Föreläsningspass 13

PARTIKELDYNAMIK:

- Svängningar - odämpade
- Fria svängningar
- Påtvingade svängningar

Avsnitt i kursboken: 6.4 a) och c)
(ej dämpad svängning i 6.4c)

ALLMÄNT OM SVÄNGNING

Svängningar och vibrationer förekommer i många olika sammanhang i system som har massa och fjädrande egenskaper.

Ex.

Bjälklag, stämgaffel, höga hus (vind, jordbävning), tvättmaskin (roterande obalans), pendel mm.

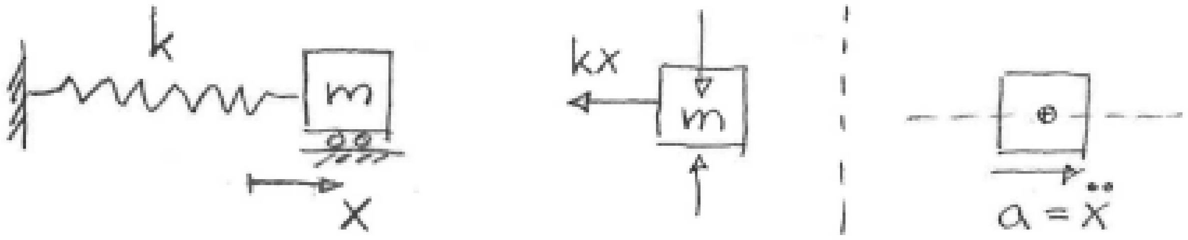
#

Liten ordlista:

- Fri och påtvingad svängning/vibration
- Naturlig frekvens alt. egenfrekvens: svängningar per sekund
- Amplitud: utslaget vid svängning
- Periodtid: tiden för en svängning
- Harmonisk funktion: sinus eller cosinus funktion

MASSA-FJÄDER SYSTEM

Modellsystem "harmonisk oscillator" i fri odämpad rörelse:



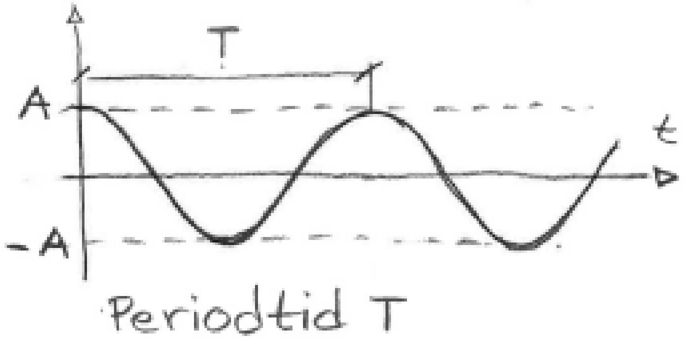
NII (→): $-kx = m\ddot{x}$; $m\ddot{x} + kx = 0$;

Rörelseekvationen $\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$

Lösningen av differentialekvationen ger förskjutningen *x(t)*.

LÖSNING AV EKVATIONEN FÖR FRI SVÄNGNING

Testa om $x = A\cos ct$ är en lösning



Periodisk funktion:
$\cos(0)=1$ och $\cos(2\pi)=1$ =>

$cT=2\pi$ dvs $c=2\pi/T$

A och c är godtyckliga konstanter

$\dot{x} = -Ac\sin ct$; $\ddot{x} = -Ac^2\cos ct$

Insatt i rörelseekvationen $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

$\Rightarrow \quad A\left(-c^2 + \frac{k}{m}\right)\cos ct = 0$

Skall gälla alla tider t => Ansatsen är en lösning om $c^2=k/m$

Men $c=2\pi/T$ där T är periodtiden.

Det finns alltså en specifik periodtid T_n som kopplar till k och m enligt:

$$\boxed{\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_n}}$$

T_n kallas systemets naturliga periodtid (enhet s)

f_n är dess naturliga frekvens (Hz=1/s)

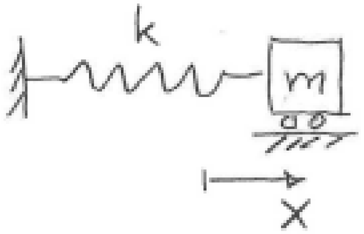
$\omega_n=2\pi f_n$ är dess naturliga vinkelfrekvens (rad/s)

Detta är systemets periodtid och frekvens (oberoende av amplituden).

