Mekanik

Per-Åke Jansson, Ragnar Grahn & Mikael Enelund

Ledningar

Författarnas ledningar till vissa uppgifter (3:e och 4:e upplagan).

1.1 Kraften som vektor, elementaroperationer
Ledningar

1.1 Se Illustrationsexempel 1.1.1.

1.3 Resultantens belopp bestäms som i Illustrationsexempel 1.1.1.
Den sökta vinkeln kan sedan bestämmas med hjälp av sinussatsen.

1.6 Använd parallellogramlagen (som i Illustrationsexempel 1.1.2).
Med hjälp av sinussatsen visas sedan att

$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin 20^\circ} = \frac{R}{\sin(160^\circ - \alpha)}$$

där $R = 1,5$ kN.
b) F_2 har minimum då $\sin(160^\circ - \alpha) = 1$.

1.2 Krafter i två dimensioner
Ledningar

1.10 Använd Varignons teorem, det vill säga dela upp kraften i komposanter, så att hävarmarna blir enkla. Här är det lämpligt att dela upp i en vertikal och en horisontell komposant. Beräkna därefter momentet för var och en av komposanterna, och addera dessa bidrag.

1.15 Se Illustrationsexempel 1.2.4.

1.16 Se ledning till ex 1.10.

1.20 Momentet för ett kraftpar är detsamma för *alla* axlar (visas i kapitel 1.2(d)). Välj därför den axel du tycker verkar enklast.

1.22 Dela först upp kraftena i x- och y-komposanter, och addera dem för att bestämma kraftsumman (se Illustrationsexempel 1.2.5). Observera att de rena momenten inte bidrar till $\Sigma \boldsymbol{F}$.
Beräkna därefter krafternas bidrag till momentsumman på samma sätt som i illustrationsexemplet. Här skall de rena momenten adderas till krafternas bidrag. Se också ekvationerna i anslutning till Figur 1.2.10.

1.23 Om det givna kraftsystemet skall ersättas med en enda kraft, måste denna vara lika med systemets kraftsumma. Den måste dessutom ha en verkningslinje, så att dess moment med avseende på någon axel är lika med det ursprungliga systemets momentsumma med avseende på samma axel.
Då får det givna kraftsystemet och det nya enklare systemet, som består av en enda kraft, samma kraftsumma och samma momentsumma med avseende på *alla axlar.*

1.31 Om tyngdkraftsystemets resultant går genom O, så är systemets momentetsumma $\Sigma M_{\mathrm{O}} = 0$. Teckna denna och lös ekvationen med avseende på α.

1.3 Krafter i tre dimensioner
Ledningar

1.36 Uttryck först tyngdkraften som en vektor $\boldsymbol{Q}$.
Bestäm sedan en enhetsvektor $\boldsymbol{e}_\lambda$ längs stången (se ekvation (1.3.2)). Komposanten längs stången är $Q_\lambda = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_\lambda$ (se Illustrationsexempel 1.3.2 och texten omedelbart före detta). Motsvarande vektor är $Q_\lambda \boldsymbol{e}_\lambda$.
Komposanten (vektorn) vinkelrätt mot stången fås som $\boldsymbol{Q} - Q_\lambda \boldsymbol{e}_\lambda$. Eftersom endast beloppet söks kan det vara enklare att använda parallellogramlagen. Tyngden Q är diagonal i en rektangel där $|Q_\lambda|$ är den ena sidan. Den andra sidan i rektangeln är det sökta beloppet av komposanten vinkelrätt mot stången.

1.37 Dela upp de båda krafterna i x-, y- och z-komposanter var för sig, och addera sedan dessa.
Kraften på 650 mN (P) delas först upp i två komposanter:
$P\cos 40°$ i x-riktningen och $P\sin 40°$ uppåt längs planets brantaste lutningslinje.
Den senare kan sedan delas upp i y- och z-komposanter.

1.38 a) Se Illustrationsexempel 1.3.1.
b) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{BC}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{EC}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{DC}}$, där $\boldsymbol{F}$ bestämdes i a).
Observera att de tre krafterna i högerledet inte alla är vinkelräta mot varandra.
Dock gäller att $\boldsymbol{F}_{\mathrm{BC}}$ och $\boldsymbol{F}_{\mathrm{DC}}$ är parallella med var sin koordinataxel.
Kraften $\boldsymbol{F}_{\mathrm{DC}}$ är dessutom den enda som har en x-komponent. Detta gör att denna enkelt kan bestämmas. Kraften $\boldsymbol{F}_{\mathrm{EC}}$ är den enda som har en z-komponent. Eftersom kraftens riktning är given, kan då hela kraften beräknas. Återstår att bestämma $\boldsymbol{F}_{\mathrm{EC}}$.

1.39 Använd definitionen på kraftmoment med avseende på en punkt, ekvation(1.3.6).

1.40 Använd sambandet $M_\lambda = \boldsymbol{M}_{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{e}_\lambda$. Följ instruktionerna vid figur 1.3.7.
För uppgift b) gäller det att inse att *alla* enhetsvektorer parallella med z-axeln är (0, 0, 1), det vill säga $\boldsymbol{e}_z$.

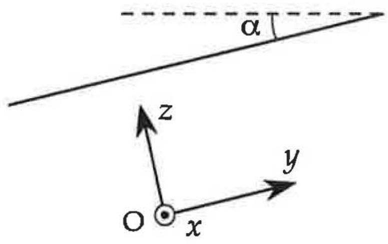
1.46 a) Kraften är

$$S = 17\frac{\overrightarrow{\mathrm{DA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|}\ \mathrm{kN}.$$

Använd sedan definitionen på kraftmoment med avseende på en punkt, ekvation(1.3.6).
b, c) Byt A mot B respektive C i ekvationen ovan.
d) Se ekvation (1.3.5).

1.47 a) Enklast beräknas momentet som kraften multiplicerad med hävarmen. Tänk på att axeln OA (med O och A i denna ordning) bör räknas positiv nedåt. b) Använd definitionen på kraftmoment med avseende på en punkt, ekvation(1.3.6).

1.50



Oyz ligger i väggplanet. O är mittpunkten på vänstra luckkanten.
Tyngdkraften $\boldsymbol{Q} = mg(0,\ -\sin\alpha,\ -\cos\alpha)$.
Tyngdpunktens lägesvektor från O är $\boldsymbol{r} = 0,5a(\sin\beta,\ \cos\beta,\ 0)$.
Momentet med avseende på origo är $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{Q}$.
Komponenten M_z efterfrågas.

1.56 Se figur 1.3.11 och texten omedelbart till höger om denna.

1.58 Momentet för ett kraftpar är detsamma med avseende på *alla momentpunkter*. Det betyder att kraftparet också har samma moment med avseende på *alla parallella axlar*.

1.62 Var skall en enstaka kraft som är lika med $\Sigma\boldsymbol{F}$ placeras för att dess moment med avseende på x- och y-axlarna skall vara desamma som för det givna kraftsystemet?

1.63 Se ledning till ex 1.62.

1.64 b) Använd ekvation (1.3.9) tillsammans med svaret i a).

1.65 a) Beräkna först $\boldsymbol{M}_{\mathrm{A}}$.
Bultaxeln är parallell med y-axeln. Beloppet av det mot bultaxeln vinkelräta momentet är då

$$\sqrt{M_{\mathrm{A}x}^2 + M_{\mathrm{A}z}^2}.$$

Motsvarande gäller i b).

2.2 Tvådimensionella jämviktsproblem
Ledningar

2.2 Sfären påverkas av tre krafter. Enligt resonemanget om *trekraftsystem* i kapitel 2.2(a) måste krafternas verkningslinjer då skära varandra i en punkt, närmare bestämt i sfärens medelpunkt. Detta villkor bestämmer linkraftens verkningslinje och därmed också vinkeln mellan linan och väggen.
En korrekt friläggning hittar du här.

2.3 b) Enligt avsnittet "Superposition av nollsystem" i kapitel 2.1(b) kommer de krafter som tillkommit jämfört med uppgift a) att bilda ett nollsystem. Detta kan utnyttjas för att bestämma tillskotten till de sökta krafterna, vilket leder till *något* enklare räkningar.

2.4 Frilägg skylten, och betrakta värsta fallet.
En korrekt friläggning hittar du här.

2.7 Om du är osäker på vilken typ av stödreaktioner som verkar i de olika fallen, ta en titt på figur 2.2.12 innan du frilägger balken.

2.8 Observera att krafterna från hydraulcylindrarna är riktade längs dessa (tvåkraftsystem).
Flakets tippningsvinkel kan bestämmas med hjälp av sinussatsen.
Resultat: 14,3°
Om ditt svar blir dubbelt så stort som svaret i facit, så beror det antagligen på att du beräknat den sammanlagda kraften från *båda* cylindrarna.

2.9 b) Frilägg systemet balk + trissa.
De två linkrafter som verkar på trissan är var för sig lika stora som tyngden av den hängande kroppen. I figur 1.2.11 visas hur man kan parallellförflytta en kraft om man samtidigt adderar ett rent moment. Detta kan tillämpas för att flytta linkrafterna till trissans mittpunkt. Man ser då att trissans radie, som inte är given, är utan betydelse.
Alternativt kan man välja att frilägga balken och trissan var för sig. Jämviktsekvationerna för trissan används då först för att bestämma krafterna som balken och trissan påverkar varandra med. Jämviktsekvationerna för balken ger sedan de sökta storheterna.
c) Den elegantaste lösningen fås (antagligen) om hela systemet friläggs, och den vänstra trissans mittpunkt väljs som momentpunkt.

2.10 a, b) Här kan det vara lämpligt att tänka på att nollsystem kan superponeras, se kapitel 2.1(b). Det betyder att den pålagda kraften F balanseras av *ändringarna* i fjäderkrafterna. Eventuella förspänningar av fjädrarna i jämviktsläget spelar därför ingen roll.
c) Observera att fjäderkrafterna är lika stora ($= F$) enligt Newton 3. Avståndet Δ är summan av fjäderförlängningarna.

2.16 Frilägg enligt samma princip som i Illustrationsexempel 2.2.10, och ställ upp jämviktsekvationer.

2.17 När hjulet nätt och jämnt rullar över kanten är kontaktkraften i den nedre kontaktpunkten noll. Kontaktkraften mellan hjulet och kanten är obekant till såväl belopp som riktning och måste därför beskrivas med två obekanta komposanter.

2.18 Om du är osäker på vilken typ av stödreaktioner som verkar i de olika fallen, ta en titt på figur 2.2.12 innan du frilägger.
Tänk på att ett rent moment inte påverkar kraftjämvikten.

2.21 b, c) Frilägg stången. Linkraften är lika med tyngden av den hängande kroppen. Dess hävarm med avseende på stångens upphängningspunkt är lika med höjden i den likbenta triangeln, det vill säga $L \cos(\varphi/2)$.
d) Eftersom friktionen kan försummas, är kontaktkraften från kraften vinkelrät mot stången.

2.22 Sidorna i triangeln ABC förhåller sig som 3:4:5. Då måste vinkeln vid A vara rät. Triangeln ACG är då rätvinklig och likbent (AC = AG), det vill säga de två spetsiga vinklarna är båda 45°. Vid jämvikt befinner sig stångens tyngdpunkt G rakt under C. Av detta följer att stången bildar 45° vinkel med lodlinjen.
Dela upp krafterna i komposanter parallellt med och vinkelrätt mot stången.

2.26 I några av deluppgifterna finns en stång som endast påverkas av krafter i sina ändpunkter, det vill säga av ett tvåkraftsystem. Är detta fallet har krafterna en gemensam verkningslinje, det vill säga riktningen är känd.

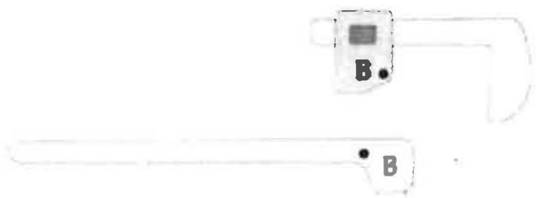
2.27 Frilägg först balken AB, och bestäm stödreaktionen i A.
Frilägg sedan hela systemet.

2.34 Kolven påverkar vevstaken ("högra stången") med en kraft som är riktad längs vevstaken (tvåkraftsystem). Den horisontella komposanten av denna är P (följer av horisontell kraftjämvikt för kolven). Då kan också den vertikala komposanten beräknas.
Kraftjämvikt för vevstaken bestämmer de krafter som vevstaken och vevslängen ("vänstra stången") påverkar varandra med.
Bestäm till sist M med hjälp av jämviktsvillkor för vevslängen.

2.36 Ledningen gäller fall a), men fall b) kan i princip lösas på motsvarande sätt. Börja med att frilägga de båda stängerna samt kolven var för sig. Ställ sedan upp jämviktsekvationer för var och en av kropparna.
En korrekt friläggning hittar du här.

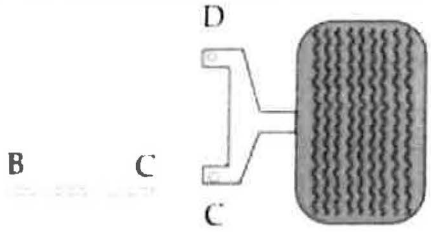
2.42 Jämför Illustrationsexempel 2.2.9 och dess "Kommentar" beträffande kraftriktningar. Ett liknande resonemang kan föras här.

2.43 Det kan vara lämpligt att frilägga tångens delar enligt figuren nedan.



Friktionskrafterna som verkar från röret på tångens båda delar kan inte vara lika stora, eftersom summan av de vertikala krafterna på hela tången då skulle vara skild från noll (närmare bestämt 30 N).

2.44 Frilägg hjulet och den horisontella länken BC var för sig:



Kraften i D måste vara riktad längs AD och är naturligtvis ingenting annat än den sökta reaktionskraften i A.

2.45 På ett obromsat hjul är friktionskraften från marken noll, eftersom totala momentet med avseende på hjulaxeln måste vara noll vid jämvikt.

2.46 Utnyttja att BC och DE endast påverkas av två krafter vardera.

2.48 Friläggning av BC: $\Sigma M_\mathrm{B} = 0$ ger den vertikala kraften i C.
Friläggning av AC: $\Sigma M_\mathrm{A} = 0$ ger den horisontella kraften.
Viktens tyngd behöver alltså ej beräknas.

2.49 Visa först att sammanbindningslinjen mellan klotens medelpunkter bildar vinkeln α med horisontalplanet, där α satisfierar ekvationen

$$\cos\alpha = \frac{2r - r_1 - r_2}{r_1 + r_2}.$$

Frilägg dels det övre klotet, dels röret. På gränsen till tippning är normalkraften från underlaget koncentrerad till en enda punkt.

2.50 a, b) Börja uppifrån!
Den översta tegelstenen kan maximalt skjutas ut så långt att dess tyngdpunkt ligger rakt över den näst översta stenens kant, det vill säga $x_1 = a$. Betrakta därefter de två översta stenarna som ett system. Deras gemensamma tyngdpunkt ligger i gränsfallet rakt över den tredje stenens kant och så vidare.
c) Eftersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$$

är divergent kan valvet göras oändligt brett.

2.60 Följ lösningsgången i Illustrationsexempel 2.2.12.

2.61 Problemet kan lösas med upprepad användning av snittmetoden, till exempel så här: Lägg först ett snitt genom BD, CE, CF och linan och betrakta delen till höger om snittet för att visa att kraften i BD är noll. Lägg därefter ett snitt genom BD, DE, EG, GH och linan (på två ställen) och betrakta den övre vänstra delen av fackverket.

