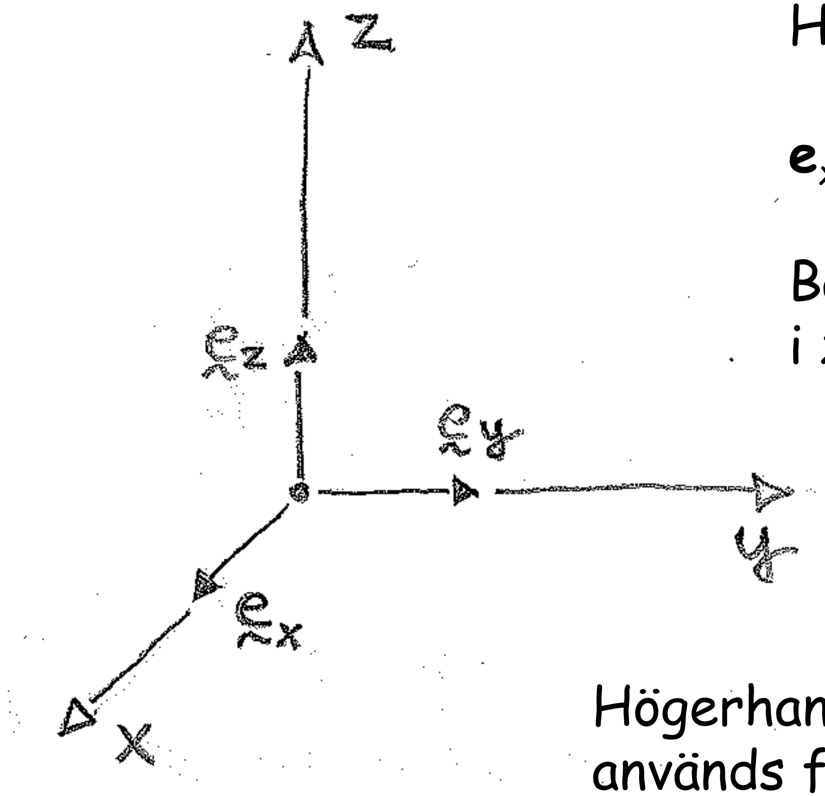
Föreläsningspass 6

STATIK:

- Rep. Linjär algebra
- Krafter 3D
- Moment 3D

Avsnitt i kursboken:
1.3(ej e)

KOORDINATSYSTEM 3D



HON-system* med basvektorer:

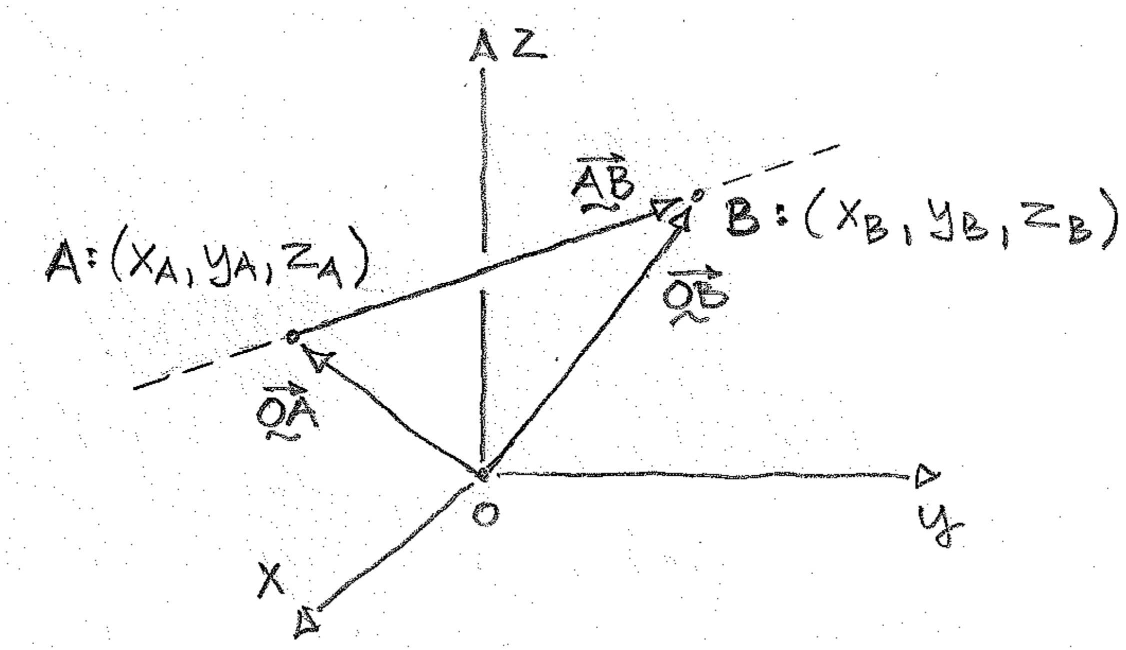
$\mathbf{e}_x=(1, 0, 0)$ $\mathbf{e}_y=(0, 1, 0)$ och $\mathbf{e}_z=(0, 0, 1)$