Anm. Ibland används *egenfrekvens* som är en synonym till naturlig frekvens

ALLMÄNN LÖSNING – FRI ODÄMPAD SVÄNGNING

Amplituden i svängningen bestäms av begynnelsedata:



$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

Både $\cos \omega_n t$ och $\sin\omega_n t$ är lösningar till rörelseekvationen =>

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

är också en lösning. A och B kan bestämmas med hjälp av begynnelsedata:

$$\begin{cases} x(0) = A\cos\omega_n \cdot 0 + B\sin\omega_n \cdot 0 = A \,; \\ \dot{x}(0) = -A\,\omega_n \sin\omega_n \cdot 0 + B\,\omega_n \cos\omega_n \cdot 0 = B\,\omega_n \end{cases}$$

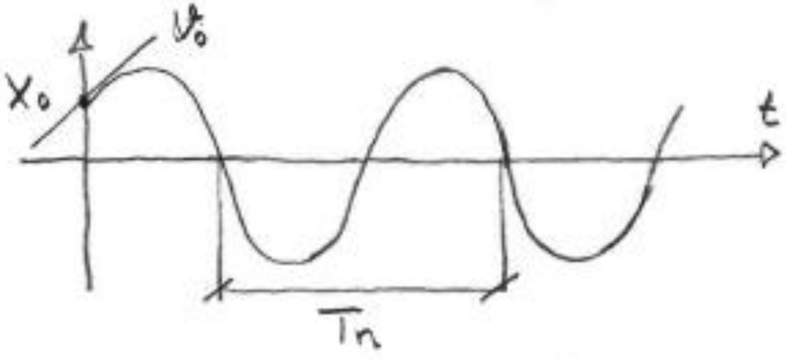
dvs. $A = x_0$ och $B = \dfrac{v_0}{\omega_n}$

ALLMÄNN LÖSNING ... forts.

A och B ges av begynnelsedata.

Den allmänna lösningen med hänsyn till begynnelsedata ges då av:

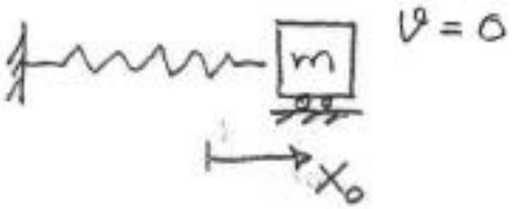
$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t$$



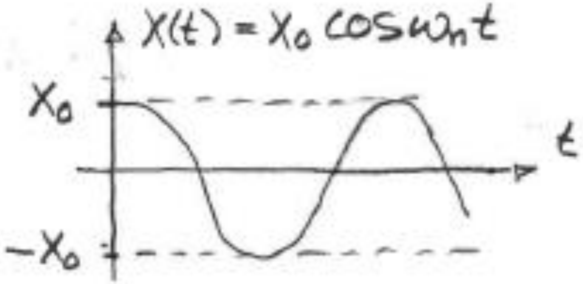
$$\omega_n = 2\pi f_n \quad , \quad f_n = \frac{1}{T_n}$$

Ex. Inverkan av begynnelsedata i den allmänna lösningen

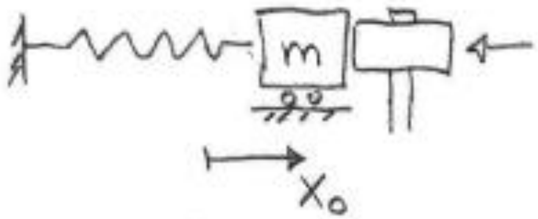
1) Systemet släpps från vila



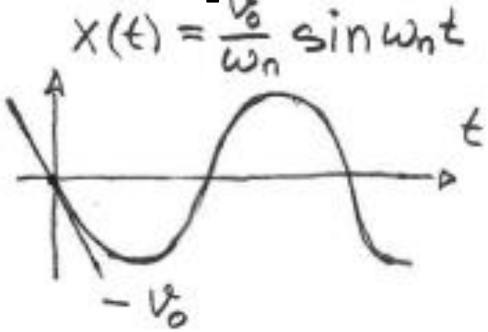
$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$