2.62 Lägg ett snitt genom CD, BD och AB. Betrakta den övre delen av fackverket. Välj skärningspunkten E mellan förlängningarna av stängerna CD och AB som momentpunkt. Observera att trianglarna ABD och ADE är likformiga.

2.3 Tredimensionella jämviktsproblem
Ledningar

2.63 Ställ upp linkraftvektorn $Q\boldsymbol{e}_{\mathrm{BC}}$ där C är öglans position.
För stången, använd $\Sigma M_z = 0$ (endast linkraften och den sökta kraften i A bidrar till ΣM_z).
Linkraftens bidrag fås som z-komponenten av $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times Q\boldsymbol{e}_{\mathrm{BC}}$, där O är origo.
Hur skall kraften i A vara riktad för att den skall vara så liten som möjligt?

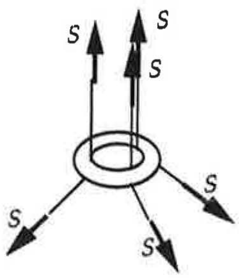
2.64 Låt B vara snörets fästpunkt på klotet och O klotets medelpunkt.
I detta fall ligger O, B och A på en rät linje vid jämvikt. - Varför?
En förklaring och lite mera hjälp hittar du här.

2.69 Inför som obekant nedre snördelarnas lutningsvinkel mot horisontalplanet.
Två friläggningar behövs, till exempel följande:

- systemet skiva + ring
- enbart skivan

Jämvikt för hela systemet bestämmer linkrafternas storlek. När denna är känd ger jämvikt för skivan den sökta vinkeln.
När denna är känd kan det sökta avståndet beräknas. Det kan då vara bra att känna till var tyngdpunkten för en triangel ligger (i det här fallet på avståndet $2h/3$ från vart och ett av skivans hörn; h är motsvarande höjd i triangeln).

Friläggning av ring är förstås också möjlig som alternativ. Egentligen betraktar man då systemet ring + de delar av snörena, som är i kontakt med ringen. Se figuren.



2.70 Teckna krafterna i stagen som vektorer enligt exemplet
$\boldsymbol{S}_{\mathrm{CE}} = S_{\mathrm{CE}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{CE}}$. (Om du behöver hjälp med detta, se Illustrationsexempel 1.3.2 där motsvarande beräkning görs.)
Det villkor som skall vara uppfyllt är $\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = 0$, där bidragen till momentsumman kommer från krafterna i stagen samt kraften i tråden AB. Detta leder till två skalära ekvationer (x- och y-komponenterna av vektorekvationen) med S_{CE} och S_{CD} som obekanta.
b) Utnyttja att $\Sigma \boldsymbol{F} = 0$.

2.71 Uttryck först krafterna i vajrarna som vektorer enligt exemplet
$\boldsymbol{S}_{\mathrm{CD}} = S_{\mathrm{CD}}\boldsymbol{e}_{\mathrm{CD}}$. (Om du behöver hjälp med detta, se Illustrationsexempel 1.3.2 där motsvarande beräkning görs.) Eftersom enhetsvektorerna är kända, har vi då uttryckt krafterna med så få obekanta som möjligt, nämligen en vardera.
Med origo i A, x-axeln i riktningen $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ och z-axeln rakt uppåt (se figuren i facit) har vi:

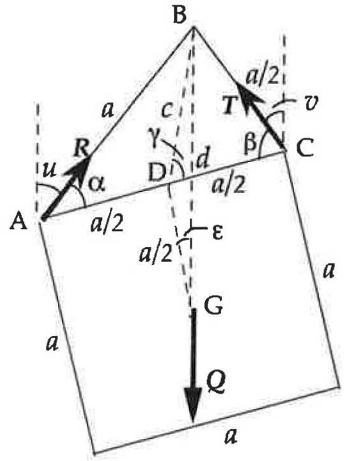
$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{CD}} = S_{\mathrm{CD}}\frac{(3,\,2,\,4)}{\sqrt{29}}, \quad \boldsymbol{S}_{\mathrm{BE}} = S_{\mathrm{BE}}\frac{(3,\,-1,\,2)}{\sqrt{14}}.$$

Frilägg skylten + stången. Stångens tyngd förutsätter vi vara försumbar.
Jämviktsekvationerna

$$\Sigma \boldsymbol{F} = 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0,$$

ger de fem sökta storheterna (krafterna i de två vajrarna samt tre komponenter av kraften i A).
Om du har räknat rätt skall ekvationen $\Sigma M_x = 0$ vara automatiskt satisfierad.

2.73 Figuren visar systemets symmetriplan.



Kraften $\boldsymbol{R}$ är resultanten av krafterna i de två lika trådarna (beloppet S vardera). Av symmetriskäl ligger denna i figurens plan. $\boldsymbol{T}$ är den tredje trådkraften. Tyngdpunkten G måste ligga rakt under upphängningspunkten B (annars är inte $\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{B}} = 0$).
D är mittpunkt på linjen AC.
För att kunna ställa upp jämviktsekvationer behöver vi vinklarna u och v.
Bestäm därför först vinklarna α och β i den likbenta triangeln ABC.
När vinkeln β är känd, kan vi bestämma vinkeln γ och sträckan BD ($= c$) ur triangeln CBD, som också är likbent.
Betrakta triangeln DBG ($|\mathrm{BG}| = d$):
Cosinussatsen ger $d = 1,0531a$.
Sinussatsen ger $\epsilon = 20,859°$.
Med $u = 90° - \alpha - \epsilon$ och $v = 90° - \beta + \epsilon$ ger jämviktsvillkoret $\boldsymbol{R} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{Q} = 0$:

$$\rightarrow \quad R \sin u - T \sin v = 0,$$
$$\uparrow \quad R \cos u + T \cos v - Q = 0.$$

Vi får
$T = 0,666\,Q$, $R = 0,5974\,Q$ och ur detta även S.

2.77 Utnyttja "Superposition av nollsystem", kapitel 2.1(b), slutet.

2.79 Båda systemen skall tillsammans med tyngdkraften bilda ett nollsystem.
De är då *ekvivalenta*. Det innebär att deras kraftsummor och momentsummor skall vara lika.

2.83 Linkraften måste ha ett sådant värde att jämviktsvillkoret $\Sigma M_{\mathrm{OD}} = 0$ är uppfyllt. Förutom linkraften är det bara tyngdkraften på den vertikala delen av plåten som bidrar till momentet.
Lägg in ett koordinatsystem, förslagsvis med origo i O och axlar längs OA och OE.
Uttryck linkraften som en vektor med komponenter i detta system och teckna bidragen till momentsumman $\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}$ från de två intressanta krafterna. Projicera sedan vektorn på riktningen OD.

Observera att reaktionskrafterna i lagren bidrar till $\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}$ men inte till ΣM_{OD}. Detsamma gäller tyngdkraften på den horisontella delen av plåten. Vi behöver därför inte beräkna *hela* momentsumman $\Sigma \boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}$, bara de delar som är av intresse för problemets lösning.

2.85 Frilägg hela systemet (lucka + axel + hjul).
Ställ upp jämviktsekvationer. Använd A eller C som momentpunkt.

Observera att z-komponenterna av reaktionskrafterna i lagren inte kan bestämmas var för sig. Ekvationen $\Sigma F_z = 0$ ger deras summa, men ingenting mer. Problemet är därför delvis statiskt obestämt. Jfr Illustrationsexempel 2.3.2, där ett liknande fall behandlas. I detta exempel söktes dock enbart x- och y-komponenterna.

2.88 Momentjämvikt med avseende på rotationsaxeln ger direkt att $F = 410$ N. Därmed är alla pålagda krafter på systemet axel + två hjul kända, och de sökta reaktionskrafterna i A och C kan bestämmas ur de återstående jämviktsekvationerna.

2.90 Kedjans undre, hängande del kan normalt betraktas som ospänd.
Det betyder att den sökta kraften P är kraften i kedjans övre del. Den skall tillsammans med kraften mg och de sökta krafterna i A och B bilda ett nollsystem.
Ställ upp jämviktsekvationer för systemet. Använd A eller B som momentpunkt.

De två krafterna i A och B kan i princip ha komposanter i axeln AB:s riktning. Dessa kan inte bestämmas var för sig (och efterfrågas därför inte). Det är dock rimligt att anta att de är relativt små i ett fall som detta. Problemet är dock delvis statiskt obestämt. – Jfr Illustrationsexempel 2.3.2, där ett liknande fall behandlas.

3.2 Masscentrum – tyngdpunkt. Beräkningsmetoder Ledningar

3.8 Den aktuella kroppen kan ses som skillnaden mellan två cirkulära koner. Ett liknande problem löses i Illustrationsexempel 3.2.3.

3.11 Se Illustrationsexempel 3.2.2.

3.18 Kroppen är sammansatt av en kvarts kon och ett rätvinkligt triangulärt prisma, vars tyngdpunkter har y-koordinaterna r/π respektive $r/3$.

3.20 Dela in i tunna cirkelskivor vinkelräta mot z-axeln. En godtycklig sådan skiva har radien

$$r = \sqrt{R^2 - z^2}$$

och tjockleken $\mathrm{d}z$. Skivans tyngdpunkt har z-koordinaten $z_C = z$. Man finner att elementets volym $\mathrm{d}V = \pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$. Segmentets volym

$$V = \int \mathrm{d}V = \cdots = \frac{\pi}{3}h(6R^2 - 3Rh - h^2)$$

och

$$\bar{z} = \frac{1}{V}\int z\mathrm{d}V = \ldots$$

3.21 Använd ekv (3.2.14)

a) Kan delas in i tunna cirkelskivor genom att lägga snitt parallellt med yz-planet.
En sådan skiva har radien $y = x^2/a$, och dess tyngdpunkt har x-koordinaten $x_C = x$.
Skivans tjocklek är dx och volymen är $dV = \pi y^2 dx$.
Kroppens volym blir $V = \pi a^3/5$.

b) Kan delas in i tunna cirkelskivor genom att lägga snitt parallellt med xz-planet. Löses därefter på samma sätt som a).
Kroppens volym blir $V = \pi a^3/2$.

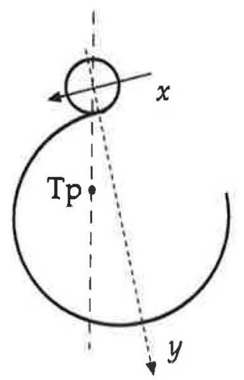
3.22 Kan delas in i tunna, horisontella halvcirkelskivor.
En sådan skivas radie är x och dess läge i höjdled är y. För dessa storheter gäller då sambanden $y = x^2/a$ och $dy = 2x dx/a$.
Skivans tjocklek är dy och dess volym $dV = (\pi x^2/2)dy$.
Skivans tyngdpunkt har koordinaterna $x_C = 4x/3\pi$ och $y_C = y = x^2/a$.
Kroppens volym blir $V = \pi a^3/4$ och statiska momenten

$$
\begin{aligned}
S_{yz} &= \int x_C dV = \cdots = \frac{4}{15}a^4, \\
S_{xz} &= \int y_C dV = \cdots = \frac{\pi}{6}a^4.
\end{aligned}
$$

3.24 Vid jämvikt måste kroppens tyngdpunkt ligga rakt under O.

3.25 Kroppens tyngdpunkt måste ligga rakt under P.
Det kan vara lämpligt att lägga in ett koordinatsystem så att axlarna är parallella med kubernas sidor.

3.26 Glatt kontakt innebär att den mindre cirkelns högsta punkt (horisontell tangent) sammanfaller med upphängningspunkten. På lodlinjen genom denna punkt finns kroppens tyngdpunkt. På samma lodlinje finns även den mindre cirkelns medelpunkt. Det kan vara praktiskt att lägga in ett koordinatsystem enligt nedanstående figur och beräkna tyngdpunktens koordinater i detta:



3.27 Cirkeltangenten i P är horisontell; kroppens tyngdpunkt ligger rakt under P. Förslag: Lägg in ett koordinatsystem med x-axeln längs AC och y-axeln genom B. Om tyngdpunkten skall ligga rakt under P, måste ett visst samband gälla mellan dess koordinater och vinkeln α.

4.1 Friktion
Ledningar

4.1 d) Observera att normalkraften $N \neq mg\cos 15°$.

4.7 a) Momentjämvikt med avseende på cylinderaxeln ger ett enkelt samband mellan linkraften och friktionskraften.

4.12 Frilägg rullen och visa att friktions- och normalkrafterna är parvis lika i båda kontaktpunkterna. Observera att kraften P verkar på papperet, inte på rullen.

4.14 Här är de geometriska villkoren sådana att eventuell glidning måste inträffa samtidigt i båda kontaktpunkterna. Om gränsfallet, då φ har sitt största möjliga värde, betraktas kan alltså i båda punkterna friktionskraften sättas lika med μN, där N är motsvarande normalkraft (olika N i de båda kontaktpunkterna!).

4.15 Här är de geometriska villkoren sådana att eventuell glidning måste inträffa samtidigt i båda kontaktpunkterna. Om gränsfallet, då h har sitt största möjliga värde, betraktas kan alltså i båda punkterna friktionskraften sättas lika med μN, där N är motsvarande normalkraft (olika N i de båda kontaktpunkterna!).

4.16 Här är de geometriska villkoren sådana att eventuell glidning måste inträffa samtidigt i båda kontaktpunkterna. Om gränsfallet, då kilen glider, betraktas kan alltså i båda punkterna friktionskraften sättas lika med μN, där N är motsvarande normalkraft (olika N i de båda kontaktpunkterna!).

4.17 Eftersom det finns ett litet glapp melllan lådan och gavlarna kommer det endast att bli kontakt mellan lådan och gavlarna i två av lådans hörn. Här är de geometriska villkoren sådana att eventuell glidning måste inträffa samtidigt i båda kontaktpunkterna. Om gränsfallet, då lådan glider, betraktas kan alltså i båda punkterna friktionskraften sättas lika med μN, där N är motsvarande normalkraft.

4.21 Frilägg kropparna var för sig, och tänk på att normalkraften i kontaktytan mellan kropparna är vinkelrät mot kontaktytan och inte vertikal. När kilen glider är friktionen fullt utbildad i båda kontaktytorna.

4.25 Här är det geometriskt möjligt att glidning sker enbart i den ena kontaktpunkten. Kvoterna F/N måste därför undersökas var för sig. Friktionskoefficienten måste vara större än det största av de två värdena.
Man finner direkt att $F_A = F_B$ (momentjämvikt med avseende på cylinderaxeln). Man visar sedan att $N_A < N_B$. Alltså är $F_B/N_B < F_A/N_A$. Risken för glidning är störst i A i båda fallen.

4.26 Här är det geometriskt möjligt att glidning sker enbart i den ena kontaktpunkten. Kvoterna F/N måste därför undersökas var för sig och jämföras med motsvarande friktionskoefficient.
Man finner att $F_B = F_C, N_B < N_C$, vilket leder till att $F_B/N_B > F_C/N_C$. Om friktionskoefficienterna hade varit lika stora, hade risken för glidning varit störst i B. Eftersom friktionskoefficienten i B är större än i C är det inte uppenbart var risken för glidning är störst.
Antag därför att glidning först inträffar i den ena punkten (välj själv), och bestäm motsvarande värde på h. Beräkna därefter F/N för den andra punkten och kontrollera att friktionsvillkoret ($F/N < \mu$) är uppfyllt. Om inte, så har du valt fel punkt. Pröva i så fall med den andra.