Basvektorerna är enhetsvektorer
i x-, y- resp. z-riktningarna

Högerhandsregeln alt. skruvregeln
används för orienteringen av x, y och z

*) Anm.
Högerorienterat Ortogonalt och Normerat

ORTSVEKTORER



Geometriska vektorer från origo O till en punkt (A eller B):

$\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A, z_A)$

$\overrightarrow{OB} = (x_B, y_B, z_B)$

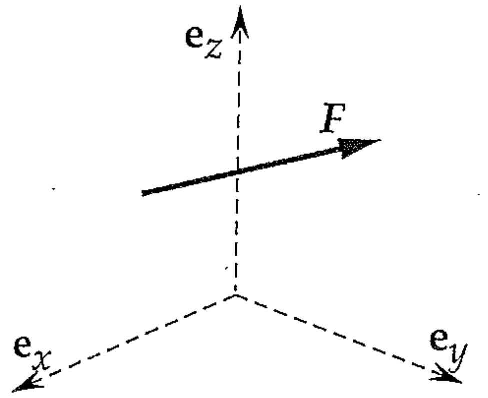
Alternativ beteckning: $\overrightarrow{OA} = x_A\,\mathbf{e}_x + y_A\,\mathbf{e}_y + z_A\,\mathbf{e}_z$

Belopp (längd/avstånd) $|\overrightarrow{OA}|^2 = x_A^2 + y_A^2 + z_A^2$ (Pythagoras sats i 3D)

Vektorn från A till B: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

KRAFTVEKTORER 3D

Boken kap. 1.3a

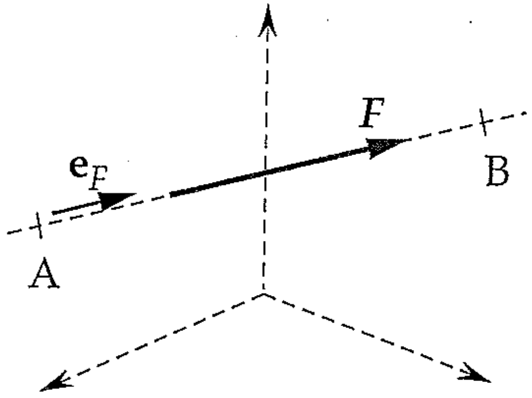


En kraftvektor $\boldsymbol{F}$ kan representeras med sina komponenter F_x, F_y och F_z. Detta innebär att

$$\boldsymbol{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y + F_z\mathbf{e}_z \tag{1.3.1}$$

Om kraftens komponenter är okända från början men däremot dess belopp F och verkningslinje är givna så kan man börja med att skriva vektorn som $\boldsymbol{F} = F\mathbf{e}_F$. Här är $\mathbf{e}_F$ en enhetsvektor längs verkningslinjen och riktad åt samma håll som kraften själv. Om A och B är två punkter på linjen så belägna att vektorn $\overrightarrow{AB}$ har samma riktning som $\boldsymbol{F}$ så fås $\mathbf{e}_F$ ur

$$\mathbf{e}_F = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \tag{1.3.2}$$

