

## Föreläsningsspass 9

### **STATIK:**

- Tyngdpunktsberäkning

Avsnitt i kursboken: 3.1, 3.2

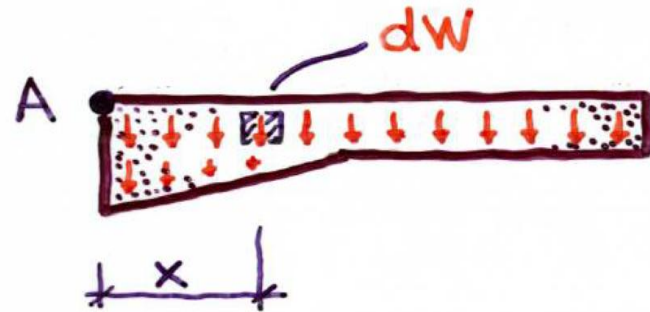
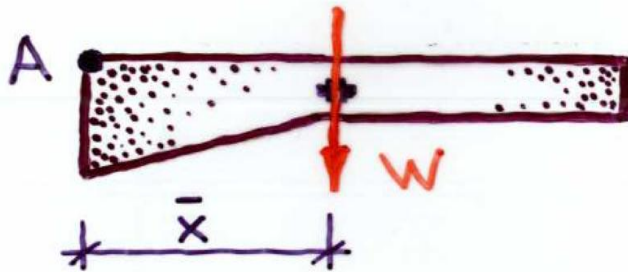
# TYNGDPUNKTSBERÄKNING

Att bestämma tyngdpunktens läge är likvärdigt med att reducera en fördelad last till en resulterande kraft.

Verkningslinjen för resultanten går genom tyngdpunkten.

Tyngdpunksberäkning kan göras på två olika sätt; genom *integration* eller med kända *delkroppar*

# TP GENOM INTEGRATION



$$(\downarrow) \quad W = \int dW$$

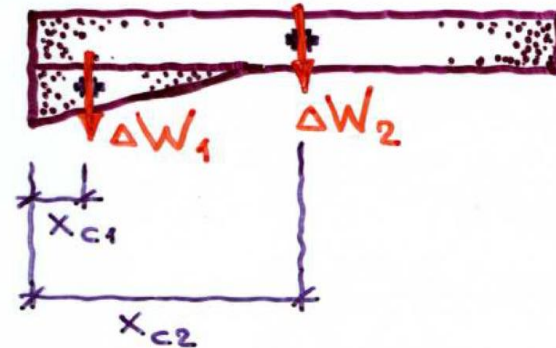
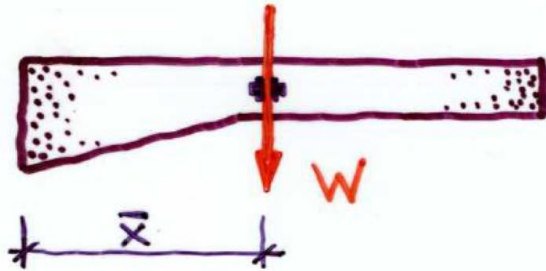
$$(\curvearrowright) \quad \bar{x}W = \int x dW$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{W}$$

Tyngdpunktens läge i x-led

$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

# TP MED DELKROPPAR



$$(\downarrow) \quad W = \sum \Delta W$$

$$(\curvearrowright) \quad \bar{x}W = \sum x_c \Delta W$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_c \Delta W}{W}$$

$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

# MASSCENTRUM

Antag  $g$  konstant inom kroppen

$$dW = g \, dm$$

$$W = \int dW = \int g \, dm = g \int dm$$

$$\int x \, dW = \int x \, g \, dm = g \int x \, dm$$

$$\bar{x} = \frac{g \int x \, dm}{g \int dm} = \frac{\int x \, dm}{m} = \frac{\sum (x_c \Delta m)}{m}$$

masscentrums läge i x-led

$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

# GEOMETRISK TYNGDPUNKT

Antag densiteten  $\rho$  konstant inom kroppen  
(homogent material.)

$$dm = \rho dV$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V} = \frac{\sum(x_c \Delta V)}{V}$$

geometriska tyngdpunktens läge

$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

# TP FÖR EN YTA

Antag kroppens tjocklek  $t$  konstant.