4.27 Tångens två delar är förenade endast i B (momentfritt).
Frilägg dels hela tången, dels en av de två delarna. Ställ upp jämviktsekvationer, och bestäm friktions- och normalkrafterna vid de båda kontaktpunkterna med röret. Beräkna därefter kvoterna F/N. Man finner att den sökta kvoten är $1/7 \approx 0,14$ till höger och $47/301 \approx 0,16$ till vänster.

4.28 Man kan visa att friktionskrafterna i de båda kontaktpunkterna vardera är lika med $F = Q(9\tan\alpha - 5)/12$, där Q betecknar tyngden av den mindre kroppen. Normalkrafterna är $N_1 = Q(7 + \cot\alpha)/4$ och $N_2 = Q(5 - \cot\alpha)/4$ till vänster respektive höger, det vill säga $|F/N_2| > |F/N_1|$. Villkoret $\mu > |F/N_2|$ leder till olikheterna

$$-\frac{1}{3} < \frac{3\tan\alpha(\tan\alpha - 5/9)}{5(\tan\alpha - 1/5)} < \frac{1}{3},$$

som har lösningarna

$$\tan\alpha < \tfrac{1}{9},$$
$$\tfrac{1}{3} < \tan\alpha < 1.$$

Till detta kommer villkoret $\tan\alpha > 1/5$ (annars lyfter den mindre kroppen från underlaget; normalkraften N_2 blir negativ).

4.29 Betrakta fallet då balen står på gränsen till tippning och inte glider.
Då angriper friktions- och normalkrafterna i balens framkant, samtidigt som friktionsvillkoret $F/N < \mu$ är uppfyllt.

4.30 Tyngdpunkten måste ligga till vänster om blockets nedre högra kant för att tippning inte skall inträffa. Detta leder till villkoret $\tan\beta < 0,75$. Friktionsvillkoret ger $\tan\beta < \mu$.

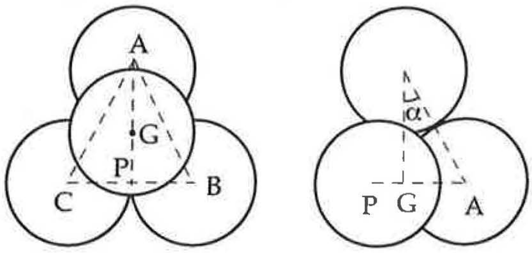
4.31 Tänk på att N i uttrycket F/N betecknar normalkraftens *belopp*.
I det här fallet har normalkraften dels en vertikal komposant på grund av tyngdkraften, dels en horisontell på grund av kraften P.

4.32 Friktionskraften har en komposant längs planets brantaste lutningslinje (fallinje) och en vinkelrätt däremot. Storheten F i uttrycket F/N betecknar friktionskraftens *belopp*.

4.33 Här kan det tänkas att glidning inträffar i den ena kontaktpunkten, men inte i den andra. Kvoterna F/N måste därför undersökas var för sig. Friktionskoefficienten måste vara större än det största av de två värdena.
De båda normalkrafterna är här lika stora. Friktionskraften i A kan visas vara störst, det vill säga $F_A/N_A > F_B/N_B$. Glidning börjar därför först i A då P tänks växa. Då är friktionen i B ännu inte fullt utbilldad.

4.35 Se ledning till ex 4.36. Använd motsvarande lösningsgång.

4.36 Vänstra figuren är sedd uppifrån, den högra från sidan.



Ur figurerna ovan fås: $AP = r\sqrt{3}$, $AG = \frac{2}{3}AP = \frac{2}{\sqrt{3}}r$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$
Översta kulan påverkas av tre normalkrafter (N_1) och tre friktionskrafter (F_1). Kraftjämvikt ger sambandet

$$3N_1\cos\alpha + 3F_1\sin\alpha - Q = 0,$$

där Q är kulans tyngd.
Var och en av de tre undre kulorna påverkas av en normalkraft N_2 och en friktionskraft F_2 från underlaget. Jämvikt för hela systemet ger:

$$3N_2 - 4Q = 0.$$

Genom att frilägga en av de undre kulorna och ställa upp jämviktsekvationer för denna fås ytterligare två samband, som leder till:

$$\frac{F_1}{N_1} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$
$$\frac{F_2}{N_2} = \frac{4\sin\alpha}{9(1+\cos\alpha)}.$$

4.41 Eftersom friktionskrafterna från trumman på repet strävar efter att rotera detta moturs är (förstås) kvinnans dragkraft S_1 mindre än linkraften S_2 på lådan;

$$S_1 = S_2 e^{-\mu\alpha},$$

där anliggningsvinkeln $\alpha = 375°$.

4.42 Beteckna (från vänster) linkrafterna S_1 och S där $S_1 = Se^{\mu\alpha}$ och $\alpha = 3\pi/2$. Två ekvationer behövs: momentjämvikt för hjulet och för armen.

4.43 Linans anliggningsvinkel α är $\pi/2$ för alla värden på φ.
Linkraften S_{CA} bestäms ur momentjämvikt med avseende på O för halvcylindern. På gränsen till glidning är $S_{\mathrm{CA}} = Q\mathrm{e}^{\mu\alpha}$.
Värsta fallet fås för läget $\varphi = \pi/2$, där tyngdkraftens moment med avseende på O är störst.

4.44 Sätt $M = 20$ kg.
Frilägg cylindern + den del av linan som ligger an mot den.
Friktionsvillkoret vid väggen ger

$$m > \frac{4-\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)}M = 31,0\,\mathrm{kg}.$$

Friktionsvillkoret för linan ger

$$m > \frac{2}{3\mathrm{e}^{0,2\pi}-4}M = 24,6\,\mathrm{kg}.$$

4.1 Friktion
Ledningar

4.1 d) Observera att normalkraften $N \neq mg\cos 15°$.

4.7 a) Momentjämvikt med avseende på cylinderaxeln ger ett enkelt samband mellan linkraften och friktionskraften.

4.12 Frilägg rullen och visa att friktions- och normalkrafterna är parvis lika i båda kontaktpunkterna. Observera att kraften P verkar på papperet, inte på rullen.

4.14 Här är de geometriska villkoren sådana att eventuell glidning måste inträffa samtidigt i båda kontaktpunkterna. Om gränsfallet, då φ har sitt största möjliga värde, betraktas kan alltså i båda punkterna friktionskraften sättas lika med μN, där N är motsvarande normalkraft (olika N i de båda kontaktpunkterna!).

4.15 Här är de geometriska villkoren sådana att eventuell glidning måste inträffa samtidigt i båda kontaktpunkterna. Om gränsfallet, då h har sitt största möjliga värde, betraktas kan alltså i båda punkterna friktionskraften sättas lika med μN, där N är motsvarande normalkraft (olika N i de båda kontaktpunkterna!).

4.16 Här är de geometriska villkoren sådana att eventuell glidning måste inträffa samtidigt i båda kontaktpunkterna. Om gränsfallet, då kilen glider, betraktas kan alltså i båda punkterna friktionskraften sättas lika med μN, där N är motsvarande normalkraft (olika N i de båda kontaktpunkterna!).

4.17 Eftersom det finns ett litet glapp melllan lådan och gavlarna kommer det endast att bli kontakt mellan lådan och gavlarna i två av lådans hörn. Här är de geometriska villkoren sådana att eventuell glidning måste inträffa samtidigt i båda kontaktpunkterna. Om gränsfallet, då lådan glider, betraktas kan alltså i båda punkterna friktionskraften sättas lika med μN, där N är motsvarande normalkraft.

4.21 Frilägg kropparna var för sig, och tänk på att normalkraften i kontaktytan mellan kropparna är vinkelrät mot kontaktytan och inte vertikal. När kilen glider är friktionen fullt utbildad i båda kontaktytorna.

4.25 Här är det geometriskt möjligt att glidning sker enbart i den ena kontaktpunkten. Kvoterna F/N måste därför undersökas var för sig. Friktionskoefficienten måste vara större än det största av de två värdena.
Man finner direkt att $F_A = F_B$ (momentjämvikt med avseende på cylinderaxeln). Man visar sedan att $N_A < N_B$. Alltså är $F_B/N_B < F_A/N_A$. Risken för glidning är störst i A i båda fallen.

4.26 Här är det geometriskt möjligt att glidning sker enbart i den ena kontaktpunkten. Kvoterna F/N måste därför undersökas var för sig och jämföras med motsvarande friktionskoefficient.
Man finner att $F_B = F_C, N_B < N_C$, vilket leder till att $F_B/N_B > F_C/N_C$. Om friktionskoefficienterna hade varit lika stora, hade risken för glidning varit störst i B. Eftersom friktionskoefficienten i B är större än i C är det inte uppenbart var risken för glidning är störst.
Antag därför att glidning först inträffar i den ena punkten (välj själv), och bestäm motsvarande värde på h. Beräkna därefter F/N för den andra punkten och kontrollera att friktionsvillkoret ($F/N < \mu$) är uppfyllt. Om inte, så har du valt fel punkt. Pröva i så fall med den andra.

4.27 Tångens två delar är förenade endast i B (momentfritt).
Frilägg dels hela tången, dels en av de två delarna. Ställ upp jämviktsekvationer, och bestäm friktions- och normalkrafterna vid de båda kontaktpunkterna med röret. Beräkna därefter kvoterna F/N. Man finner att den sökta kvoten är $1/7 \approx 0,14$ till höger och $47/301 \approx 0,16$ till vänster.

4.28 Man kan visa att friktionskrafterna i de båda kontaktpunkterna vardera är lika med $F = Q(9\tan\alpha - 5)/12$, där Q betecknar tyngden av den mindre kroppen. Normalkrafterna är $N_1 = Q(7 + \cot\alpha)/4$ och $N_2 = Q(5 - \cot\alpha)/4$ till vänster respektive höger, det vill säga $|F/N_2| > |F/N_1|$. Villkoret $\mu > |F/N_2|$ leder till olikheterna

$$-\frac{1}{3} < \frac{3\tan\alpha(\tan\alpha - 5/9)}{5(\tan\alpha - 1/5)} < \frac{1}{3},$$

som har lösningarna

$$\tan\alpha < \tfrac{1}{9},$$
$$\tfrac{1}{3} < \tan\alpha < 1.$$

Till detta kommer villkoret $\tan\alpha > 1/5$ (annars lyfter den mindre kroppen från underlaget; normalkraften N_2 blir negativ).

4.29 Betrakta fallet då balen står på gränsen till tippning och inte glider.
Då angriper friktions- och normalkrafterna i balens framkant, samtidigt som friktionsvillkoret $F/N < \mu$ är uppfyllt.

4.30 Tyngdpunkten måste ligga till vänster om blockets nedre högra kant för att tippning inte skall inträffa. Detta leder till villkoret $\tan\beta < 0,75$. Friktionsvillkoret ger $\tan\beta < \mu$.

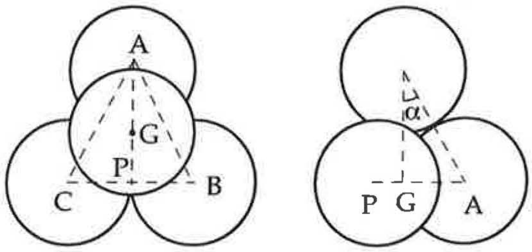
4.31 Tänk på att N i uttrycket F/N betecknar normalkraftens *belopp*.
I det här fallet har normalkraften dels en vertikal komposant på grund av tyngdkraften, dels en horisontell på grund av kraften P.

4.32 Friktionskraften har en komposant längs planets brantaste lutningslinje (fallinje) och en vinkelrätt däremot. Storheten F i uttrycket F/N betecknar friktionskraftens *belopp*.

4.33 Här kan det tänkas att glidning inträffar i den ena kontaktpunkten, men inte i den andra. Kvoterna F/N måste därför undersökas var för sig. Friktionskoefficienten måste vara större än det största av de två värdena.
De båda normalkrafterna är här lika stora. Friktionskraften i A kan visas vara störst, det vill säga $F_A/N_A > F_B/N_B$. Glidning börjar därför först i A då P tänks växa. Då är friktionen i B ännu inte fullt utbilldad.

4.35 Se ledning till ex 4.36. Använd motsvarande lösningsgång.

4.36 Vänstra figuren är sedd uppifrån, den högra från sidan.



Ur figurerna ovan fås: $\mathrm{AP} = r\sqrt{3}$, $\mathrm{AG} = \frac{2}{3}\mathrm{AP} = \frac{2}{\sqrt{3}}r$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Översta kulan påverkas av tre normalkrafter (N_1) och tre friktionskrafter (F_1). Kraftjämvikt ger sambandet

$$3N_1\cos\alpha + 3F_1\sin\alpha - Q = 0,$$

där Q är kulans tyngd.

Var och en av de tre undre kulorna påverkas av en normalkraft N_2 och en friktionskraft F_2 från underlaget. Jämvikt för hela systemet ger:

$$3N_2 - 4Q = 0.$$

Genom att frilägga en av de undre kulorna och ställa upp jämviktsekvationer för denna fås ytterligare två samband, som leder till:

$$\frac{F_1}{N_1} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$
$$\frac{F_2}{N_2} = \frac{4\sin\alpha}{9(1+\cos\alpha)}.$$

4.41 Eftersom friktionskrafterna från trumman på repet strävar efter att rotera detta moturs är (förstås) kvinnans dragkraft S_1 mindre än linkraften S_2 på lådan;

$$S_1 = S_2 e^{-\mu\alpha},$$

där anliggningsvinkeln $\alpha = 375°$.

4.42 Beteckna (från vänster) linkrafterna S_1 och S där $S_1 = Se^{\mu\alpha}$ och $\alpha = 3\pi/2$. Två ekvationer behövs: momentjämvikt för hjulet och för armen.

4.43 Linans anliggningsvinkel α är $\pi/2$ för alla värden på φ.
Linkraften S_{CA} bestäms ur momentjämvikt med avseende på O för halvcylindern. På gränsen till glidning är $S_{\mathrm{CA}} = Qe^{\mu\alpha}$.
Värsta fallet fås för läget $\varphi = \pi/2$, där tyngdkraftens moment med avseende på O är störst.

4.44 Sätt $M = 20$ kg.
Frilägg cylindern + den del av linan som ligger an mot den.
Friktionsvillkoret vid väggen ger

$$m > \frac{4-\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)}M = 31{,}0\,\mathrm{kg}.$$

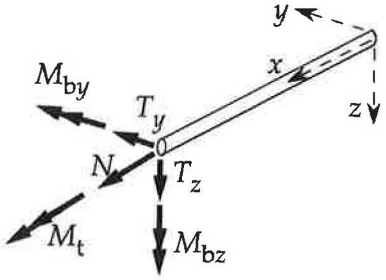
Friktionsvillkoret för linan ger

$$m > \frac{2}{3\mathrm{e}^{0{,}2\pi}-4}M = 24{,}6\,\mathrm{kg}.$$

4.2 Snittkrafter, balkar
Ledningar

Under "Svar" till detta avsnitt finns i många fall ganska utförliga illustrationer som kan fungera som ledning vid problemlösningen.