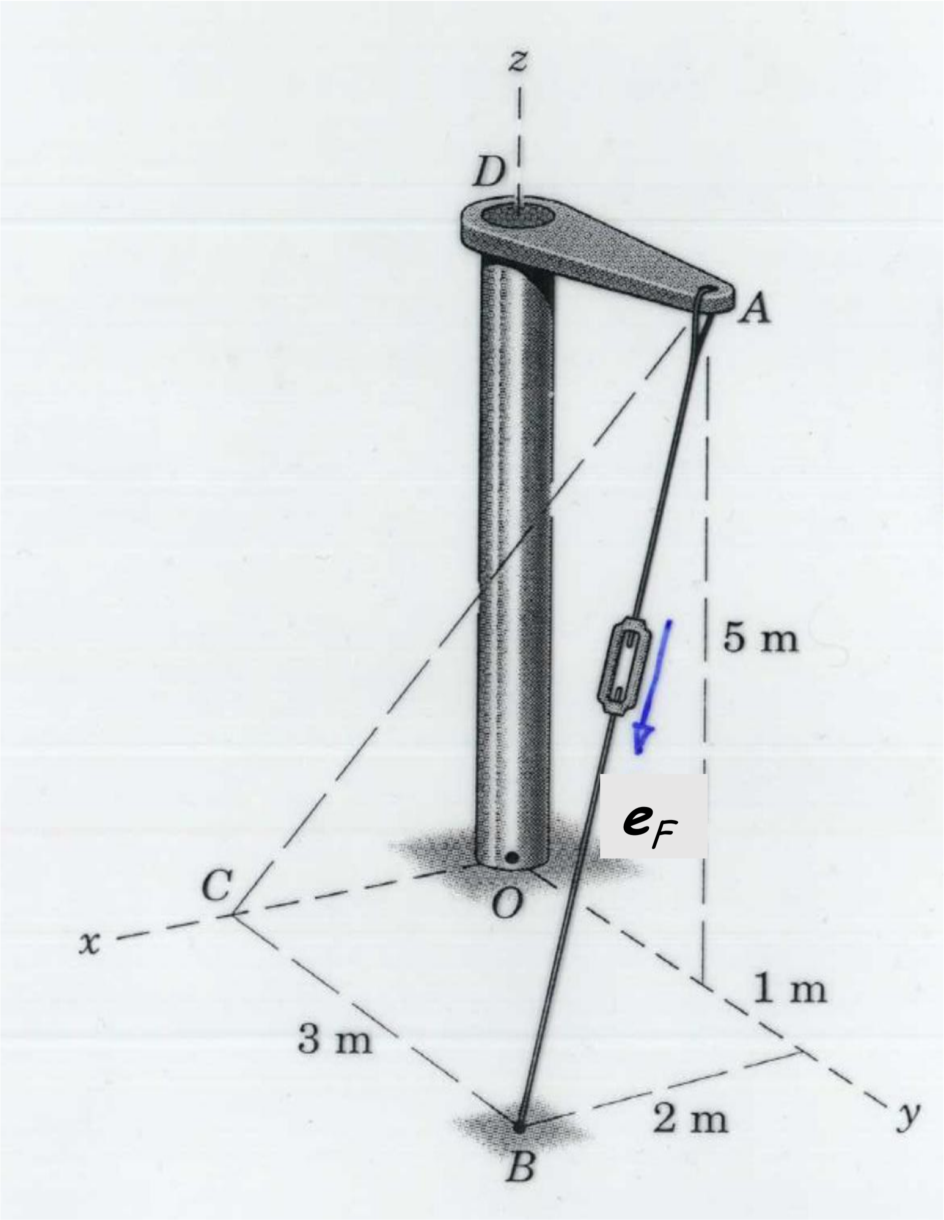


Figur 1.3.1

Med kända koordinater för punkterna A och B kan lätt vektorn skrivas uttryckt i sina komponenter i basvektorsystemet $\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$ varefter

$$\boldsymbol{F} = F\mathbf{e}_F = F\,\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \tag{1.3.3}$$