2) Hammarslag mot massan

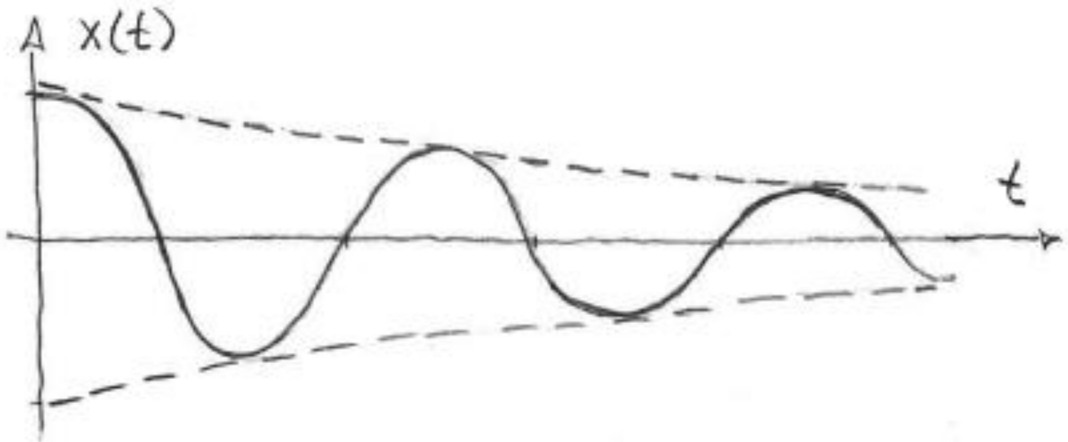


$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = -v_0 \end{cases}$$



DÄMPNING VID FRI SVÄNGNING

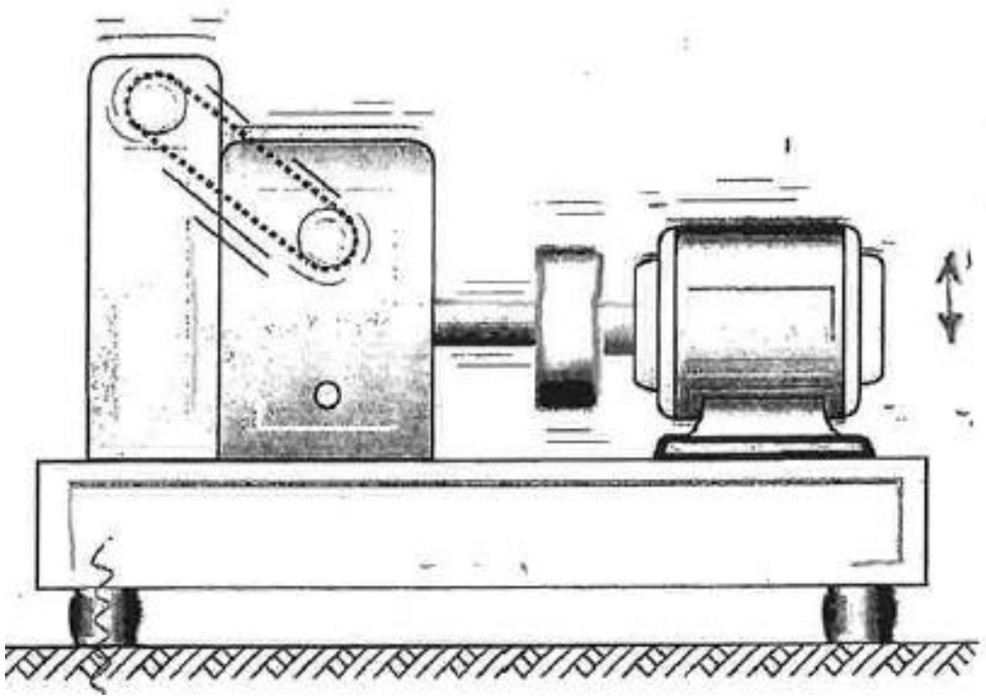
I strikt mening finns inga odämpade system. Det finns alltid förluster i form av friktion eller annat rörelsemotstånd =>



Den fria svängningens amplitud minskar för att slutligen dö ut.