4.48 Observera innebörden av $T_y \ldots M_{bz}$. Se figur nedan.



På den återstående balkdelen till vänster om snittet, skall i snittpunkten verka motsvarande krafter och moment $T_y \ldots M_{bz}$, fast motsatt riktade enligt reaktionslagen.

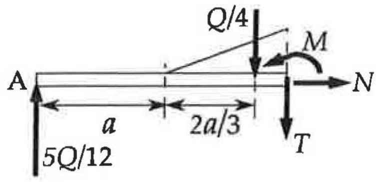
4.53 Att momentens *belopp* skall vara lika ger två möjligheter.

$$\left(\frac{P}{2} - \frac{Q}{2}\right)L = QL \quad \text{ger} \quad P = 3Q,$$
$$-\left(\frac{P}{2} - \frac{Q}{2}\right)L = QL \quad \text{ger} \quad P = -Q.$$

4.54 Kraften P får parallellförflyttas till "skarvpunkten", om ett rent moment adderas. Se figur 1.2.11.

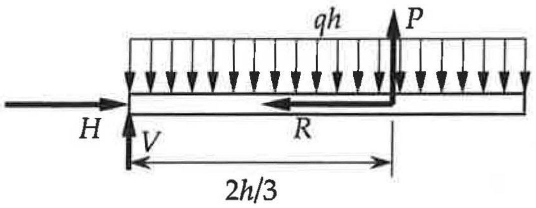
4.55 Frilägg först hela systemet balken + hjulen + hela linan och beräkna stödkrafterna i A och B.
De två linkrafterna som verkar på vart och ett av hjulen kan här "flyttas" till hjulets centrum (se figur 1.2.11), innan balken snittas.

4.57 e) Frilägg vänstra balkdelen:



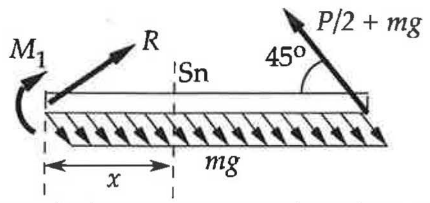
4.58 I samtliga fall är det lätt att beräkna stödreaktionerna genom att låta den utbredda lasten representeras av sin resultant. Resultat:
a) kraft Q uppåt, moment $QL/4$ medurs
b) vänster stöd $Q/2$ nedåt, linkraft $3Q/2$
c) $Q/2$ vid båda stöden
I c-uppgiften är lastintensiten $q = kx$, där $k = 2Q/9a^2$.

4.59 Beräkna först stödreaktionerna.
I figuren nedan är figuren vriden ett kvarts varv medurs.

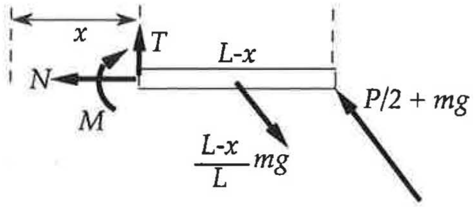


Här är R och P komposanter av kraften i staget.
Stödreaktioner: $V = qh/4$, $P = 3qh/4$.
För den givna frågeställningen behöver H och R inte beräknas.
Lägg sedan snitt under och ovanför stagets fästpunkt, och betrakta jämvikten för ena delen.

4.60 Eftersom underlaget är glatt, så är stödreaktionerna vertikala. Av symmetrin följer att de har beloppet $P/2 + mg$ vardera. Frilägg ena halvan, till exempel den högra (figuren roterad 45°):



Snitt (Sn) görs på avståndet x från vinkelspetsen. Se nedan.



Här har högra balkdelen (den del som ligger under snittet Sn) frilagts. Då slipper man blanda in det okända kraftsystemet (R, M_1) som verkar i vinkelspetsen. Observera standardriktningarna hos N, T och M i den undre friläggningsfiguren.

4.61 Stödkrafterna är $7Q/6$ och $11Q/6$.

4.63 Frilägg först hela kroppen för att bestämma stödkrafterna i A och D. Eftersom de lutande planen är glatta, är riktningarna kända. Frilägg sedan en av de vertikala delarna (till exempel) AB för att bestämma krafter och moment som AB och BC påverkar varandra med i B. Momentet blir $PL\tan\alpha$. Snitta till sist på vanligt sätt för att bestämma böjmomentet.

4.65 Frilägg först hela systemet för att beräkna stödreaktionerna i A och E. De blir vertikala med beloppen $P/2$. Frilägg sedan stången AC. $\Sigma M_C = 0$ ger stångkraften N_{BD}. $\Sigma \boldsymbol{F} = 0$ ger krafterna i C. Snitta till sist på vanligt sätt.

5.1 Partikelns kinematik - rätlinjig rörelse
Ledningar

5.4 Utgå från grafen för $v(t)$, och använd den metod som behandlas i avsnittet "Grafisk framställning".
Se även Illustrationsexempel 5.1.1, lösningsalternativ 2.

5.5 Formlerna i avsnittet "Konstant acceleration" kan tillämpas, dels för hissen, dels för stenen. Var noga med att hålla isär ekvationerna för de två kropparna; en uppsättning ekvationer/kropp.
Stenens acceleration är g, hissens noll. Tänk också på att begynnelsehastigheterna är olika.

5.6 Visa först att falltiden τ är lösning till ekvationen

$$\tau^2 + 2\frac{v}{g}\tau - \frac{2vT}{g} = 0,$$

där v är ljudhastigheten och $T = 10,0$ s.

5.7 Här är det bäst att inte blanda in tiden.
Att bilen bromsas likformigt betyder att accelerationen är konstant (< 0). Då får ekvation (5.1.6) användas.

5.9 Antag att A passerar B (som befinner sig i läget $s = 0$) då $t = 0$.
Då gäller:

$$s_A = v_A t, \quad s_B = \frac{1}{2}a_B(t - \tau)^2,$$

där $\tau = 10$ s.

5.10 Betrakta polisens rörelse relativt tåget.
Då han kör från täten mot slutet av tåget har han hastigheten 12 m/s relativt tåget. I den motsatta riktningen är relativhastigheten 8 m/s.

5.11 Visa först att sambandet mellan accelerationerna är $5a_A = 3a_B$.
Om A startar vid $t = 0$ gäller:

$$s_A = \frac{1}{2}a_A t^2, \quad s_B = \frac{1}{2}a_B(t-\tau)^2,$$

där $\tau = 2$ s.

5.13 Bestäm först hastigheten och accelerationen som funktioner av tiden.
Utnyttja sedan trigonometriska ettan för att eliminera tiden.

5.15 Använd metoden i illustrationsexempel 5.1.2a-b.

5.18 Se illustrationsexempel 5.1.3.

5.19 Den sökta medelhastigheten är $\bar{v} = L/\tau$,
där L är den sträcka partikeln har färdats innan hastigheten v_0 uppnåtts, och τ är den tid detta har tagit.
För att bestämma L görs omskrivningen

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \quad \Rightarrow \quad L = \cdots = \frac{v_0^2}{a_0}.$$

För att bestämma τ utnyttjas att

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \tau = \cdots = \frac{(\mathrm{e}-1)v_0}{a_0}.$$

5.23 Enligt texten kan vi skriva accelerationen som

$$a = -ks,$$

där k är en positiv konstant. Denna bestäms av att maximala retardationen $5g$ fås för $s = L$, där L är bromssträckan, det vill säga $k = 5g/L$.
Vidare gäller

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -ks,$$

som efter integration leder till svaret.

5.24 Här är accelerationen

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -a_0 - cs,$$

med begynnelsevillkoret $v = v_0$ för $s = 0$.
Lösning med hjälp av variabelseparation ger

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = -a_0 s - \frac{cs^2}{2}.$$

5.25 Utnyttja att accelerationen

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = k\frac{b-s}{b+s},$$

där k är en än så länge okänd proportionalitetskonstant.
Integrera först från $s = 0$ till $s = b$ för att bestämma k. Integrera därefter från $s = 0$ till $s = 2b$.

5.26 Försök bestämma ett uttryck för $v(s)$, och sök maximum för detta.
Om du behöver mera hjälp, titta här.

5.27 Allmänna lösningen till differentialekvationen

$$\ddot{s} + cs = a_0 \sin \Omega t$$

kan skrivas som

$$s = s_{\mathrm{h}} + s_{\mathrm{p}},$$

där

$$s_{\mathrm{h}} = C_1 \sin \sqrt{c}t + C_2 \cos \sqrt{c}t$$

är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation, och s_{p} är en partikulärlösning. Ansätt

$$s_{\mathrm{p}} = A \sin \Omega t.$$

Begynnelsevillkor: $s = 0$ och $\dot{s} = 0$ för $t = 0$.

5.2 Partikelns kinematik - kroklinjig rörelse
Ledningar

5.31 b) Visa först att $v_x = -\frac{3}{2}qy$ och $v_y = \frac{2}{3}qx$.
c) Utgå från svaret i a). Använd trigonometriska ettan för att eliminera t.
d) Bestäm först accelerationsvektorn som funktion av tiden.

5.32 c) Eftersom $x^2 + y^2 = a^2$ rör sig partikeln på en cylinderyta med z-axeln som symmetriaxel. Då ωt ökar med 2π går partikeln ett varv runt cylinderytan samtidigt som z-koordinaten ökar med $2\pi a$. Banan är därmed en spiral.

5.33 a) Utgå från sambandet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

5.47 Tangentialaccelerationen $a_s = \dot{v} = 1,2\ \mathrm{m/s^2}$ är konstant.
Gör omskrivningen

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

och integrera.

5.48 Att v ökas likformigt i tiden betyder att

$$a_s = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

är konstant.
Använd först detta samband tillsammans med de givna uppgifterna för att bestämma a_s. När väl a_s är känd kan sambandet utnyttjas en andra gång för att bestämma hastigheten efter 110 m.
Den totala accelerationen fås som $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_s^2 + a_\mathrm{n}^2}$, där $a_\mathrm{n} = v^2/r$.

5.49 Utgå från sambandet

$$|\boldsymbol{a}|^2 = a_s^2 + a_{\mathrm{n}}^2,$$

som ger

$$(0,7g)^2 = \left(v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2.$$

När den slutliga topphastigheten uppnåtts är $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = 0$. Detta bestämmer v_{max}. Efter viss omstuvning fås en separabel differentialekvation för v som funktion av s. Det kan vara lämpligt att göra variabelsubstitutionen $y = v^2$.

5.50 Utgå från sambandet

$$|\boldsymbol{a}|^2 = a_s^2 + a_{\mathrm{n}}^2,$$

som ger

$$(0,8g)^2 = \left(v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2.$$

Efter viss omstuvning (tänk på att $a_s < 0$ vid inbromsning) fås en separabel differentialekvation för v som funktion av s. Det kan vara lämpligt att göra variabelsubstitutionen $y = v^2$.

5.52 Likformig fartökning betyder att

$$a_s = \dot{v} = r\ddot{\varphi}$$

är konstant. Tillsammans med villkoret $\varphi = \pi/2$ för $t = 0,15$ s kan detta användas för att bestämma a_s.
Skriv därefter om a_s som

$$a_s = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s},$$

vilket efter integration ger

$$a_s s = \frac{v^2}{2}.$$

Ur detta kan v och därmed också normalaccelerationen a_{n} bestämmas för varje värde på $s = r\varphi$.
När accelerationsvektorns båda naturliga komponenter är kända, kan denna enkelt delas upp i cartesiska komponenter.

5.53 a) Utnyttja att

$$a_s = r\ddot{\varphi} = r\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi},$$

vilket ger en separabel differentialekvation för $\dot{\varphi}$ som funktion av φ.

6.1 Partikelns kinetik - Grundläggande lagar och begrepp
Ledningar

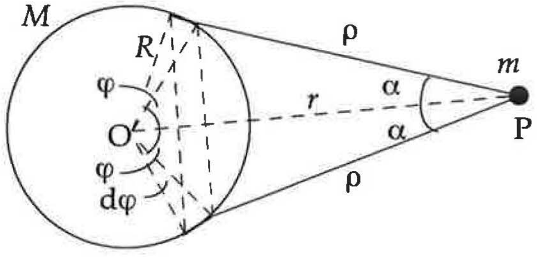
6.7 a) I den föreslagna referensramen:
A vilar i origo ($v_A = 0$, $s_A = 0$).

$$v_B = a_B t, \quad s_B = s_0 + \frac{a_B t^2}{2}.$$

där $a_B = 1,5\ \text{m/s}^2$, $s_0 = -30$ m.
Omkörningen är avslutad, då $s_B = 30$ m.

6.9 Utgå från Newtons lag 2
det vill säga $\boldsymbol{F}_{\text{absolut}} = m\boldsymbol{a}_{\text{absolut}}$.
Använd galileitransformationen, ekv. (6.1.4) för hastighet och acceleration.

6.10 b)



Bidraget till gravitationskraften på P från ett litet ytelement med arean dA är

$$f = G\frac{m\sigma \mathrm{d}A}{\rho^2},$$

där $\sigma = M/4\pi r^2$ är ytdensiteten, och $\rho = (r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi)^{1/2}$ är avståndet från ytelementet till P.
Betrakta sedan bidragen från element som bildar ett smalt cirkulärt band på sfärens yta. Alla sådana kraftbidrag f bildar samma vinkel α med linjen OP. Bandet har radien $R\sin\varphi$, bredden $R\mathrm{d}\varphi$ och arean $2\pi R\sin\varphi \cdot R\mathrm{d}\varphi$. Deras sammanlagda bidrag till gravitationskraften F blir

$$\mathrm{d}F = G\frac{m\sigma \cdot 2\pi R\sin\varphi \cdot R\mathrm{d}\varphi}{\rho^2}\cos\alpha. \tag{1}$$

Här är

$$\cos\alpha = \frac{r^2 + \rho^2 - R^2}{2r\rho}$$

enligt cosinussatsen.
Addera till sist bidragen från alla band genom att integrera ekvation (1) över hela sfären med φ som integrationsvariabel.
c) Sfären kan tänkas uppbyggt av ett stort antal tunna koncentriska skal. Bidraget från vart och ett av dessa bestämdes i b). Integration med skalradien som integrationsvariabel ger totala gravitationskraften från sfären.

6.11 Använd resultaten i 6.10 a) och c).

6.2 Partikelns kinetik - Tillämpningar
Ledningar

6.13 Det som känns som barnets tyngd är den uppåtriktade kraft F som mannen påverkar barnet med. Denna fås ur Newton 2 för barnet. Svar i kilogram måste här avse storheten m' i sambandet $F = m'g$.

6.15 Den normalkraft som verkar på gruvarbetarens fötter måste vara $N = m'g$, där m' är det värde som vågen visar.
Newton 2 tillämpad på gruvarbetaren ger sedan hennes (och hissens) acceleration. Denna kan sedan användas för att bestämma maxhastigheten.

6.18 Ekipagets acceleration är $a = g \sin \alpha$.
Tillämpa Newton 2 ($\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$) på *kulan*. Ställ upp två komponentekvationer.
Obekanta: snörkraften och den sökta vinkeln.

6.20 Sätt $v_0 = 18$ m/s och $t_1 = 1,2$ s.
Lägg en s-axel uppåt, och låt $t = 0$ svara mot den tidpunkt då den första kulan kastas.
För de båda kulornas s-koordinater gäller då:

$$s_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad s_2 = v_0(t - t_1) - \frac{1}{2} g (t - t_1)^2.$$

6.22 Beräkna först hastigheten och den tillryggalagda sträckan efter 4,6 s.
Resultat:

$$\frac{3gt_1}{2}, \quad \frac{7gt_1^2}{6},$$

där $t_1 = 4,6$ s.
Därefter verkar endast tyngdkraften.