Ex. Kraft med riktning

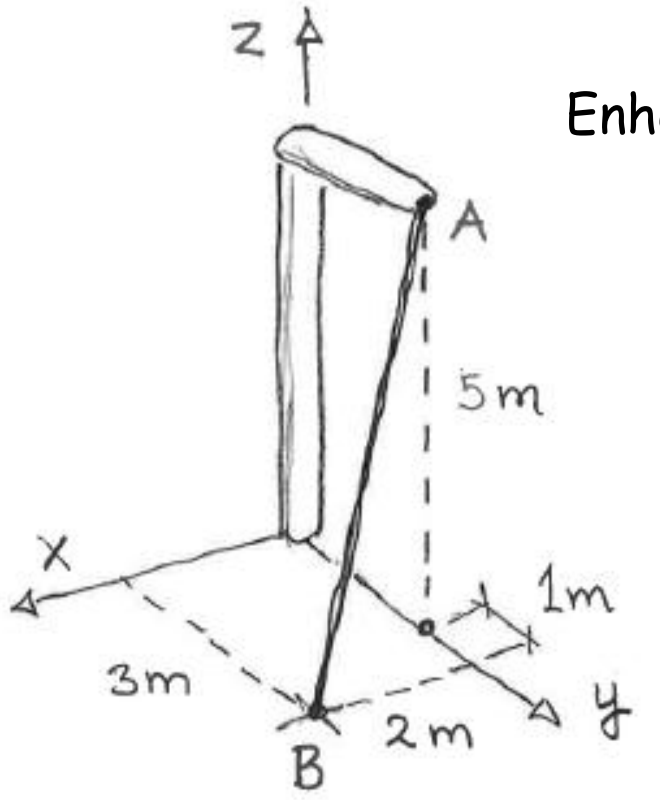


Bestäm kraften i vajern på vektorform om dess belopp $F = 1$kN.

$$\boxed{\mathbf{F} = F\,\mathbf{e}_F}$$

Lösning:

$$\underset{\sim}{F} = F \, \underset{\sim}{e}_F \; , \quad F = 1 \, kN$$



Enhetsvektor längs vajern: $\underset{\sim}{e}_F = \dfrac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$

$$\overline{AB} = (2,3,0) - (0,2,5) = (2,1,-5)\,m$$

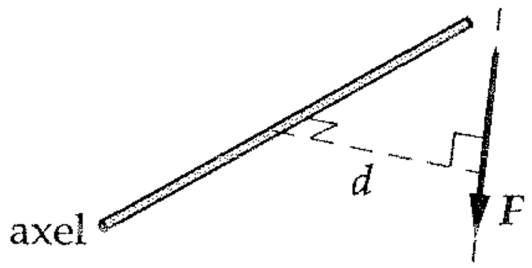
$$|\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30} = 5.48\ m$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{e}_F = \frac{(2,1,-5)}{5.48} = (0.36, 0.18, -0.91)$$

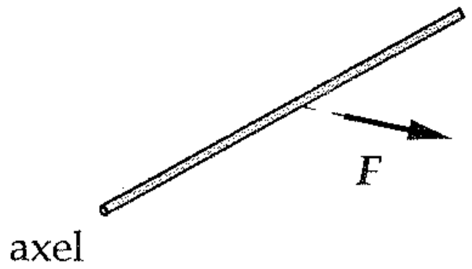
$$\Rightarrow \quad \underset{\sim}{F} = (\underset{F_x}{360}, \underset{F_y}{180}, \underset{F_z}{-910})\ N$$

MOMENT- EGENSKAPER

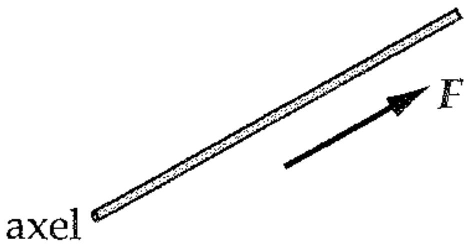
Boken kap. 1.3b:



En kraft *F* *vinkelrät* mot en axel på avståndet *d* har momentet *Fd* map axeln.



En kraft som *skär* en axel har inget moment map axeln.