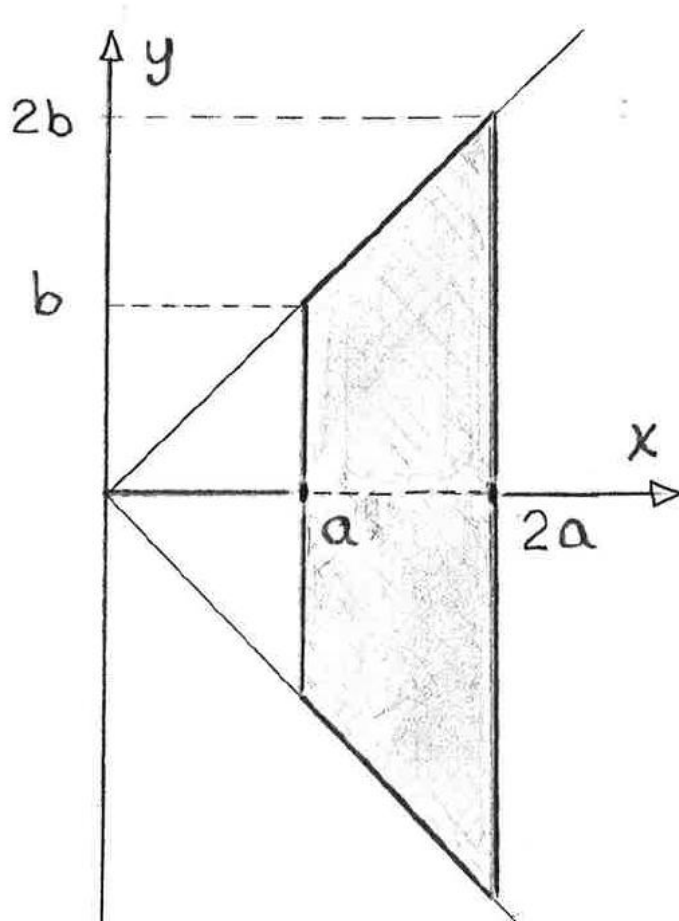
$$dV = t dA$$



$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} = \frac{\sum(x_c \Delta A)}{A}$$

$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

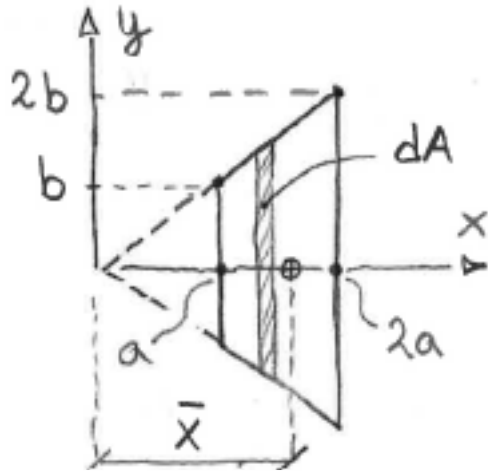
Ex. Tyngdpunkt för en yta genom integration



Välj ett lämpligt ytelement  $dA$



Lösning, integration:



Bestäm  $\bar{x}$  m.h.a.  $\bar{x} \cdot A = \int_a^{2a} x dA \dots (*)$

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a} x \\ dA = 2y dx = 2\frac{b}{a} x dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= \int dA = \int_a^{2a} 2\frac{b}{a} x dx = 2\frac{b}{a} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^{2a} = \\ &= \frac{b}{a} (4a^2 - a^2) = 3ab \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$\int_a^{2a} x dA = \int_a^{2a} 2\frac{b}{a} x^2 dx = 2\frac{b}{a} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_a^{2a} = \frac{2}{3} \frac{b}{a} (8a^3 - a^3) = \frac{14}{3} a^2 b \quad \dots (2)$$