6.23 a) Använd $F_r = ma_r$ där

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2}.$$

och

$$a_r = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}.$$

Detta ger en separabel differentialekvation för $v(r)$.
b) För att kroppen aldrig skall återvända får inte hastigheten bli noll för något värde på r, inte ens om $r \to \infty$.

6.24 Använd $F_r = ma_r$ där

$$F_r = -G\frac{Mm}{r^2}.$$

och

$$a_r = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}.$$

Detta ger en separabel differentialekvation för $v(r)$.
Vi vet att $v = 0$ för $r = 4R + R = 5R$ och vill beräkna v för $r = R$.

6.27 Så länge $F < \mu_\mathrm{s}N = \mu_\mathrm{s}mg$ rör sig inte kroppen.
Ur diagrammet kan man därför läsa av när kroppen sätts i rörelse.
Därefter är den resulterande kraften $F - \mu_\mathrm{k}N$, vilket bestämmer accelerationen som funktion av tiden. Observera att det matematiska uttrycket för accelerationen beror på om t är mindre än eller större är 2 s. Det kan kanske vara enklast att först beräkna hastigheten för $t = 2$ s.

6.32 Betrakta ett visst försök - vilket som helst. Beteckna den totalt tillryggalagda sträckan innan båten stannar med L.
Vid en viss tidpunkt har då vägkoordinaten värdet s samtidigt som hastigheten har värdet v. Enligt problemtexten är då den återstående sträckan innan båten stannar

$$a\ln\left(1 + \frac{v}{b}\right).$$

Alltså gäller att

$$L = s + a\ln\left(1 + \frac{v}{b}\right).$$

Derivering med avseende på tiden ger ett samband mellan hastigheten $\dot{s} = v$ och accelerationen $\dot{v}$, vilket tillsammans med Newton 2 bestämmer rörelsemotståndet.

6.36 Utnyttja uppgifterna om bromssträckan på horisontell väg till att bestämma friktionskoefficienten.
Resultat: $\mu = 0,80$.

6.42 Så länge friktionskraften på kroppen på lutande planet är mindre än $\mu_s N$, är systemet i jämvikt. Utnyttja detta för att bestämma värdet på lutningsvinkeln då systemet börjar röra sig. Resultat: $\alpha = 43,91°$.

6.44 Det är från början inte klart om A glider relativt B eller ej.
Om man börjar med antagandet att A följer med i B:s rörelse kan accelerationen hos kropparna beräknas (gör detta!). A:s acceleration orsakas av friktionskraften mellan kropparna, vilket betyder att man kan beräkna hur stor denna måste vara för att ge den beräknade gemensamma accelerationen (gör också detta!). Om det beräknade värdet är större än friktionskraftens största möjliga värde $(0,4m_A g)$, så betyder det att antagandet är felaktigt. Om du genomfört räkningarna korrekt bör du komma fram till att så är fallet.
A glider alltså relativt B; friktionen är fullt utbildad på båda ställena.
Med $F = 180$ N fås då:

$$F - 0,3(m_A + m_B)g - 0,4m_A g = m_B a_B.$$

Det bör tilläggas att om man slentrianmässigt utgår från att friktionen är fullt utbildad blir svaret visserligen korrekt, men detta får anses vara mera tur än skicklighet. För andra val av numeriska värden (till exempel ett mindre värde på F) kan metoden ge ett resultat som inte bara är felaktigt utan också orimligt ($a_A > a_B$). Om man då enbart beräknat B:s acceleration, lär man inte genomskåda detta.

6.45 Börja med att frilägga trailern och containern var för sig.
Se till att de inbördes friktionskraftena mellan kropparna (μmg vardera) är riktade åt rätt håll. De skall dels uppfylla Newton 3, dels sträva efter att motverka den glidning som sker mellan kropparna.
När trailern rör sig sträckan Δx framåt rör sig containern $2\Delta x$. Detta ger ett samband mellan accelerationerna.

6.49 Fall 1:
Visa först att accelerationen är $-\mu_s g$, där $\mu_s = 0,80$. Eftersom accelerationen är konstant, kan då bromssträckan enkelt beräknas till 39,8 m.
Fall 2:
Visa först att accelerationen är

$$a(v) = -0,75g\Big(1 - \frac{v}{\alpha}\Big).$$

Använd sedan sambandet

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

för att komma fram till en separabel differentialekvation för $v(s)$. Integrera denna med gränserna $v = (90/3,6)$ m/s för $s = 0$ och $v = 0$ för $s = L$, där L är bromssträckan. Svaret skall bli $L = 53,2$ m, om du räknar rätt.

6.51 Visa först att accelerationen är $g - cv$.
a-b) Använd metoden från illustrationsexempel 5.1.3a-b (lösningsalternativ 1).
För b) får man:

$$s = \frac{g}{c}t - \frac{g}{c^2}(1 - \mathrm{e}^{-ct}).$$

6.52 a) Newton 2 ger: $mg - mcv^2 = ma$,
a-b) Använd metoden från illustrationsexempel 5.1.3 (lösningsalternativ 1,a-b).
c) När gränshastigheten uppnåtts är $a = 0$, vilket direkt ger $mg - mcv_{\mathrm{g}}^2 = 0$.
Alternativt kan man låta $t \to \infty$ i svaret på a).
d) Använd metoden från illustrationsexempel 5.1.3 (lösningsalternativ 2, så långt som behövs).

6.53 Linjärt luftmotstånd innebär att den bromsande kraften kan skrivas som mcv.
Första informationen ger då att konstanten $c = g/v_{\mathrm{g}}$, där $v_{\mathrm{g}} = 27$ m/s.
För andra fallet ger Newton 2:

$$-mg - mcv = ma.$$

Använd metoden från illustrationsexempel 5.1.2a för att finna ett samband mellan v och t. Resultat:

$$\ln\frac{g + cv}{g + cv_0} = -ct,$$

där v_0 är begynnelsehastigheten.
När vändläget nås är $v = 0$.

6.54 Sätt $t = 0$ då 007 byter stil. För $t \geq 0$ gäller då:

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{U}} &= v_{\mathrm{gd}} t, & (1) \\ mg - mc_{\mathrm{s}} v_{\mathrm{B}} &= ma_{\mathrm{B}}. & (2) \end{aligned}$$

Index U och B står för de båda inblandade hopparna. Vidare är v_{gd} gränshastigheten i dykstil, och c_{s} är 007:s motståndskoefficient i svävstil. Denna hänger ihop med motsvarande gränshastighet via sambandet $mg - mc_{\mathrm{s}} v_{\mathrm{gs}} = 0$, där $v_{\mathrm{gs}} = v_{\mathrm{gd}}/2$.
Strategi: Använd ekv (2) för att bestämma 007:s läge s_{B} som funktion av tiden. Sätt sedan $s_{\mathrm{B}} = s_{\mathrm{U}}$ och lös ut tiden.
Begynnelsevillkor för ekv (2): $v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{gd}}$, $s_{\mathrm{B}} = s_{\mathrm{B0}} = 40$ m för $t = 0$.
Man finner att

$$s_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{gs}} \Big(t + \frac{v_{\mathrm{gs}}}{g} (1 - \mathrm{e}^{-gt/v_{\mathrm{gs}}}) \Big) + s_{\mathrm{B0}}.$$

Ekvationen $s_{\mathrm{B}} = s_{\mathrm{U}}$ måste lösas numeriskt med avseende på tiden.

6.55 I båda experimenten är $a = 0$.

$$mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha - dv^2 = 0.$$

Ger två ekvationer i d och μ.

6.56 Rörelseekvation: $-D = ma$.
a) Skriv om accelerationen som

$$a = v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s},$$

vilket ger en separabel differentialekvation för $v(s]$.
b) Använd definitionen på acceleration för att få en differentialekvation för $v(t)$. Vad blir t för $v = 0$?
c) Integrera ytterligare en gång för att få $s(t)$. Sätt in det värde på t som bestämdes i b).
Slutsats: Det är inte självklart att en idealiserad modell leder till ett realistiskt svar.

6.57 Rörelseekvation: $-(cv + bv^2) = ma$.

a) Skriv om accelerationen som

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s},$$

vilket ger en separabel differentialekvation.
Lösning:

$$s = \frac{m}{b}\ln\left(\frac{c + bv_0}{c + bv}\right).$$

b) Använd definitionen på acceleration för att få en differentialekvation för $v(t)$.
Lösning:

$$v = \frac{cv_0\mathrm{e}^{-ct/m}}{c + bv_0 - bv_0\mathrm{e}^{-ct/m}}.$$

Som synes blir aldrig $v = 0$.
Slutsats: Det är inte självklart att en idealiserad modell leder till ett realistiskt svar.

6.58 Om rörelsemotståndet skrivs på formen mcv^2 blir gränshastigheten

$$v_\mathrm{g} = \sqrt{\frac{g}{c}}.$$

Behandla rörelse uppåt och nedåt var för sig.
I båda fallen är det lämpligt att skriva accelerationen som

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}.$$

Bestäm först hur högt kroppen når innan den vänder.
Resultat:

$$h = \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{g + cv_0^2}{g}\right).$$

Beräkna sedan vilken hastighet v den får efter att ha fallit sträckan h.
Man får då följande samband:

$$h = \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{g}{g - cv^2}\right).$$

Sätt till sist in $c = g/v_\mathrm{g}^2$ och förenkla.

6.59 Beräkna först hur lång sträcka som tillryggaläggs innan skärmem lösgörs.
Resultat: 958,5 m

6.61 Observera att det är den *resulterande* kraften som är given.
Lägg därför inte till någon tyngdkraft, någon normalkraft eller någon annan kraft.

6.67 Lägg in ett koordinatsystem med två axlar i det lutande planet, till exempel med x-axeln horisontell och y-axeln nedåt utefter linjen med störst lutning.
Tyngdkraftens komposant i xy-planet blir då $g \sin 25°$ i y-riktningen. Någon annan kraft i xy-planet finns inte, eftersom friktion saknas.
Antag att pucken skjuts iväg från origo i x-riktningen då $t = 0$.

6.68 Se illustrationsexempel 6.2.8.

6.69 Se illustrationsexempel 6.2.8.

6.70 Följ metoden i illustrationsexempel 6.2.7 för att bestämma kulans koordinater som funktioner av tiden.
Om kulan stöts iväg i punkten (0; h), där $h = 2$ m, får man

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y &= h + v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned}$$

Stötlängden L fås som värdet av x då $y = 0$. Detta ger ekvationen

$$L^2 - 2\frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha \cdot L - 2h\frac{v_0^2}{g} \cos^2\alpha = 0. \tag{3}$$

Derivera med avseende på α. När $L = L_{\max}$ är

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\alpha} = 0$$

Detta ger $L_{\max} = 2h \tan\alpha$, som insatt i ekv (3) ger en ekvation för α. Denna har lösningen $\alpha = 42°$.

6.72 Lägg in ett koordinatsystem med origo i P, x-axeln utmed det lutande planet och y-axeln vinkelrätt mot detta.
Tyngdkraften blir då $(mg \sin 30°, -mg \cos 30°)$ och elevationsvinkeln $\alpha = 30° + \beta$.
Följ sedan metoden i illustrationsexempel 6.2.7 för att bestämma kastlängden som funktion av α.
b) Derivera kastlängden med avseende på α för att söka maximum.

6.73 Lägg in ett koordinatsystem med origo i startpunkten, x-axeln snett uppåt, parallell med det lutande planet och y-axeln snett nedåt, vinkelrätt mot planet. Tyngdkraften blir då $(-mg\sin 30°,\ mg\cos 30°)$.
Följ sedan metoden i illustrationsexempel 6.2.7 för att bestämma när föremålet landar, det vill säga när $y = 40$ m.
Sök till sist motsvarande värde på $|\boldsymbol{v}|$.

6.74 Lägg in ett lämpligt koordinatsystem.
Förslag: Lägg origo i A, y-axeln i bilens färdriktning och z-axeln uppåt.
Ställ upp snöbollens rörelseekvationer i de tre koordinatriktningarna och integrera för att få koordinaterna som funktioner av tiden.
Villkoret att snöbollen skall träffa sitt mål bestämmer tidpunkten för träff, samt snöbollens utgångshastighet. Utnyttja detta för att bestämma snöbollens hastighet när den träffar.

6.75 Omedelbart efter det att hopparen lämnat planet är hans hastighet densamma som planets, det vill säga v_g horisontellt.
Vad säger detta om luftmotståndets storlek och riktning?

6.77 Betrakta partikelns rörelse i en referensram med en *konstant* hastighet som är lika med bilens hastighet i utkastögonblicket. Detta koordinatsystem är ett inertialsystem och kan därmed betraktas och hanteras som "fixt". Därmed kommer bilen att hanteras som om den började accelerera från vila i det ögonblick då partikeln kastas iväg. För den aktuella frågeställningen är detta helt korrekt.
I det "fixa" systemet utför partikeln kaströrelse med given utgångsfart v_0 och elevationsvinkel α. Den *absoluta* kastlängden L är därmed i vanlig ordning given som en funktion av α. Se illustrationsexempel 6.2.7 för bestämning av denna.
I det här fallet är vi intresserade av var på flaket partikeln landar. Vi måste då subtrahera den sträcka bilen hunnit röra sig. Vi får då

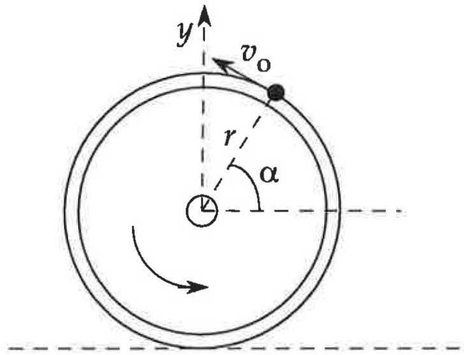
$$x = L - \frac{1}{2} \cdot 0,75 g t_1^2.$$

Här är t_1 den tid det tar innan partikeln landar. Denna bestäms som i illustrationsexempel 6.2.7 och beror på α. Man finner att

$$x = \frac{v_0^2}{g}\left(2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{3}{2}\sin^2\alpha\right).$$

Återstår att derivera x med avseende på α för att söka det värde på α som svarar mot max x.

6.78 Här är det lämpligt att räkna i en inertialram som följer med hjulets centrum. I denna referensram rör sig alla punkter på däckets periferi i tangentriktningen med farten v_0 lika med traktorns hastighet. Begynnelsetillståndet i kaströrelsen är det som figuren visar.



Inför som koordinat höjden y över hjulcentrum. I det ögonblick en sten lossnar i det godtyckliga läget α gäller för dess koordinat och hastighetskomponent:

$$y = r \sin \alpha, \quad \dot{y} = v_0 \cos \alpha.$$

Med detta som begynnelsevillkor i kaströrelsen fås

$$y(t) = r \sin \alpha + v_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Låt största värdet på $y(t)$ (för givet α) vara $h(\alpha)$. Sök maximum av funktionen $r + h(\alpha)$.

6.86 Observera att friktionskraften har två komposanter, en i normal- och en i tangentialriktningen. I friktionsvillkoret ingår kraftens belopp; $|\boldsymbol{F}| \leq \mu N$.