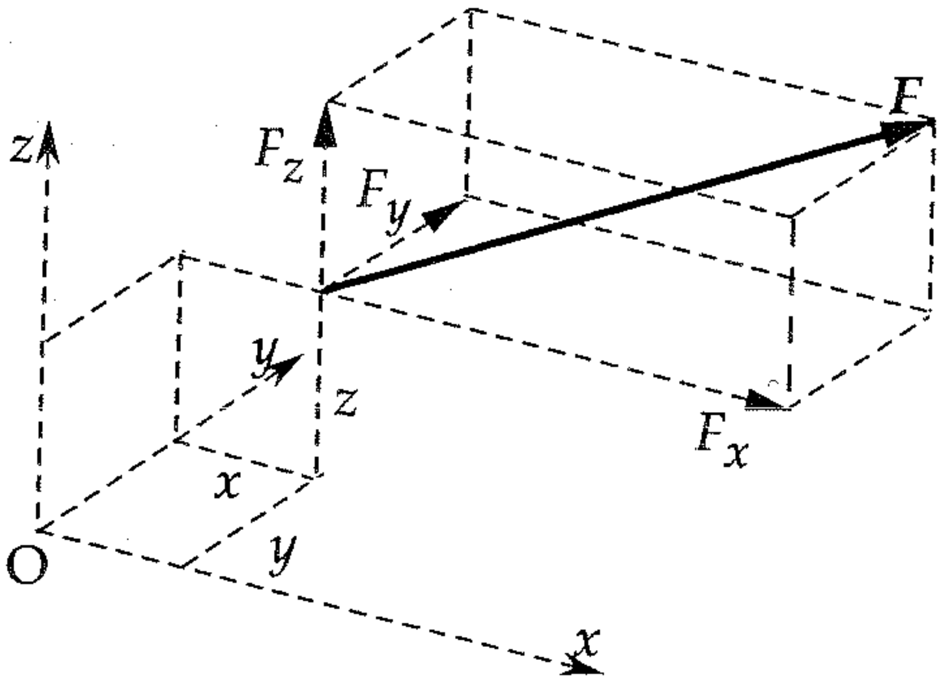


En kraft *parallell* med en axel har inget moment map denna axel.

MOMENT 3D

Boken kap. 1.3b:

Beräkning av 3D-moment med hjälp kraftkomposanterna:



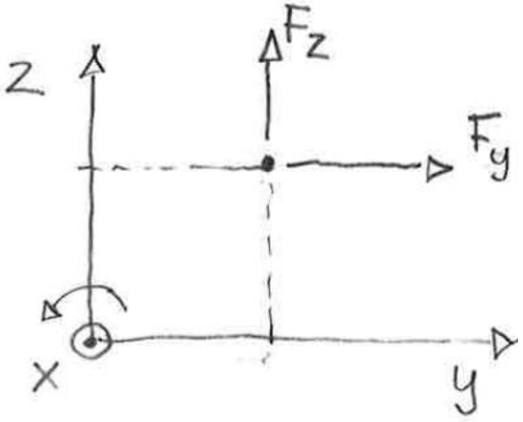
Figur 1.3.4

$$M_x = F_z y - F_y z$$
$$M_y = F_x z - F_z x$$
$$M_z = F_y x - F_x y$$

Beräkning av 3D-moment med hjälp kraftkomposanterna forts.

Ex.

Bestäm x-komponenten m.h.a. projektion:



$$\curvearrowleft x \qquad M_x = F_z\, y - F_y\, z$$

Boken kap. 1.3b:

Kraftmomentet som vektor

Betrakta formlerna (1.3.4). Uttrycken för M_x, M_y och M_z har en anmärkningsvärd egenskap: de utgör alla komponenter av en och samma vektor, nämligen $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$. Vi ger denna vektor beteckningen $\boldsymbol{M}_O$. Om dess komponenter betecknas $(\boldsymbol{M}_O)_x$, $(\boldsymbol{M}_O)_y$ och $(\boldsymbol{M}_O)_z$ så gäller alltså för de framräknade momenten med avseende på koordinataxlarna:

$$\begin{aligned} M_x &= (\boldsymbol{M}_O)_x \\ M_y &= (\boldsymbol{M}_O)_y \\ M_z &= (\boldsymbol{M}_O)_z \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Indexbokstaven O i symbolen $\boldsymbol{M}_O$ står för *origo* dvs skärningspunkten mellan de tre aktuella axlarna. – I vektorn $\boldsymbol{M}_O$ har vi således funnit *en enda* matematisk storhet som i sig innehåller all information om *tre* fysikaliska storheter (kraftmomenten M_x, M_y och M_z) vilka har en fast experimentell förankring.

MOMENT – KRYSSPRODUKT

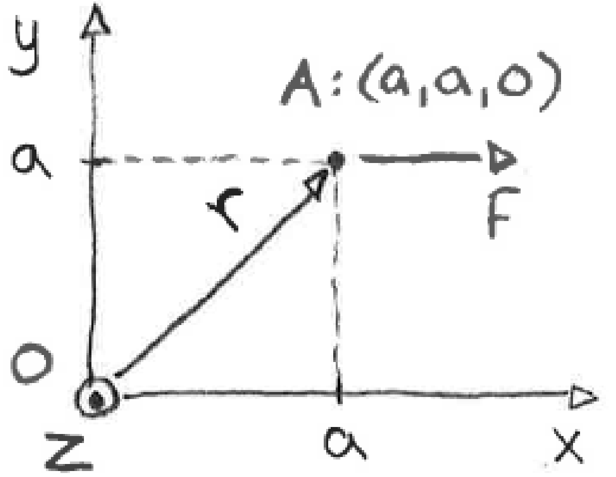
$\underset{\sim}{r} = (x, y, z)$ och $\underset{\sim}{F} = (F_x, F_y, F_z)$