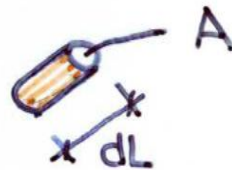
(1) och (2) insatt i (\*)  $\Rightarrow$

$$\bar{x} \cdot 3ab = \frac{14}{3} a^2 b ; \quad \bar{x} = \frac{14}{9} a ; \quad \bar{x} \approx 1,56 a \quad (\text{rimligt})$$

# TP FÖR ETT LINJEELEMENT

Antag kroppens tvärsnittsarea  $A$  konstant

$$dV = A dL$$



$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L} = \frac{\sum (x_c \Delta L)}{L}$$

$\bar{y}$  och  $\bar{z}$  beräknas på samma sätt

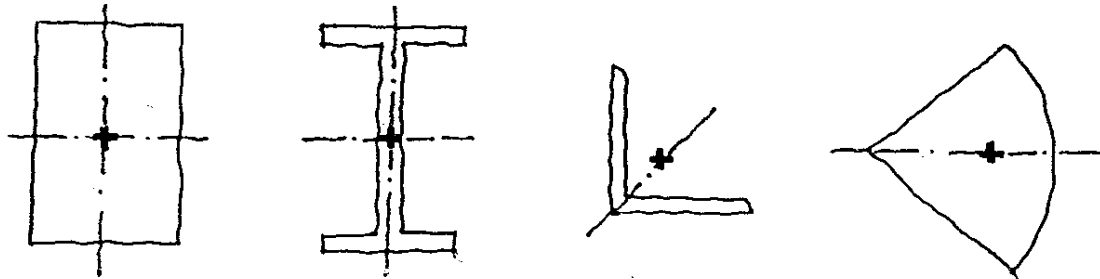
# SYMMETRI - AXLAR/PLAN

Geometrisk tyngdpunkt

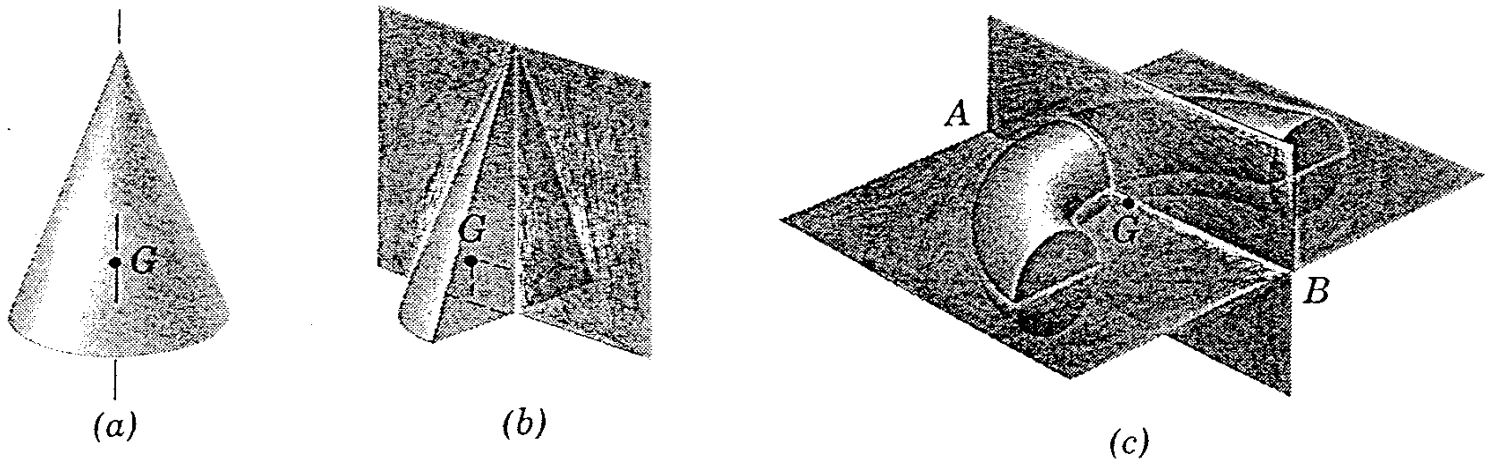
och om homogent mtrl - masscentrum

ligger längs symmetriaxlar/plan

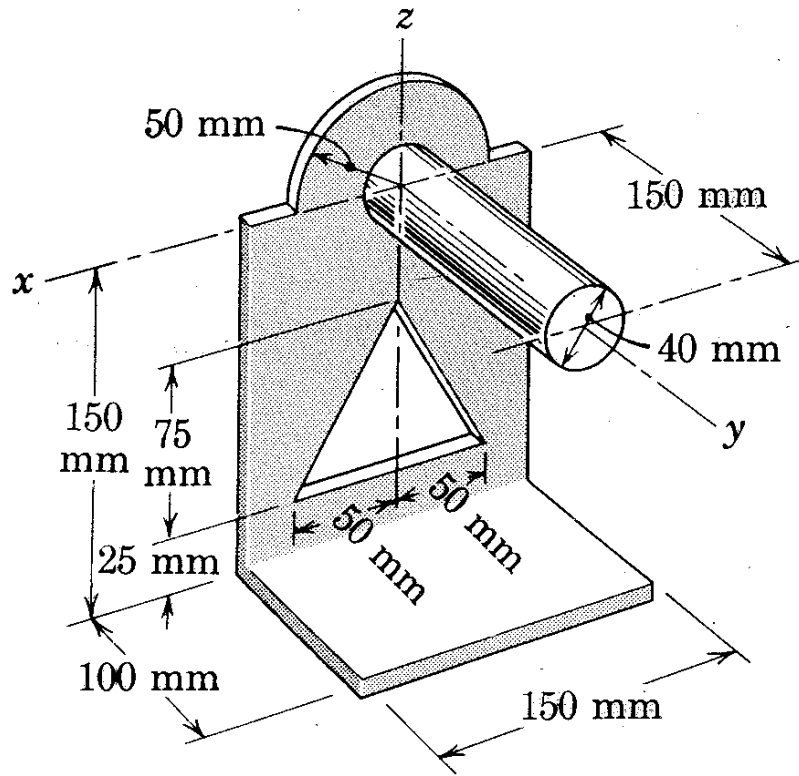
2D:



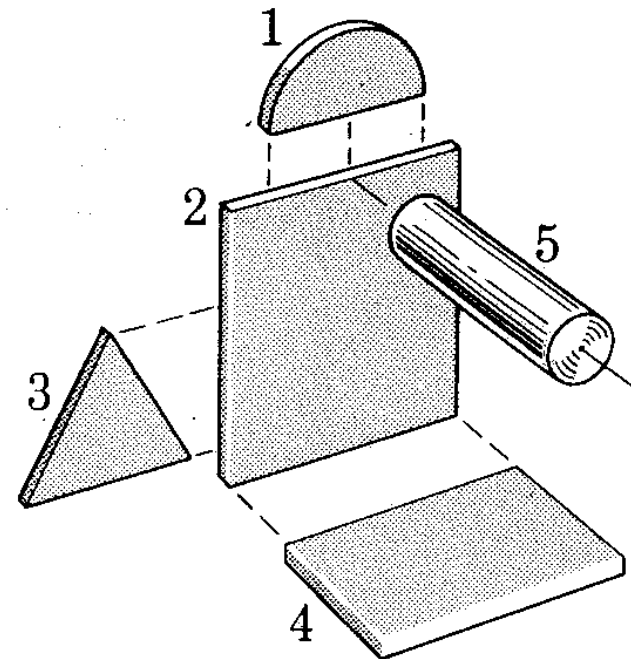
3D:



# SAMMANSATTA KROPPAR

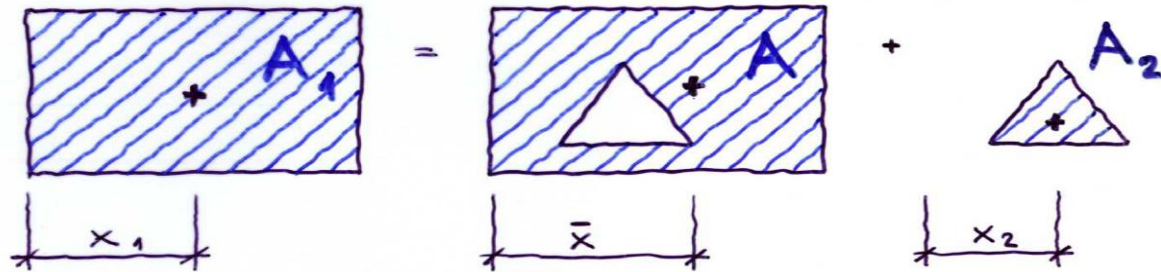
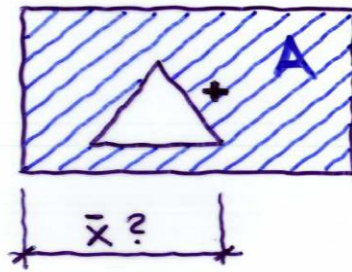


Delar med kända massor  
och masscentra:



(del 3 ger ett negativt bidrag)

# KROPP MED HÅL



$$A_1 = A + A_2$$

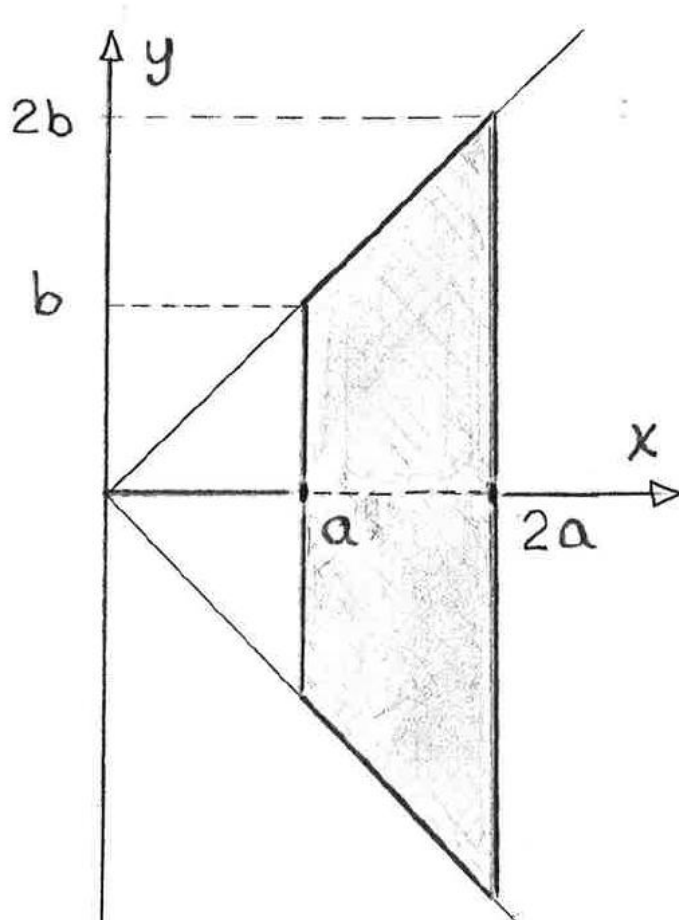
$$(\Leftrightarrow) x_1 A_1 = \bar{x} A + x_2 A_2 \quad (\text{samma kropp!})$$

$$\text{dvs.} \quad \bar{x} A = x_1 A_1 - x_2 A_2$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 A_1 - x_2 A_2}{A}$$