6.87 Eftersom tyngdkraften kan försummas, verkar endast en normal- och en friktionskraft.
Newton 2 ger:

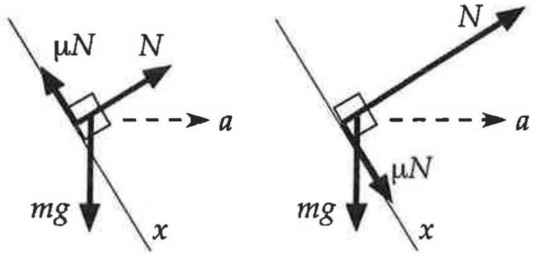
$$\begin{aligned} N &= m \frac{v^2}{R}, \\ -\mu N &= m \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

Eliminera N och bestäm $v(t]$ ur den differentialekvation som då fås. Integrera för att bestämma läget $s(t)$.
Resultat:

$$s = \frac{R}{\mu} \ln \left(1 + \frac{\mu v_0}{R} t \right).$$

6.89 Kulan rör sig i en horisontell cirkelbana med radien 90 mm. Den påverkas endast av tyngdkraften och en normalkraft från konen.

6.90 Kroppens acceleration är $a = x \sin 30° \omega^2$ i normalriktningen. Betrakta de två gränsfallen med friktionskraften riktad uppåt respektive nedåt.



6.93 Punkten på marken måste ligga på ekvatorn, eftersom satelliten måste röra sig i ett plan som innehåller jordens medelpunkt. Satelliten färdas ett varv i sin omloppsbana på samma tid som det tar för jorden att rotera ett varv (23 h 56 min).

6.95 Allmänt gäller att $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, där $\boldsymbol{F}$ är totala friktionskraften. Glidning startar när $|\boldsymbol{F}| = \mu N$.

6.96 Newton 2 i normal- och tangentialriktningarna ger:

$$\begin{aligned} N - mg\sin\varphi &= mR\dot{\varphi}^2, \\ mg\cos\varphi - \mu N &= mR\ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Eliminera N och utnyttja att

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}^2}{\mathrm{d}\varphi}.$$

Resultat:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\varphi}^2}{\mathrm{d}\varphi} + 2\mu\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{R}\cos\varphi - \frac{2\mu g}{R}\sin\varphi.$$

Detta är en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter för $y = \dot{\varphi}^2$ som funktion av φ.
Den allmänna lösningen kan skrivas som

$$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{p}},$$

där

$$y_{\mathrm{h}} = A\mathrm{e}^{-2\mu\varphi}$$

är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation, och y_{p} är en partikulärlösning. Ansätt

$$y_{\mathrm{p}} = B\cos\varphi + C\sin\varphi,$$

och bestäm konstanterna B och C.
Begynnelsevillkoret $\dot{\varphi} = 0$ för $\varphi = 0$ bestämmer A.

6.99 a) Exakt svar:

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\tan 15^\circ}},$$

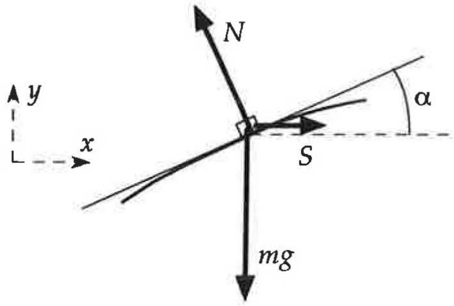
där R är radien i cirkelbanan.
Därmed är begynnelsevillkoren för kaströrelsen i b) kända.

6.100 Enligt illustrationsexempel 6.2.7c) är utgångshastigheten i kaströrelsen

$$v_0 = \sqrt{gL},$$

där L är kastlängden.
Detta ger kulans normalacceleration i cirkelbanan.

6.101 Frilägg först kroppen B.



Sätt

$$y = A \sin \pi x,$$

där $A = 0,05$.
Vi vet att $\dot{x} = v_0$ är konstant. Använd detta för att visa att

$$\ddot{y} = -A\pi^2 v_0^2 \sin \pi x.$$

Ställ upp Newtons andra lag i y-riktningen, och använd villkoret $N \geq 0$ för alla värden på x.

6.102 Betrakta gränsfallet då friktionen är på gränsen till fullt utbildad.
Då har $|\dot{v}|$ sitt största möjliga värde.
Börja med punkterna A och B.
Frilägg och ställ upp Newton 2 i x- och y-riktningarna:

$$\rightarrow \quad -\mu N = m\ddot{x},$$
$$\uparrow \quad N - mg = m\ddot{y}.$$

Eliminera N för att få ett samband mellan $\ddot{x}$ och $\ddot{y}$.
Derivera därefter kurvans ekvation två gånger med avseende på tiden.
Resultatet blir ett uttryck för $\ddot{y}$ som innehåller $\ddot{x}$, $\dot{x} = 60$ km/h, samt trigonometriska funktioner av x. I punkterna A och B har de senare kända värden. Om resultatet kombineras med sambandet mellan $\ddot{x}$ och $\ddot{y}$ som följde ur rörelseekvationerna, kan $\ddot{x} = \dot{v}$ bestämmas.
I punkten C har kurvan oändlig krökningsradie, vilket innebär att normalaccelerationen är noll. Problemet kan behandlas som om bilen befann sig på ett lutande plan.

6.3 Partikelns kinetik - Härledda lagar
Ledningar

6.108 Om du inte tidigare gått igenom illustrationsexempel 6.3.3, gör det först.
Låt φ vara vinkeln mellan radien till kroppen och vertikalen (det vill säga definierad som i illustrationsexemplet). Vinkeln vid A blir då $\varphi/2$.
a) Linans förlängning x är avståndet mellan kroppen och A:

$$x = 2R\cos\frac{\varphi}{2},$$

och linkraften är $F = kx$. Linkraftens komposant längs cirkelns tangent är

$$F_s = F\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Arbetet kan sedan beräknas på samma sätt som i illustrationsexemplet.
b) Här är

$$x = 2R\cos\frac{\varphi}{2} - R\sqrt{2}.$$

Dessutom är linkraften noll för $\varphi > \pi/2$, vilket ger en annan övre integrationsgräns vid beräkning av arbetet.

6.113 Använd lagen för den kinetiska energin, ekv (6.3.12).
Det är ingen poäng att dela upp rörelsen i två delar (glidning uppför lutande planet + kaströrelse).
Tyngdkraftens totala arbete är noll; endast friktionskraftens bidrag behöver beräknas.

6.114 Använd lagen för den kinetiska energin, ekv (6.3.12).
Två krafter bidrar till arbetet: tyngdkraften och luftmotståndet.
Observera att vi inte behöver veta något om hur luftmotståndet beror på hastigheten för att besvara frågan.

6.115 Med uppåt som positiv riktning gäller:

$$-mg - kv = ma,$$

där k är en obekant konstant.
Låt v_1 vara farten vid återkomsten.
Med omskrivningen

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

kan man visa att

$$\tau = \frac{m}{k} \ln \frac{mg + kv_0}{mg - kv_1}.$$

Med omskrivningen

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

kan man visa att

$$v_1 + v_0 = \frac{mg}{k} \ln \frac{mg + kv_0}{mg - kv_1}.$$

Man ser att

$$v_1 + v_0 = g\tau.$$

Lagen för den kinetiska energin, ekv (6.3.12), ger sedan svaret (oberoende av konstanten k).

6.116 a) Sett från en inertialram som följer med tåget ger lagen för kinetiska energin:

$$W = \Delta T = \frac{1}{2}mu^2 - 0.$$

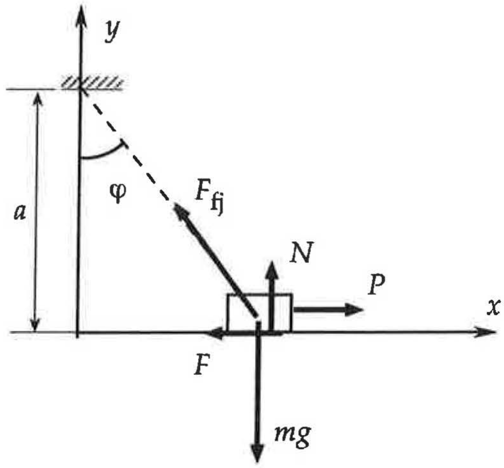
Här är W det arbete som uträttats av A vid utkastet.
b) Sett från en jordfast inertialram är det uträttade arbetet lika med ändringen i det kastade föremålets kinetiska energi:

$$W = \Delta T_{\text{abs}} = \frac{1}{2}m(v+u)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2 + muv.$$

Enligt a) står A för det första bidraget. Resten (muv) måste tåget ha svarat för. När A kastar iväg föremålet påverkar detta A med en bakåtriktad kraft enligt Newtons 3:e lag. A påverkar i sin tur tåget med en lika stor bakåtriktad kraft. Denna borde normalt innebära att tågets fart minskar. Enligt texten bibehåller dock tåget konstant fart. För att detta skall vara möjligt måste därför en viss energi tillföras (för ett ånglok enligt figuren i boken genom förbränning av kol). Denna tillförda energi är lika med muv och kan i slutändan sägas ha använts för att uträtta arbete på det kastade föremålet.

6.117 Med beteckningar enligt figuren nedan:

$$F_{\text{fj}} = mg\Big(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\Big), \quad N = mg\cos\varphi, \quad F = \mu N.$$



Minsta arbetet uträttas om $\Sigma F_x = 0$ i varje ögonblick.

$$\begin{aligned} W_{\min} &= \int_0^a P_{\min}\mathrm{d}x = \int_0^a (F_{\text{fj}}\sin\varphi + F)\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^{\pi/4} mg(\tan\varphi - \sin\varphi + \mu\cos\varphi)\frac{a}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \\ &= mga\Big[\frac{1}{2\cos^2\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi} + \mu\ln\Big|\tan\Big(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big|\Big]_0^{\pi/4} = \ldots \end{aligned}$$

6.122 Se illustrationsexempel 6.3.6.

6.123 a) Nyttig effekt: $P_{\text{ut}} = 0,7 \cdot 750$ kW.
Drivande kraften F är relaterad till den nyttiga effekten enligt sambandet

$$P_{\text{ut}} = Fv,$$

där $v = 40$ km/h.
Newton 2 ger

$$F - D = ma,$$

där D är rörelsemotståndet.
b) Konstant hastighet innebär att drivande kraften är lika med rörelsemotståndet.
c) Jämfört med b) tillkommer här en komposant av tyngdkraften som samverkar med rörelsemotståndet.

6.124 Effekten P (konstant) hänger ihop med den drivande kraften F via sambandet $P = Fv$, där v är hastigheten.
Vid konstant hastighet är drivande kraften lika med luftmotståndet, det vill säga $P = kv^3$.

6.127 För att inte vagnen skall tappa kontakten med skenorna måste gälla att normalkraften $N \geq 0$ överallt (störst risk att kontakten förloras högst upp).
Frilägg vagnen i värsta fallet, och beräkna motsvarande normalacceleration.
Använd energilagen för att bestämma v_0.

6.129 Att K tappar kontakten i B innebär att normalkraften är noll där.
Vilket villkor måste då normalaccelerationen uppfylla (enligt $F_n = ma_n$)?
Använd lagen för kinetiska energin, ekv (6.3.27), för att bestämma den sökta kraften.

6.130 Om kulan skall kunna fullborda ett helt varv måste gälla att trådkraften $S \geq 0$ överallt (störst risk att tråden slaknar i högsta läget).
Frilägg kulan för detta fall, och bestäm minsta tillåtna värdet på normalaccelerationen.
Använd energilagen, ekv (6.3.29), för att bestämma motsvarande värde på vinkeln θ.

6.132 a) Använd lagen för kinetiska energin på formen (6.3.27).
Ekvationen säger att friktionskraftens arbete vid glidningen utmed taket ger en ändring i den totala mekaniska energin $(T + V)$.
b) På samma sätt som i a) kan man beräkna kinetiska energin vid takkanten (och därmed farten, som blir 5,02 m/s). Detta ger begynnelsevillkor för kaströrelsen.
Se illustrationsexempel 6.2.7 för behandling av denna.

6.133 Snörkraften fås ur $\Sigma F_n = ma_n$, där $a_n = v^2/L$.
Tänk på att snörkraften inte är den enda kraften i normalriktningen.
Farten v bestäms med hjälp av energilagen.

6.134 a) Kroppen rör sig i en cirkelbana. När farten är maximal är tangentialaccelerationen $a_s = \dot{v} = 0$, det vill säga $\Sigma F_s = 0$. En komposant av tyngdkraften och friktionskraften $F = \mu N$ bidrar till ΣF_s.
b) Använd lagen för kinetiska energin på formen (6.3.27) för att bestämma farten. För att teckna friktionskraftens arbete, tänk på att den tillryggalagda sträckan är $L\varphi$.
c) Snörkraften fås ur $\Sigma F_n = ma_n$, där $a_n = v^2/L$.

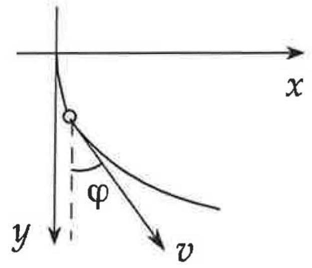
6.135 Med beteckningar enligt figuren nedan:

$$v_0 = v\cos\varphi, \quad \frac{dx}{dy} = \tan\varphi.$$

Använd energikonservering för att hitta ett samband mellan v och y. Om man eliminerar v och φ ur dessa tre ekvationer, finner man att

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{2gy}}{v_0},$$

som efter integration ger svaret.



6.138 Använd lagen för kinetiska energin på formen (6.3.27).

6.140 Tänk på att gummibandets bidrag till potentiella energin är noll, när avståndet AB är mindre än den ospända längden.

6.141 Energin konserveras.
Observera att begynnelsehastighetens riktning är oväsentlig i detta sammanhang.

6.143 Energin konserveras.
Flykthastigheten är den hastighet som är så stor att kroppen kan avlägsna sig oändligt långt bort.
Se också illustrationsexempel 6.3.9, speciellt kommentar 2.

6.144 Börja med att beräkna farten och banradien för den geostationära rymdstationen. Utnyttja $\Sigma F_\text{n} = ma_\text{n}$, samt det faktum att rymdstationen måste fullborda ett varv i banan på samma tid som jorden roterar ett varv kring sin axel, det vill säga på ett dygn.
Använd energilagen för att beräkna vilken *absolut* hastighet avfallsbehållaren måste ges för att avlägsna sig oändligt långt bort.
Den sökta relativa hastigheten är skillnaden mellan den absoluta hastigheten och rymdstationens hastighet.

6.145 a) Sambandet mellan kraften och potentiella energin ges av ekv (6.3.22).
c) Svaret fås genom numerisk lösning av ekvationen

$$\mathrm{e}^{-y} + y = \mathrm{e} - 1,$$

där $y = \alpha x$.

6.146 Potentiell energi:

$$V(x) = \frac{F_0 L}{2}\left(\frac{x^4}{L^4} - \frac{x^2}{L^2}\right).$$

6.147 Partikeln har störst fart, där kinetiska energin är som störst, vilket inträffar där potentiella energin har minimum.