PÅTVINGADE SVÄNGNINGAR

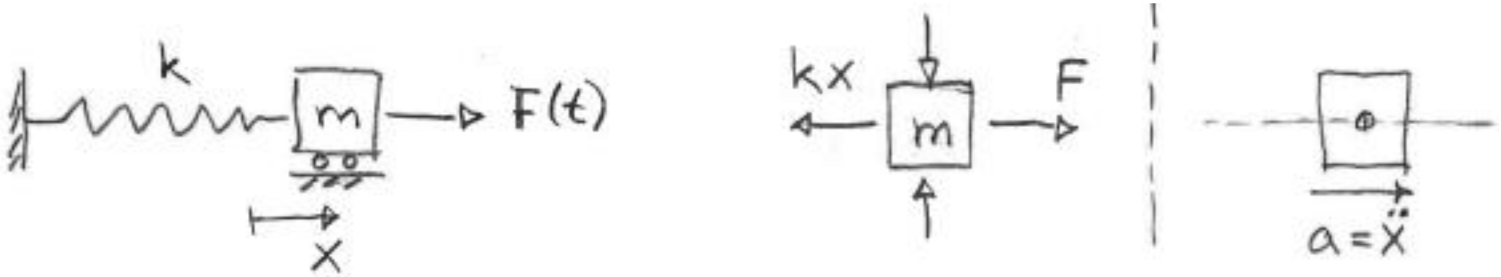
Forcerade vibrationer förekommer i olika sammanhang, speciellt i form av harmoniska laster i samband med olika maskiner/motorer med roterande delar.



Vi studerar bara harmonisk last dvs $F(t) = F_0 \sin \Omega t$ (vid kraftstyrning).

MODELLSYSTEMET MED HARMONISK LAST

Kraftstyrning med harmonisk last dvs $F(t) = F_0 \sin \Omega t$



NII (→) : $-kx + F = m\ddot{x}$; $m\ddot{x} + kx = F$;

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}}$$ Rörelse ekv. (med högerled)

Det är troligt att systemet följer den pålagda kraftens vinkelfrekvens =>

Testa lösningar på formen $x(t) = x_0 \sin \Omega t$

MODELLSYSTEMET ... forts.

$$x(t) = x_0 \sin \Omega t \Rightarrow \dot{x}(t) = x_0 \Omega \cos \Omega t \; ; \; \ddot{x} = -x_0 \Omega^2 \sin \Omega t$$

Insatt i $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t \Rightarrow$

$$\left(-x_0 \Omega^2 + \frac{k}{m} x_0\right) \cancel{\sin \Omega t} = \frac{F_0}{m} \cancel{\sin \Omega t} \; ;$$

$$x_0 \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) = \frac{F_0}{m}.$$

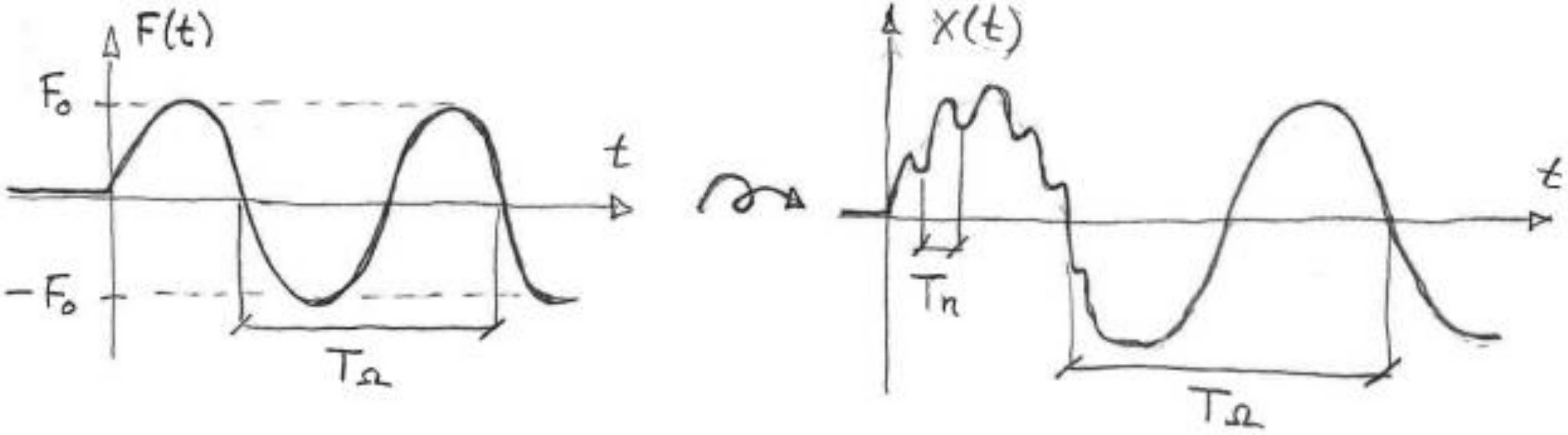
dvs ett samband för amplituderna:

$$x_0 = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_n^2} - \Omega^2} = \frac{F_0}{\cancel{m}} \frac{\cancel{m}}{k} \frac{1}{1 - \frac{m}{k}\Omega^2} = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}$$

Obs! ω_n^2 Amplituden blir obegränsad då $\Omega = \omega_n$ => Resonans!

