BEGREPP: *plan kroklinjig rörelse (kinematik)*

Du skall kunna hantera accelerationssambanden vid plan rörelse för en partikel och de dominerande specialfallen som är kaströrelse och cirkelrörelse. En viktig insikt vid cirkelrörelse är att även en riktningsändring under konstant fart ger upphov till acceleration. Vi måste nu ta hänsyn till hastighetens och accelerationens vektorkaraktär.

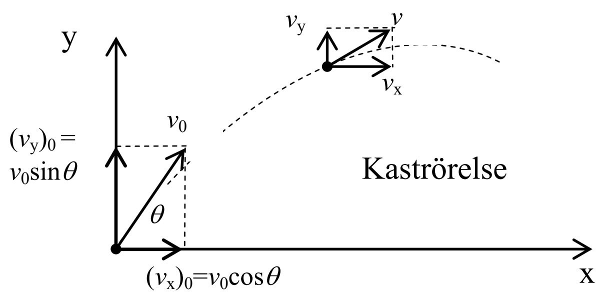
Introduktion: Du kör med bil i hög hastighet genom en kurva (i plan kroklinjig rörelse). Klarar du svängen eller glider du av vägen? Det avgörs av bilens fart och vägens krökning i planet på ett bestämt sätt som vi skall beskriva här. Bilens acceleration beror bl.a. av hastigheten och kurvans krökningsradie. Vid kroklinjig rörelse är det viktigt att förstå sambanden mellan hastighet, krökningsradie och acceleration.

Sammanhang: Vid användning av accelerationslagen i samband med plan rörelse behöver man kunna beskriva accelerationens komponenter i två olika riktningar.

Uppgift: Hur bestämmer man acceleration vid kroklinjig rörelse?

Metod: Rörelsen kan antingen beskrivas med vanliga x-y-koordinater eller sk naturliga koordinater (n-s- ~).

<u>x-y-koordinater; kaströrelse:</u>



x-y-koordinater är användbart vid kaströrelse. I figuren skjuts ett föremål iväg med en begynnelsehastighet v_0 med vinkeln θ till x-axeln.
Rörelsen är sammansatt av två delar; en i x- och en i y-riktningen. De två delarna kan behandlas var för sig som två rätlinjiga rörelser. För rörelsen i respektive riktning gäller de tidigare sambanden för rätlinjig rörelse.

Den enda acceleration som påverkar föremålet under rörelsen är tyngdaccelerationen g, som alltid verkar nedåt. Vi har alltså konstant acceleration a_y=-*g*. I x-riktningen är accelerationen noll och hastigheten v_x är hela tiden konstant.

Vid kaströrelse gäller därför:

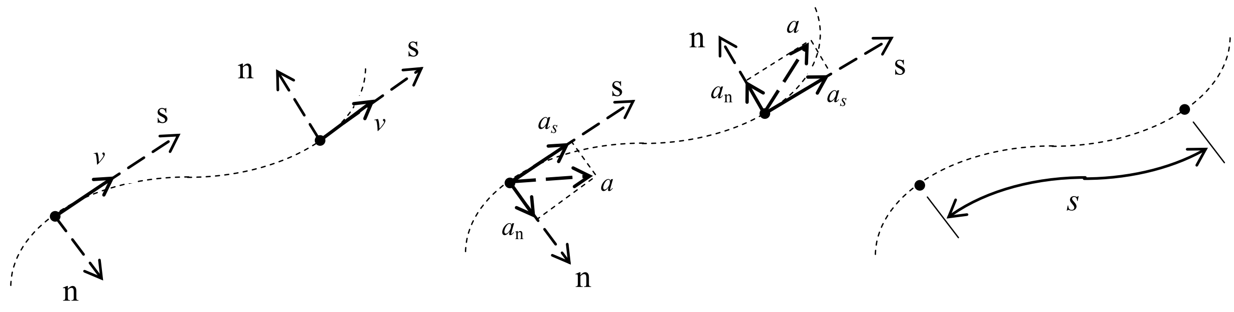
x-riktning: $v_x = (v_x)_0$ y-riktning: $v_y = (v_y)_0 - gt$

$$x = x_0 + (v_x)_0 t \qquad y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Eliminerar man tidsvariabeln får man rörelsebanan i form av en parabel, därav namnet kastparabel.

n-s-koordinater (normal och tangent):

Vid användning av ett sk naturligt koordinatsystem utgår man från partikelns hastighet som alltid är tangentiell till rörelsebanan. Hastigheten som vektor ger den ena riktningen (s- ~) i det naturliga koordinatsystemet. Den andra ges av en vinkelrät riktning - normalriktningen - som alltid pekar in mot rörelsebanans krökningscentrum. I motsats till x-y-koordinater då hela rörelsen beskrivs ifrån ett och samma fixa koordinatsystem har n-s-koordinaternas axlar olika riktning i olika punkter längs rörelsebanan.