6.150 Använd impulslagen, ekv (6.3.35).

6.151 Använd ekv (6.3.36) för
a) hela tåget,
b) dels loket, dels sista vagnen.

6.152 Använd ekv (6.3.36) för
1) hela tåget under de inledande 20 s,
2) loket och den återstående vagnen under nästa 20 s.

6.154 Eftersom friktionskraften byter riktning, då kroppen byter rörelseriktning, måste problemet lösas i två steg. Först beräknas hur lång tid det tar tills kroppen vänder; därefter beräknas hur lång tid det tar att uppnå hastigheten $2v$. Observera att problemet förutsätter att $\mu > \cot\alpha$; i annat fall stannar kroppen definitivt i det övre läget, när den bromsats upp av tyngdkraften och friktionskraften.

6.155 Använd impulslagen, ekv (6.3.35), och tänk på att integralens värde kan beräknas direkt ur diagrammet.

6.156 Partikeln börjar inte röra sig förrän P nått friktionskraftens maximala belopp ($\mu_s mg$). Börja med att visa att detta inträffar då $t = 1$ s.
Därefter är totala kraften lika med $P - \mu_k mg$.
Använd impulslagen, ekv (6.3.35), för $1 \text{ s} < t < 10$ s. Tänk på att värdet av $\int P dt$ kan beräknas direkt ur diagrammet.

6.157 Använd ekv (6.3.37) för x- och y-komponenterna var för sig.
Se också illustrationsexempel 6.3.13, där ett liknande endimensionellt problem behandlas.

6.158 Tre krafter verkar på kroppen; tyngdkraften, normalkraften från bordet och linkraften. Ingen av dessa har något moment med avseende på en vertikal axel genom hålet. Vad säger detta om rörelsemängdsmomentet?
c) Använd lagen för kinetiska energin, ekv (6.3.12).

6.159 Två krafter verkar på kroppen; tyngdkraften och linkraften.
Ingen av dessa har något moment med avseende på en vertikal axel genom hålet.
Vad säger detta om rörelsemängdsmomentet?
Använd dessutom Newton 2 för att visa att för var och en av de två cirkelbanorna gäller att

$$g \tan \alpha = \frac{v^2}{L \sin \alpha}.$$

Här är L linans fria längd (avståndet mellan kulan och O), och α är linans lutningsvinkel.

6.160 Två storheter konserveras; rörelsemängdsmomentet med avseende på jordens medelpunkt och energin (varför?).
Rörelsemängdsmomentet med avseende på en axel vinkelrätt mot banplanet beräknas enklast som i ekv (6.3.40).
Se också illustrationsexempel 6.3.14.

6.161 Börja med att bestämma rymdstationens hastighet. Resultat: 4597 m/s Farten vid uppskjutningen bestäms med hjälp av energikonservering. Elevationsvinkeln α bestäms så att rörelsemängdsmomentet konserveras.

6.163 Tre krafter verkar på kroppen; tyngdkraften, normalkraften från bordet och kraften från gummibandet. Ingen av dessa har något moment med avseende på en vertikal axel genom hålet. Vad säger detta om rörelsemängdsmomentet? Den enda kraft som uträttar arbete är kraften från gummibandet (fungerar som en fjäder). Vad säger detta om energin? I de punkter där avståndet till O har max eller min är lägesvektorn och hastighetsvektorn vinkelräta. Detta innebär att rörelsemängdsmomentet enligt ekv (6.3.40) fås som mrv, där r är avståndet till O. Villkoren ovan leder till en andragradsekvation i r^2. Rötterna svarar mot max- och minavstånden.

6.164 Tre krafter verkar på kroppen; tyngdkraften, normalkraften från bordet och kraften från gummibandet. Ingen av dessa har något moment med avseende på en vertikal axel genom hålet. Vad säger detta om rörelsemängdsmomentet? Den enda kraft som uträttar arbete är kraften från gummibandet (fungerar som en fjäder). Vad säger detta om energin? I de punkter där avståndet till O har max eller min är lägesvektorn och hastighetsvektorn vinkelräta. Detta innebär att rörelsemängdsmomentet enligt ekv (6.3.45) fås som mrv, där r är avståndet till O. Visa att villkoren ovan leder till ekvationen

$$\left(x^2 - \frac{m}{k}v_0^2 - L^2\right)(x+L)^2 + \frac{2mv_0^2L^2}{k} = 0.$$

Här är $m = 100$ g, $k = 50$ N/m, $v_0 = 4,0$ m/s, $L = 100$ m och x gummibandets *förlängning* i de sökta punkterna. Ekvationen löses lämpligen numeriskt. De sökta avstånden fås som $r = x + L$.

6.4 Svängningsrörelse
Ledningar

6.166 b) Krafterna i de båda fjädrarna är lika stora och lika med kraften på kroppen (inses genom att man frilägger kroppen och de två fjädrarna var för sig). Kroppens förflyttning är summan av fjädrarnas förlängningar.
d) En fjäder med en viss fjäderkonstant k kan ses som sammansatt av två "seriekopplade" hälften så långa fjädrar med fjäderkonstanten $2k$ vardera (Detta kan inses om man tänker på att en viss dragkraft bara ger hälften så stor förlängning för vardera fjäderhalvan som för hela. Detta svarar mot dubbelt så stor styvhet.) Vi har då samma problem som i c).

6.168 Observera likheten med ex 6.166b.
Balken och fjädern fungerar som två seriekopplade fjädrar.

6.169 Försök härleda en svängningsekvation på samma form som ekv (6.4.3), alternativt (6.4.5).
Inför koordinater som beskriver lägena för de svängande kropparna, och ställ upp Newton 2.
Det kan vara klokt att också frilägga trissan.
Mot en viss förskjutning av kroppen svarar en viss förändring av fjäderns längd, vilken i sin tur hänger ihop med fjäderkraften. I fall b) svarar exempelvis en förskjutning x nedåt av kroppen mot en fjäderförlängning $2x$.

6.170 För samtliga fall: Försök härleda en svängningsekvation på samma form som ekv (6.4.3), alternativt (6.4.5).
Inför koordinater som beskriver lägena för de svängande kropparna, och ställ upp Newton 2.
a) Det kan vara klokt att också frilägga trissan (som är lätt).
En förskjutning x åt vänster av kroppen mot att den vänstra fjädern trycks ihop sträckan x, medan den högra förlängs $2x$. Detta bestämmer fjäderkrafterna.
b) Här finns två kroppar som svänger med var sin rörelseekvation. Mellan deras koordinater råder ett kinematiskt samband (se kapitel 6.2(a)). Linkraften dyker upp i båda rörelseekvationerna och måste elimineras.
c) Här kan systemet förenklas genom att man använder resultaten från ex 6.166.
d) Det kan vara bra att också införa en koordinat som beskriver läget av den högra trissan och därmed också förändringen av den övre högra fjäderns längd. Krafterna i de två fjädrar som är förbundna med en lina måste vara lika stora (lika med linkraften). Eftersom de har samma fjäderkonstant måste de förlängas eller tryckas ihop lika mycket vid varje tidpunkt. Visa att om den hängande kroppen (och med den den vänstra trissan) förskjuts sträckan x nedåt och den högra trissan sträckan y nedåt, så förlängs var och en av dessa fjädrar sträckan $x - y$. Då kan alla fjäderkrafter uttryckas med hjälp av x och y.

6.171 Beskriv vagnens läge med en koordinat x åt höger.
Vid tiden t har loket flyttat sig sträckan

$$y = \frac{1}{2}at^2.$$

Då är linförlängningen $z = y - x$ och $\ddot{z} = a - \ddot{x}$.
Ställ upp Newton 2 för vagnen och gå över till z som obekant.
Begynnelsevillkor: $z = 0$ och $\dot{z} = 0$ för $t = 0$.
Lösning:

$$z = \frac{ma}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

6.172 b) När rörelsen startar är fjäderns förlängning $4mg/k$. Detta är nedre vändläget i A:s svängningsrörelse. Svängningscentrum ligger i A:s (nya) jämviktsläge. Detta bestämmer amplituden.
c) Använd energikonservering.

6.174 Värsta fallet: Största fjäderkraften är lika med maximal friktionskraft (μmg). Största fjäderkraften fås i B:s vändlägen. Sambandet med den sökta hastigheten fås med hjälp av energikonservering.

6.176 Betrakta rörelsen fram till att hastigheterna blir noll första gången. Frilägg kropparna var för sig, ställ upp Newton 2 och eliminera linkraften mellan de två ekvationerna.
Resultatet blir en svängningsekvation. Den sökta tiden är en kvarts period.

6.177 Frilägg dels hela systemet, dels den undre kroppen i ett godtyckligt läge. Ställ upp Newton 2 för de båda frilagda systemen. Limkraften F ingår som yttre kraft i den ena ekvationen.
Sätt $F = 1,5mg$, och lös ut fjäderförlängningen.

6.178 b)
Nivå 4: övre vändläget
Nivå 3: fjädern ospänd
Nivå 2: svängningscentrum (jämviktsläget)
Nivå 1: startläget
Så länge kroppen är i kontakt med fjädern (nivå 1-3) utför den harmonisk svängningsrörelse. Börja med att beräkna den tid (t_1) denna del av resan tar.
Resultat: $t_1 = 36,35$ ms.
Beräkna också hastigheten på nivå 3.
Mellan nivå 3 och 4: Kaströrelse (sträckan bestämd i a))
Beräkna tiden (t_2) för denna.
Resultat: $t_2 = 79,46$ ms.

6.180 Härled för vart och ett av fallen en differentialekvation av typen

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = \text{konstant}.$$

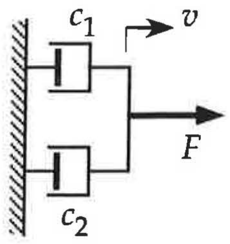
Här är x en koordinat som beskriver läget för kroppen (i c) en av kropparna). I fallet b) fås exempelvis

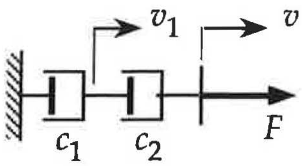
$$\frac{5}{2}m\ddot{x} + 2c\dot{x} + 2kx = \text{konstant}.$$

Enligt utredningen i avsnitt 6.4(b) är dämpningen kritisk för

$$\zeta = \frac{C}{2\sqrt{KM}} = 1.$$

6.182 a) b)





$F = c_1 v + c_2 v.$ $F = c_1 v_1 = c_2(v - v_1).$

För båda fallen: Skriv F på formen cv och läs av c.

6.186 Rörelsen vid svagt dämpad svängningsrörelse beskrivs av ekv (6.4.16).
Här är perioden $\tau_{\mathrm{d}} = 2\pi/\omega_{\mathrm{d}} = 2,23$ s och $\mathrm{e}^{\zeta\omega \cdot 10\tau_{\mathrm{d}}} = 278/130$.
Produkten $\zeta\omega$ kan beräknas ur detta.
Kombinera med $\omega_{\mathrm{d}} = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$, samt definitionerna av ω och ζ för att lösa ut k och c.

6.188 Observera att problemet kräver numerisk ekvationslösning.

6.189 Observera att problemet kräver numerisk ekvationslösning.

6.191 Utgå från ekv (6.4.18) och bestäm konstanterna A och B för de tre fallen.
Med $\omega = \sqrt{k/m}$ gäller då:

a) $x(t) = a_0(-\omega t + 1)\mathrm{e}^{-\omega t}.$

b) $x(t) = v_0 t\mathrm{e}^{-\omega t}.$

c) $x(t) = [(a_0\omega - v_0)t + a_0]\mathrm{e}^{-\omega t}.$

6.192 Börja med att ta en titt på illustrationsexempel 6.4.6 c).

6.193 Kroppens *absoluta* acceleration är $a + \ddot{x}$.
Dämpningskraften beror på den *relativa* hastigheten $\dot{x}$.
Kroppens rörelseekvation blir då

$$-kx - c\dot{x} = m(a + \ddot{x}).$$

6.194 Frilägg systemet för de båda fallen, och ställ upp motsvarande rörelseekvationer.
I första fallet kan villkoret att resonans uppstår användas för att bestämma det fjädrande underlagets styvhet (fjäderkonstant).
Amplituden för de påtvingade svängningarna i det andra fallet kan sedan bestämmas med den metod som beskrivs i avsnitt 6.4(c), Specialfallet "odämpad" svängare.

6.197 Visa först att den påtvingade svängningen är $x_\text{p} = C \sin \Omega t$,
där $C = -1,616$ mm.
Accelerationen är $\ddot{x}_\text{p}$.

6.199 Rörelseekvationen för kroppen blir

$$-F + mg = m\ddot{x},$$

där F är fjäderkraften, och x är en koordinat som beskriver kroppens absoluta läge.
Teckna fjäderkraften, som beror på x och på den exciterande rörelsen, och bestäm partikulärlösningen till rörelseekvationen. Resultat:

$$x_\text{p} = -\frac{d}{3} \sin 2\omega t \, (+\text{konstant}),$$

där $\omega^2 = k/m$.
Insättning i rörelseekvationen ger $|F|_\text{max}$.

6.202 Frilägg systemet, ställ upp en rörelseekvation och bestäm en partikulärlösning enligt metoden i avsnitt 6.4(c), Specialfallet "odämpad" svängare.
Amplituden i den påtvingade svängningen skall då bli

$$C = \frac{F_0}{k - m\Omega^2}.$$

Visa sedan att största fjäderkraften är

$$k\left(|C| + \frac{mg}{k}\right) = 3600\,\mathrm{N}.$$

Eftersom vi inte vet i förväg om k är $> m\Omega^2$ eller $< m\Omega^2$ får vi två olika fall för $|C|$. Detta leder till två olika möjliga k-värden.

6.203 Använd metoden i avsnitt 6.4(c), Specialfallet "odämpad" svängare, för att visa att maximala kraften är $k|C|$, där

$$C = \frac{\lambda F_0}{m\omega^2}.$$

Här är $\omega^2 = k/m$, och λ är förstoringsfaktorn.

6.204 a) I illustrationsexempel 6.4.9 löses ett *mycket* likartat problem.
b) Visa att funktionen

$$2\sin\omega t - \sin 2\omega t$$

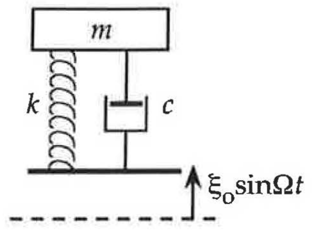
har maximum när $\cos\omega t = -0,5$.

6.205 Så länge kraften verkar är problemet identiskt med illustrationsexempel 6.4.9. Därefter övergår rörelsen i en fri odämpad svängning. Begynnelsevärdena för denna fås genom att sätta in $t = \pi/\omega$ i de uttryck för x och $\dot{x}$ som fås ur illustrationsexemplet.
Amplituden i den fria rörelsen bestäms enklast med hjälp av energikonservering.

6.206 Använd den metod som beskrivs i avsnitt 6.4(c), Harmonisk excitering. Amplituden och fasförskjutningen ges av ekv (6.4.24).

6.207 Lådans rörelse: $z = \xi_0 \sin\Omega t$.
Om x anger kroppen K:s läge relativt lådan, så är K:s absoluta acceleration $\ddot{z}+\ddot{x}$. Utnyttja detta för att härleda en differentialekvation för $x(t)$. Lös denna med hjälp av den metod som beskrivs i avsnitt 6.4(c), Harmonisk excitering.
Amplituden och fasförskjutningen ges av ekv (6.4.24).

