAND - KINETISK ENERGI

Rörelseenergin vid generell plan stelkroppsrörelse består av två delar; en del från tyngdpunktens translation och en del från rotation kring TP

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

.... kan härledas genom att betrakta den stela kroppen som ett partikelsystem

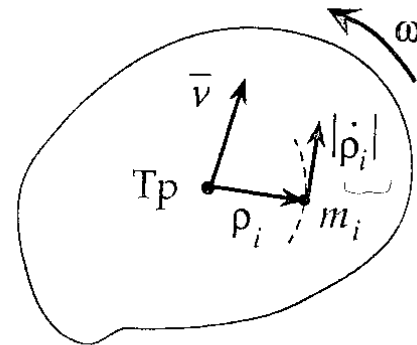
Hastigheten delas upp i translation och rotation =>

(Boken s. 422)

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\rho}_i|^2$$

Hastigheten för cirkelrörelse införes =>

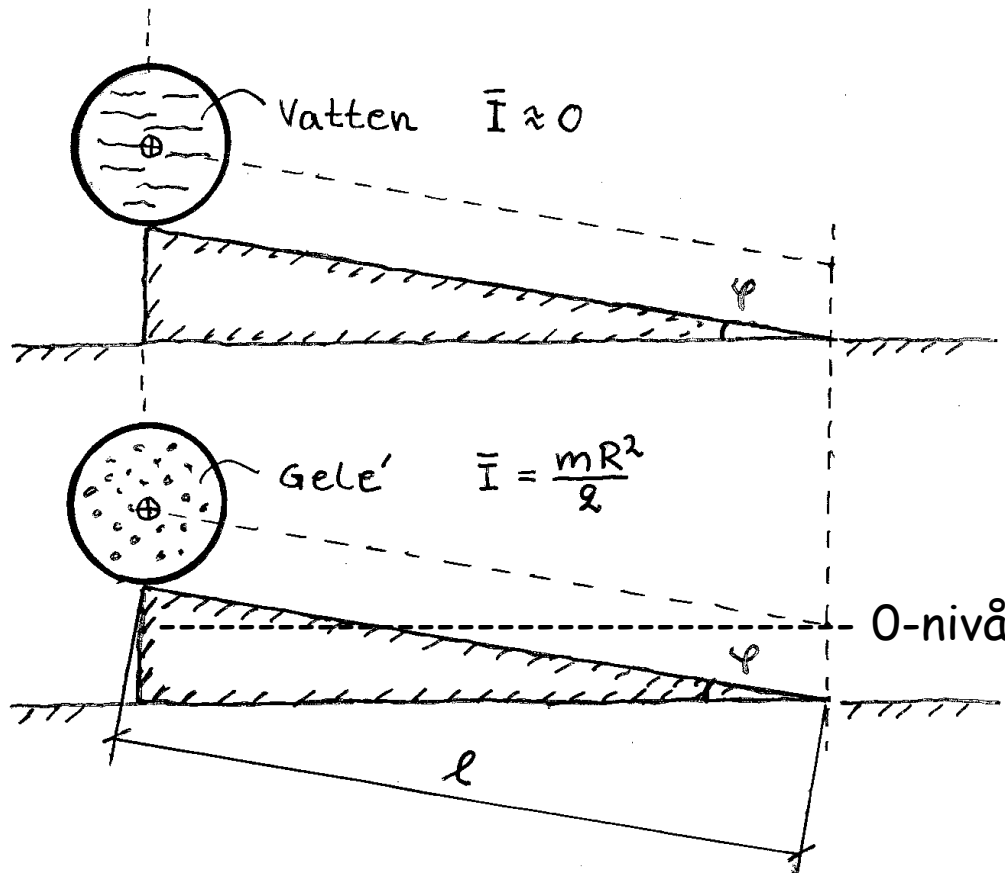
$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega^2$$



Figur 9.2.5

.... vilket ger det inrutade sambandet för T

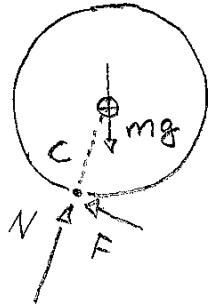
Ex. Rullande cylindrar - lösning med energisamband



Beräkna (igen) tiden för respektive cylinder.

Nu med energisamband.

Lösning. Rullande cylindrar - energisamband



$W_N = 0$
 $W_F = 0$ } Hastigheten är noll
i kontaktpunkten
(momentan centrum)
(även $\vec{F} \cdot \vec{v}_c = 0$, ingen effekt)

Dock $W_{mg} \neq 0$

Läge ① : $T_1 = 0$
 $V_{g1} = mg\bar{h}$, $\bar{h} = l \sin \varphi$

Läge ② : $T_2 = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$
 $V_{g2} = 0$

* Energisatsen :

$$W^{(ik)} = \Delta E$$

$$W^{(ik)} = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 ;$$

$$mg l \sin \varphi = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 \dots (*)$$

Lösn. forts. energi ...

* Kinematik

$$\text{Rollning: } \omega = \frac{\bar{v}}{R} \quad \text{insatt i (*)} \Rightarrow$$

$$2mgl \sin \varphi = m \bar{v}^2 + \frac{I}{m} \left(\frac{\bar{v}}{R} \right)^2 ;$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2gl \sin \varphi}{1 + I/mR^2}}$$

Konstant acceleration \Rightarrow

$$l = \frac{\bar{a} t^2}{2}, \quad \bar{a} = \frac{\bar{v}}{t} \quad \text{dvs} \quad l = \frac{\bar{v} t}{2}$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2l(1 + I/mR^2)}{g \sin \varphi}}$$

dvs samma uttryck som tidigare

KINETISK ENERGI - STELKROPPSRÖRELSE SAMMANFATTNING:

T kan uttryckas på tre
olika sätt ---->

Vilket som används i
energisambandet

$$W^{(ik)} = \Delta E$$

beror på vilken typ av
rörelse som är aktuell.

* Translationsrörelse

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$$

* Rotation kring en fix axel

$$T = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

* Generell plan stelkroppsrörelse

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$$

BERÄKNINGSGÅNG - ENERGISAMBAND - STEL KROPP

- * Bestäm den mekaniska energin E vid läge 1 och läge 2

$$E_1 = T_1 + V_{g1} + V_{e1}$$

$$E_2 = T_2 + V_{g2} + V_{e2}$$

där

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 \quad (\text{eller alternativa uttryck})$$

Potentiell energi:

$$\begin{cases} V_g = mgh & (\text{välj ref. nivå}) \\ V_e = \frac{1}{2} kx^2 & (x=0 \text{ vid ospänd fjäder}) \end{cases}$$

- * Bestäm det arbete som ^(ev.) utförs av andra krafter än mg och kx .

$$W^{ik} = \dots$$

- * Energisatsen : $W^{(ik)} = \Delta E$ dvs.

$$W^{ik} = E_2 - E_1$$

- * Kinematik