Hastigheten v har alltså alltid samma riktning som tangenten under hela rörelsen och har därför ingen komposant i n-riktningen dvs $v_n = 0$. Accelerationen $\boldsymbol{a}$ däremot består av en tangentialacceleration a_s och en normalacceleration a_n. Rörelsen i tangentens riktning beskrivs på samma sätt som för rätlinjig rörelse men det tillkommer alltså en normalacceleration som alltid pekar inåt i en kurva, mot krökningscentrum för rörelsebanan i den aktuella punkten.

Accelerationskomponenterna:

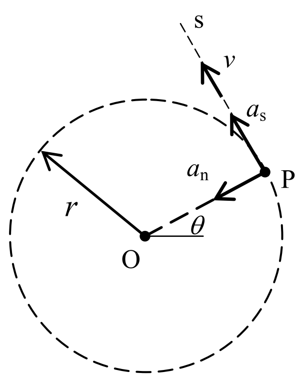
$$a_s = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

där ρ är krökningsradien för banan. Ett specialfall av kroklinjig rörelse är cirkelrörelse

$$v = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$$a_s = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$



där r = radien (m), v hastigheten i tangentens riktning (m/s), θ = vinkeländring (rad), ω = vinkelhastighet (rad/s)

Resultat: Genom sambanden ovan kan du beräkna läge, hastighet och acceleration vid allmän plan rörelse. De viktigaste specialfallen är kaströrelse och cirkelrörelse. Vid n-s-koordinater beskrivs rörelsen i tangentens riktning på samma sätt som för rätlinjig rörelse, men banans krökning gör att det även uppkommer en normalacceleration a_n.

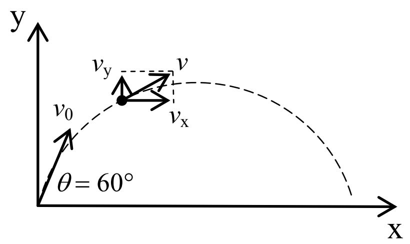
Exempel:

x-y-koordinater; kaströrelse:

En partikel skjuts iväg med utgångshastigheten $v_0 = 30$ m/s. Hur långt når partikeln där den landar?

Av formlerna för kaströrelse ovan är följande samband användbara

$$x = x_0 + (v_x)_0 t \qquad v_y = (v_y)_0 - gt$$



När partikeln befinner sig som högst är $v_y = 0$ dvs

$$0 = 30\sin 60^{\circ} - 9.81t \quad \Rightarrow \quad t = 2.65 \text{ s}$$

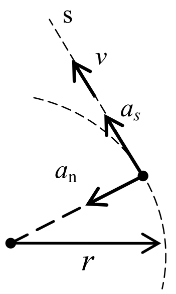
Partikeln landar igen efter 2.65 + 2.65 = 5.30 s,

eftersom det tar lika lång tid för partikeln att nå som högst som att åter landa igen.

$$x = 0 + 30\cos 30^{\circ} \cdot 5.30 = 79.5 \text{ m}$$

n-s-koordinater (normal och tangent):

En bil startar ifrån vila och kör längs en cirkulär bana med radien $r = 100$ m. Bilen ökar sin hastighet med konstant acceleration $a_s = 3$ m/s^2. Beräkna den totala accelerationen a för bilen efter 6 sekunder.



Hastighet efter t=6s: $v = a_s \cdot t$, $\Rightarrow$ $v = 18$ m/s

Normalaccelerationen beror av hastigheten: $a_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{18^2}{100} = 3.2$ m/s^2

Total acceleration: $a = \sqrt{a_s^{\ 2} + a_n^{\ 2}} = \sqrt{3^2 + 3.2^2} = 4.4$ m/s^2

Relaterade begrepp: Partikelkinematik vid plan rörelse utnyttjas i samband med användning av accelerationslagen i planet. Men även i samband med stelkroppsrörelse då rörelsen beskrivs som sammansatt av translation och rotation.