STATIONÄR LÖSNING - KRAFTSTYRNING

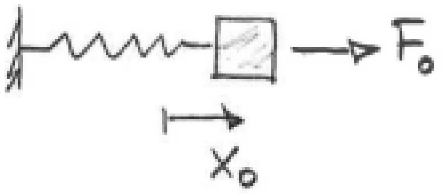
När den harmoniska kraften läggs på exciteras även den fria svängningen.
Men den dör ut på grund av en alltid närvarande dämpning.



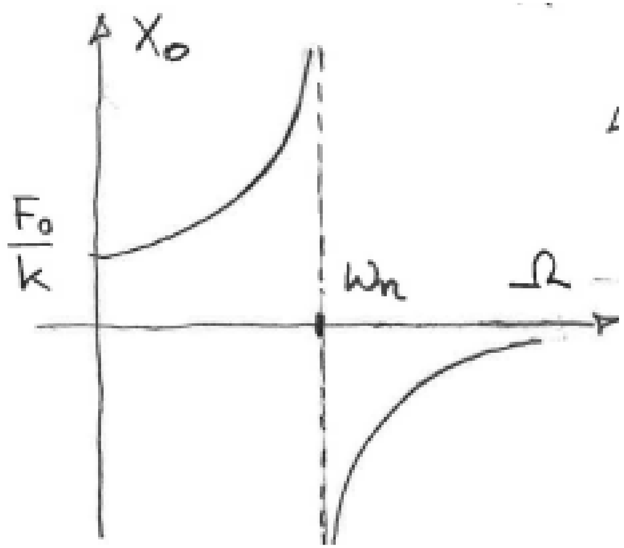
Kvar blir bara den stationära lösningen med samma frekvens som lasten
och med en amplitud enligt föregående sida.

EGENSKAPER FÖR DEN STATIONÄRA LÖSNINGEN

Amplituder



$$\boxed{x_0 = \frac{F_0}{k}\,\frac{1}{1-\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}}$$



Tre intressanta frekvensområden:

I) Låg frekvens : F_0 och x_0 följs åt – "kvasistatiskt"

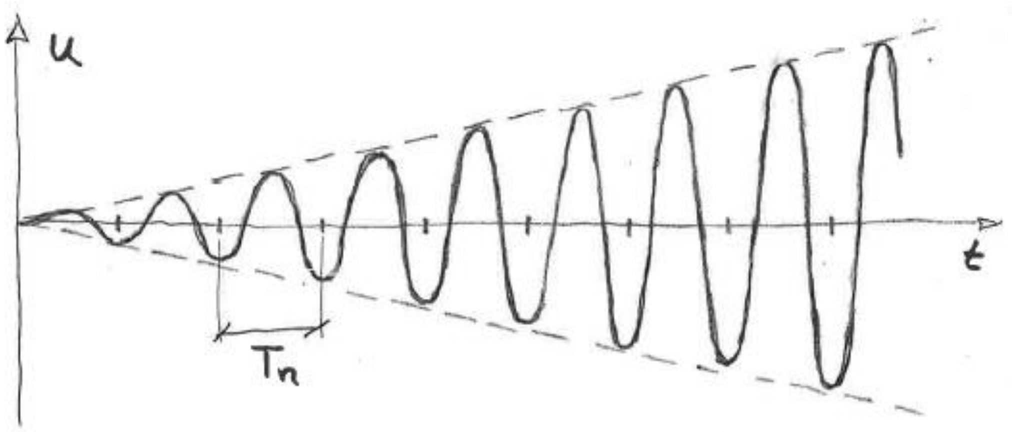
II) Resonans : $x_0 \longrightarrow \pm\infty$ då $\Omega = \omega_n$

III) Hög frekvens : $x_0 \rightarrow 0$ då $\Omega \rightarrow \infty$ – "motfas"

BETEENDE VID RESONANS

Om kraften har samma frekvens som systemets naturliga svängningsfrekvens, dvs $F(t) = F_0 \sin \Omega t$ där $\Omega = \omega_n$
uppkommer alltså resonans och amplituden för svängningen går mot obegränsade värden.

Men amplituden blir inte oändlig direkt. Den ökar linjärt med tiden enligt nedan:



Man kan därför passera resonansen, genom att öka eller minska frekvensen, utan att få alltför stora amplituder, om man inte gör det för långsamt…