"Sarrus regel":

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ \underset{\sim}{e}_x & \underset{\sim}{e}_y & \underset{\sim}{e}_z & \underset{\sim}{e}_x & \underset{\sim}{e}_y & \underset{\sim}{e}_z \\ x & y & z & x & y & z \\ F_x & F_y & F_z & F_x & F_y & F_z \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{e}_x (y F_z - z F_y) + \underset{\sim}{e}_y (z F_x - x F_z) + \underset{\sim}{e}_z (x F_y - y F_x)}$$

Ex. Moment genom kryssprodukt, jmf. 2D



Enl. tidigare 2D:

$\curvearrowleft O: \quad M_0 = -F\cdot a$

Med kryssprodukt:

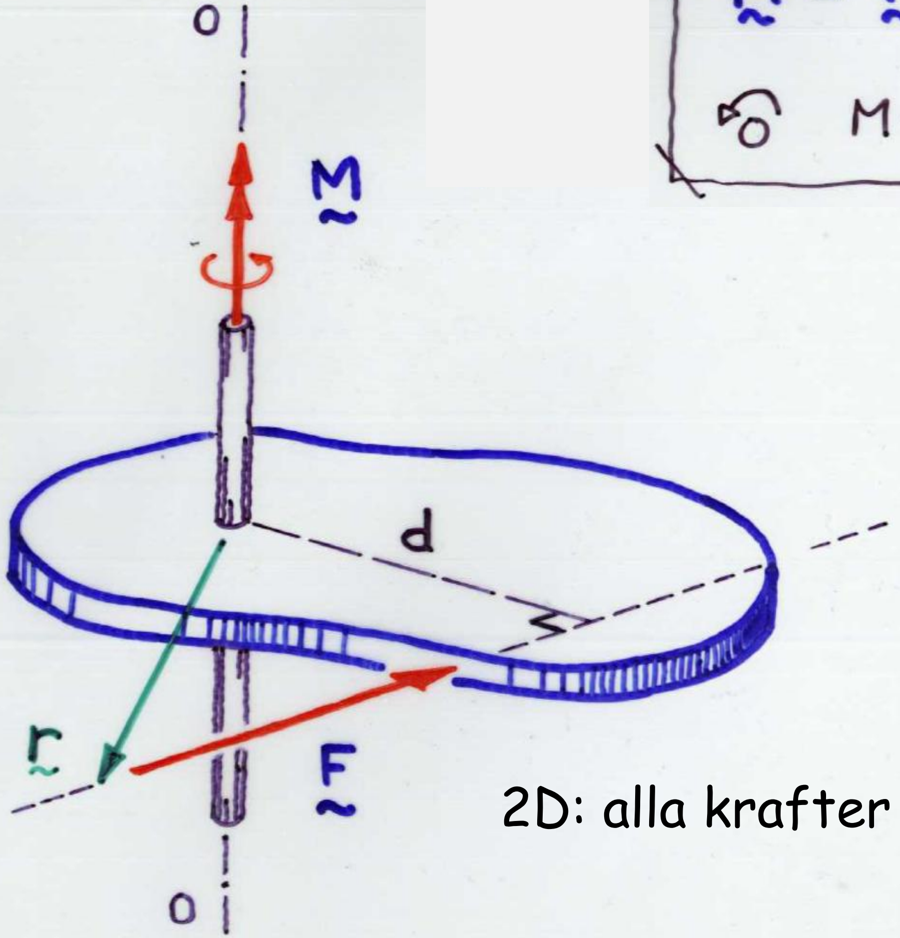
$$\begin{cases} \underset{\sim}{r} = (a, a, 0) \\ \underset{\sim}{F} = (F, 0, 0) \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{M}_0 = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} \Rightarrow \begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ e_x & e_y & e_z & e_x & e_y & e_z \\ a & a & 0 & a & a & 0 \neq 0 \\ F & 0 & 0 & F & 0 & 0 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}_0 = -F\cdot a\, \underset{\sim}{e}_z = (0, 0, -Fa)$$

Dvs samma som ovan.