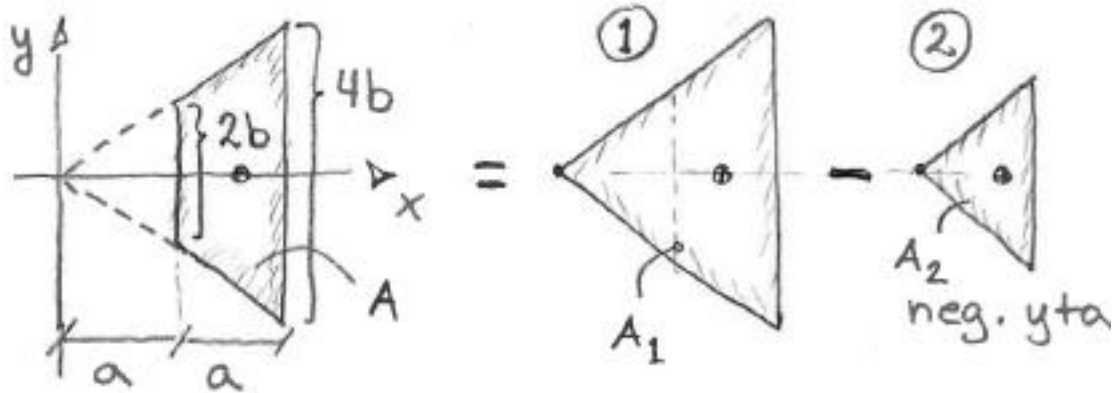
Dvs. hålet ger ett negativt bidrag till det statiska momentet!

# Ex. Tyngdpunkt för en yta - sammansatt kropp



Välj lämpliga delytor

Lösning, delytor:



Tabell:

del	$A_i$	$\bar{x}_i$	$\bar{x}_i A_i$
1	$\frac{1}{2} 8ab$	$\frac{2}{3} \cdot 2a$	$\frac{16}{3} a^2 b$
2	$-\frac{1}{2} \cdot 2ab$	$\frac{2}{3} a$	$-\frac{2}{3} a^2 b$
$\Sigma$	$3ab$	-	$\frac{14}{3} a^2 b$

$$\bar{x} \cdot A = \sum_{i=1}^2 \bar{x}_i A_i \quad \dots (*)$$

$$(*) \Rightarrow \bar{x} \cdot 3ab = \frac{14}{3} a^2 b ;$$

$$\bar{x} = \frac{14}{9} a$$



Anm.

Triangel:



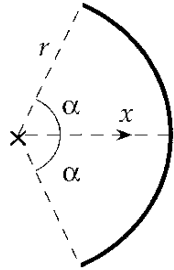
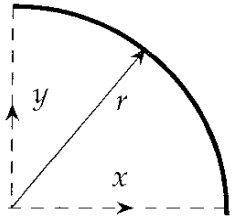
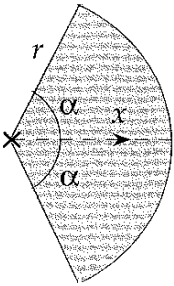
# TP FÖR OLIKA GIVNA GEOMETRIER

Boken, Appendix II :

## (b) Tyngdpunkter och tröghetsmoment hos homogena kroppar

Tabell AII.1

(Bokstaven  $m$  står för massan hos aktuell kropp)

Kropp	Tyngdpunkt	Tröghetsmoment
Tunn tråd, cirkelbåge 	$\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	
Tunn tråd, kvartscirkelbåge 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2$
Tunn skiva, cirkelsektor 	$\bar{x} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	