MOMENT



$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}$$

$$M = F \cdot d$$

2D: alla krafter i samma plan

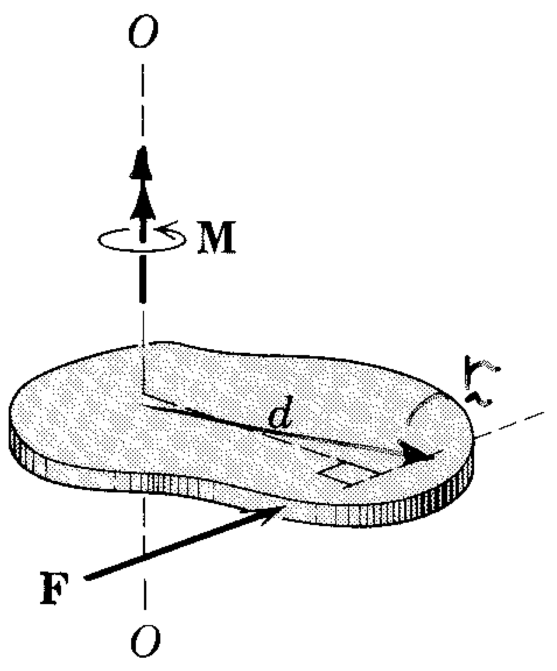
Momentvektorn ges av en kryssprodukt:

Beloppet är *Fd* och riktningen är vinkelrät mot ***r*** och ***F***

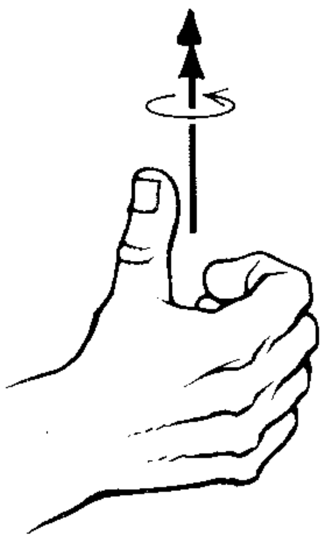
Obs!
Det räcker att ***r*** pekar på någon punkt på verkningslinjen till ***F***

Momentpunkten kan vara en godtycklig punkt *A*

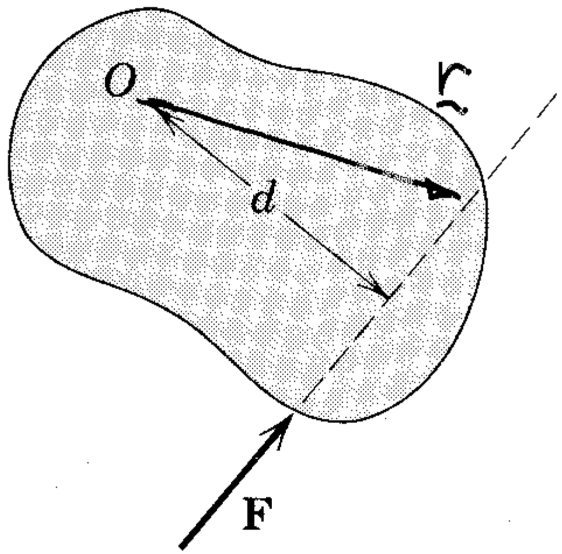
MOMENT SOM KRYSSPRODUKT



(a)



(b)

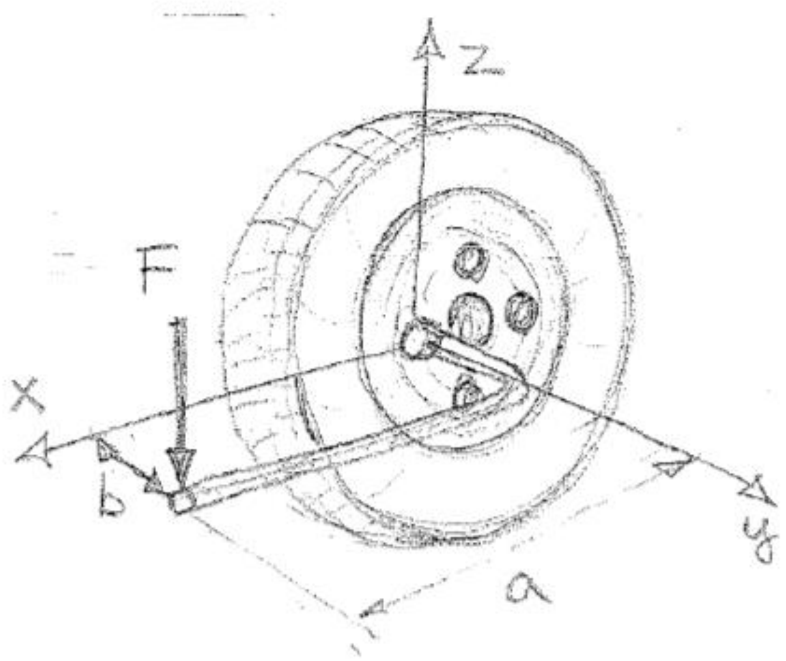


(c)

(alt. skruvregeln)

Ex. Moment vid däckbyte

Bestäm momentet m.a.p. origo; $\boldsymbol{M}_o$.
Speciellt komponenten i y-riktningen



F=900N och a=0.3m

Lösning:

$$\underset{\sim}{M}_o = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{r} = (a, b, 0) \\ \underset{\sim}{F} = (0, 0, -F) \end{cases}$$

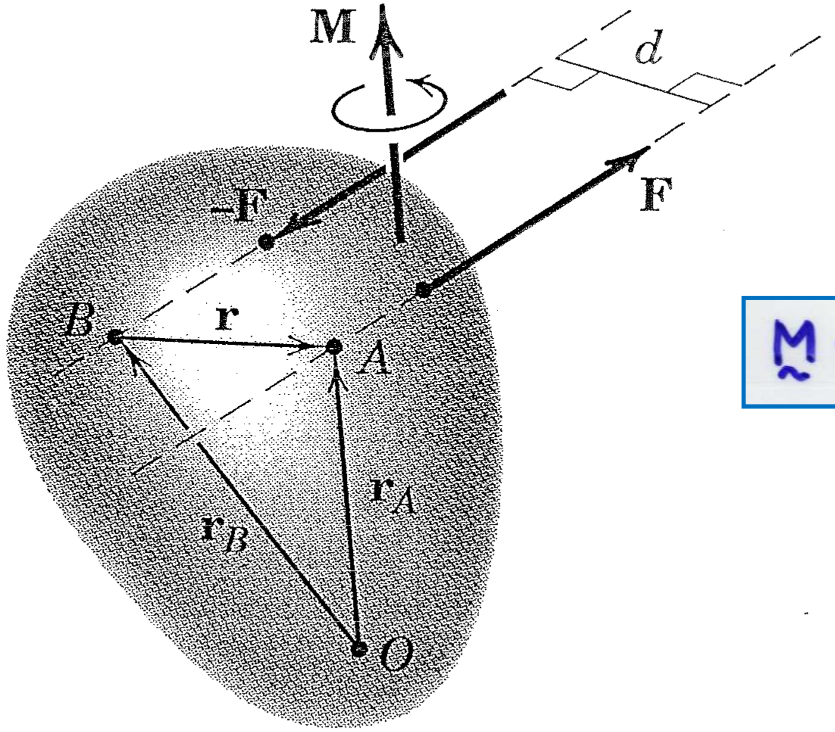
$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ \underset{\sim}{e}_x & \underset{\sim}{e}_y & \underset{\sim}{e}_z & \underset{\sim}{e}_x & \underset{\sim}{e}_y & \underset{\sim}{e}_z \\ a & b & 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & -F & 0 & 0 & -F \end{array} \Rightarrow$$

$$\underset{\sim}{M}_o = (-Fb, Fa, 0) = (M_{ox}, M_{oy}, M_{oz})$$

Komponenten i y-riktningen:

$$M_{oy} = F \cdot a = \underline{\underline{270 \text{ Nm}}}$$

KRAFTPAR 3D



$$\boxed{\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}}$$

Visas enligt:

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{r}_A \times \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{r}_B \times (-\underset{\sim}{F}) =$$

$$= (\underset{\sim}{r}_A - \underset{\sim}{r}_B) \times \underset{\sim}{F} =$$

$$= \underbrace{\underset{\sim}{r}}_{?} \times \underset{\sim}{F}$$

Beloppet: $|\underset{\sim}{M}| = Fd$