6.209 Släpvagnen utför påtvingade vertikala svängningar. Vinkelfrekvensen är $\Omega = 2\pi v/\lambda$, där v är vagnens hastighet.
Ekvivalent modellsystem (beskriver rörelsen i en referensram som rör sig horisontellt med konstant hastighet v):



Visa att släpvagnens absoluta rörelse $x(t)$ satisfierar ekvationen

$$-c(\dot{x} - \dot{\xi}) - k(x - \xi) = m\ddot{x},$$

där $\xi = \xi_0 \sin \Omega t$ enligt figuren.
Detta kan omformas till

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \xi_0 \sqrt{k^2 + c^2\Omega^2} \sin(\Omega t + \beta), \tag{1}$$

där $\tan\beta = c\Omega/k$.
Jämför ekv (1) med ekv (6.4.22), och utnyttja uttrycket för amplituden C i ekv (6.4.24). Man får då

$$C = \cdots = \xi_0 \sqrt{\frac{1+u}{u + (1-u)^2}},$$

där $u = m\Omega^2/k$.
Visa att C har maximum för $u = \sqrt{3} - 1$, och bestäm motsvarande värde på v.

6.210 Använd den metod som beskrivs i avsnitt 6.4(c), Harmonisk excitering.
Amplituden C ges av ekv (6.4.24). För att bestämma det värde på m som ger maximum måste vi sätta in ζ och ω uttryckta i m, k och c.
Utnyttja att C har maximum, när uttrycket under rotmärket har minimum.

6.5 Relativ rörelse, fiktivkrafter
Ledningar

6.211 I hissens referensram "väger" vikterna i balansvågens viktsats inte vad som är stämplat på dem. Däremot är fjäderns styvhet oförändrad.

6.214 I hissens referensram verkar ett effektivt tyngdkraftfält enligt avsnitt (b), Ekvivalensen med gravitationsfält.
Enklast är nog att använda energilagen i detta.

6.215 Svängningstiden för en pendel bestämdes i kapitel 6.4(a), avsnittet "Den plana matematiska pendeln". Börja med att beräkna hur denna påverkas av att pendeln svänger i en accelererad referensram med ett annat effektivt gravitationsfält.
Den tid som uret visar är omvänt proportionellt mot svängningstiden (ju kortare svängningstiden är, desto fler svängningar utförs och desto mer rör sig urets visare).
Visa att detta leder till att accelerations- och retardationsfaserna (enligt uret) tagit ca 5,958 s under varje enkelresa (lika upp och ner). Uret har alltså saktat sig 0,042 s.

6.217 Räkna i vagnens referensram med en bakåtriktad fiktivkraft ma_{vagn}.

6.219 Bilen är i "jämvikt" i den accelererade referensramen.

6.223 Inför en fiktivkraft $m \cdot 0,5g$ bakåt på kroppen och betrakta rörelsen relativt den accelererade referensramen.
Det är antagligen enklast att använda lagen för den kinetiska energin.

6.224 Betrakta vagnens rörelse i dragfordonets referensram.
En bakåtriktad fiktivkraft ma måste då införas på vagnen.
Till denna kan vi införa en potentiell energi på samma sätt som för tyngdkraften.

6.226 Kroppen är i "jämvikt" relativt en referensram som följer med skivan i dess rotation. Om en fiktivkraft (centrifugalkraft) införs, kan problemet lösas som ett statikproblem.

6.228 Frilägg yttre delen med längden $L - x$.
Denna är i "jämvikt" i en medroterande referensram.Problemet kan lösas som ett jämviktsproblem om en fiktivkraft (centrifugalkraft) läggs till.

6.230 Jfr illustrationsexempel 6.5.4.

6.231 Vattnet är i "jämvikt" relativt den medroterande referensramen.
En "vattenpartikel" med massan m på avståndet r från rotationsaxeln påverkas av en tyngdkraft mg nedåt och en fiktivkraft $mr\omega^2$ radiellt utåt. Detta bestämmer den effektiva tyngdkraftriktningen på ett visst avstånd från rotationsaxeln. Vattenytan måste vara vinkelrät mot denna riktning.

6.232 Ljusen är i "jämvikt" relativt den medroterande referensramen.
En partikel med massan m på avståndet r från rotationsaxeln påverkas av en tyngdkraft mg nedåt och en fiktivkraft $mr\omega^2$ radiellt utåt. Detta bestämmer den effektiva tyngdkraftriktningen på ett visst avstånd från rotationsaxeln. En ljuslåga måste "peka" i denna riktning ("uppåt").

6.233 Grodden är i "jämvikt" relativt den medroterande referensramen.
En partikel med massan m på avståndet x från rotationsaxeln påverkas av en tyngdkraft mg nedåt och en fiktivkraft $mx\omega^2$ radiellt utåt. Detta bestämmer den effektiva tyngdkraftriktningen på ett visst avstånd från rotationsaxeln.
Den momentana tillväxten i groddens spets sker "rakt uppåt". Kurvans tangent i en viss punkt sammanfaller därför med den effektiva lodlinjen i punkten. Utnyttja detta för att ställa upp en differentialekvation som ger $y(x)$.

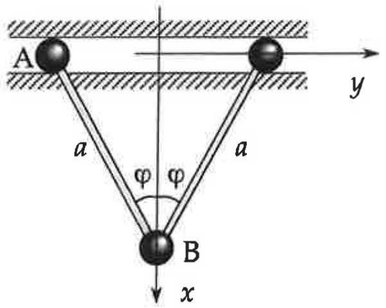
7.1 Lagen för tyngdpunktens rörelse
Ledningar

7.4 Visa först att tyngdpunkten har sin maximala fart, vilken är $v/\sqrt{3}$.

7.2 Arbete, energi
Ledningar

7.5 Använd Königs sats, ekv (7.2.2)!

7.7 Här behöver man uttrycka hastigheterna för A och C i v.
En möjlighet är att uttrycka kropparnas koordinater med hjälp av vinkeln φ och sedan derivera sambanden med avseende på tiden.
Med koordinatsystemet nedan gäller att $v = \dot{x}_B = \ldots$, och C:s hastighet är $\dot{y}_C = \ldots$. Genom att eliminera $\dot{\varphi}$ mellan ekvationerna får man C:s hastighet uttryckt i v och φ.



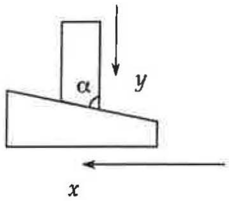
7.8 Här behöver man uttrycka hastigheten för B i v, det vill säga hitta ett samband mellan hastigheterna.
Förslag: Inför ett lämpligt valt koordinatsystem och teckna partiklarnas koordinater, som då måste bero på vinkeln φ. Derivering med avseende på tiden ger hastigheterna, som beror på φ och $\dot{\varphi}$. Om $\dot{\varphi}$ elimineras fås ett samband mellan hastigheterna.

7.10 Jfr illustrationsexempel 7.2.1.

7.12 Jfr illustrationsexempel 7.2.2.

7.18 Energin konserveras.
För att kunna utnyttja detta måste vi uttrycka kinetiska energin i C:s fart, vilket innebär att vi behöver uttrycka A:s och B:s hastigheter i C:s.
a, b) C:s horisontella hastighetskomposant måste i varje ögonblick vara hälften så stor som A:s hastighet. Den vertikala komposanten måste vara hälften av B:s. Varför?
I fall a) har A farten noll (vändläge). I fall b) har B farten noll. c) Lägg in ett koordinatsystem, så att A rör sig längs x-axeln och B längs y-axeln. Teckna partikarnas koordinater som funktioner av φ för ett godtyckligt läge, och derivera med avseende på tiden för att få hastigheterna. Sätt in det givna värdet på φ, och eliminera $\dot{\varphi}$ mellan sambanden.
Metoden kan också användas i a) och b), men är kanske onödigt generell.

7.20 a) Energin konserveras.



Vi behöver ett samband mellan kropparnas hastigheter $\dot{x}$ och $\dot{y}$ definierade som i figuren. Detta kan fås ur villkoret att kropparna måste ha lika stora hastighetskomposanter vinkelrätt mot kontaktytan.
Efter integration fås också ett samband mellan kropparnas förflyttningar x och y.
b) Derivera energisambandet från a) med avseende på tiden.

7.22 Visa först att $v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{A}} \cos\varphi$.
Utnyttja sedan att energin bevaras.

7.23 I ett godtyckligt läge gäller:

$$x_{\mathrm{B}}^2 + (2a)^2 + z_{\mathrm{A}}^2 = (3a)^2.$$

Derivering med avseende på tiden ger ett samband mellan kropparnas hastigheterna.

7.3 Rörelsemängd, rörelsemängdsmoment
Ledningar

7.26 Se "Svar till övningsexempel"!

7.27 Betrakta systemet "båt + matros".
Rörelsemängden är $p = Mv - mu.$, där v är båtens hastighet räknad positiv motsatt matrosens (och cyklistens) färdriktning.
Rörelsemängdslagen, ekv (7.3.4), ger

$$\Sigma F = \dot{p} \qquad -cv = M\dot{v} - m\dot{u} = M\dot{v},$$

eftersom u är konstant. Detta är en första ordningens differentialekvation för $v(t]$, som kräver ett begynnelsevillkor.
Innan matrosen börjar springa är $p = 0$. Under det mycket korta tidsintervall då matrosen sätter igång är rörelsemotståndets tillförda impuls försumbart liten. Därför är $p = 0$ även omedelbart efteråt, det vill säga för $t = 0$. Detta villkor bestämmer båtens begynnelsehastighet.
Differentialekvationen kan nu lösas med resultatet

$$v = \frac{M}{m} u e^{-ct/M}.$$

Ytterligare en integration ger svaret.

7.29 Betrakta systemet "A + båten".
Visa först att systemets tyngdpunktshastighet är konstant (lika med noll). Vad betyder det för den gemensamma tyngdpunktens läge?

7.36 Betrakta systemet bil + pråm.
Försumbart rörelsemotstånd ger att rörelsemängden bevaras.
Den energi som tillförs är Pt, där $P = 15$ kW och $t = 0,50$ s. Denna blir till kinetisk energi för systemet.

7.37 Betrakta systemet kula + låda.
Dela in förloppet i två delar:
1) Kulan tränger in i lådan och bromsas upp.
2) Kulan och lådan pendlar som en enda kropp.
Under vart och ett av förloppen finns det en storhet som konserveras. Vilka och varför?

7.38 Under själva explosionen bevaras rörelsemängden för hela systemet (A + B); jfr illustrationsexempel 7.3.2.
A:s hastighet omedelbart efter efter explosionen kan beräknas genom att man vet hur långt den glider, innan den stannar. Använd lagen för kinetiska energin ekv (6.3.12).

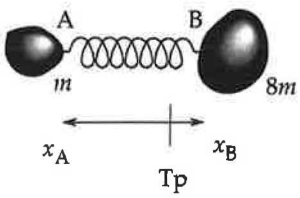
7.39 Två storheter konserveras för systemet "K + prisma". Vilka (och varför)?
K:s absoluta hastighet fås genom addition av prismats hastighet och K:s hastighet *relativt* prismat:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{K}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{prisma}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{relativ}},$$

där $\boldsymbol{v}_{\mathrm{prisma}}$ är horisontell, och $\boldsymbol{v}_{\mathrm{relativ}}$ är parallell med prismats sneda yta.

7.42 Två storheter konserveras för systemet (jfr basuppgift B7.9).
Tänk på att när fjädrarna är *maximalt* hoptryckta rör sig kropparna med samma hastighet.

7.43 Första fallet (A fix) används för att bestämma kvoten k/m.
I det andra fallet är systemets tyngdpunkt fix (följer ur ekv (7.3.2) och (7.3.8)).



Då gäller sambandet $x_{\mathrm{A}} = 8x_{\mathrm{B}}$, som efter derivering ger ett samband mellan hastigheterna.
Utnyttja att energin bevaras, och eliminera antingen x_{A} eller x_{B} och dess derivata. Derivering med avseende på tiden ger ekvationen för en harmonisk svängningsrörelse. Ur denna kan frekvensen läsas av.

7.45 a) Visa först att rörelsemängdsmomentet med avseende på rotationsaxeln är

$$L_O = \frac{14}{\sqrt{5}} m a v_B.$$

Tänk på att partiklarna roterar med samma *vinkelhastighet* i sina cirkelbanor. Använd därefter ekv (7.3.15) för att bestämma v_B vid tiden $t = \tau$. Tänk på att rotationsaxeln är vertikal, och att tyngdkrafterna därför inte bidrar till momentsumman.

b) Efter tiden τ har M upphört att verka. Då är L_O och därmed också vinkelhastigheten konstant. Använd lagen för tyngdpunktens rörelse för att bestämma den sökta kraften.

7.46 Två storheter bevaras för systemet.
Kinematiskt samband: B:s fart = —A:s radiella hastighetskomposant—

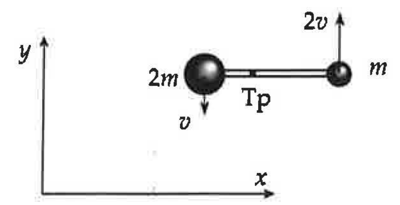
7.47 Två storheter bevaras för systemet:
1) energin,
2) rörelsemängdsmomentet med avseende på rotationsaxeln.

7.48 Två storheter bevaras för systemet:
1) energin,
2) rörelsemängdsmomentet med avseende på rotationsaxeln.

7.51 Inga yttre horisontella krafter verkar.
Enligt ekv (7.3.5) bevaras rörelsemängden och därmed tyngdpunktens hastighet. Visa att denna är

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{3} v_0 \boldsymbol{e}_x.$$

Enligt ekv (7.3.23) bevaras rörelsemängdsmomentkomposanten $\bar{L}_z$.
Kropparnas hastigheter relativt tyngdpunkten är riktade vinkelrätt mot stången enligt nedan:



Visa att villkoret $\bar{L}_z$ = konstant leder till att $v = v_0/3$.
De absoluta hastigheterna fås genom att addera tyngdpunktens hastighet och relativhastigheterna.

8.1 Kinematik – Rotation kring fix axel
Ledningar

8.2 a) Visa att $\omega = \omega_0 e^{-ct} > 0$. Detta innebär att hjulet aldrig stannar helt.
b) Använd omskrivningen

$$\dot{\omega} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

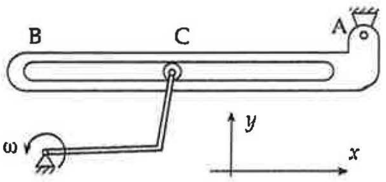
8.6 Alla punkter på remmen har samma fart v och samma tangentialacceleration $\dot{v}$ i varje ögonblick. Detta bestämmer vinkelhastigheten och vinkelaccelerationen för den lilla skivan.
För varje punkt på en viss skiva gäller att accelerationens belopp är proportionellt mot avståndet till rotationsaxeln, vilket innebär att den eller de punkter som har störst acceleration måste ligga på periferin på någon av skivorna.

8.7 Använd ekv (8.1.3-4).

8.8 Visa först att

$$|\bar{a}|^2 = c^2\omega_0^4(\sin^2(2\omega_0 t) - 2)^2.$$

8.9 Utnyttja att y-komponenterna av hastigheterna för kropparnas kontaktpunkter i C måste vara lika.



8.10 a) Utnyttja att hjulets hastighetskomposant vinkelrätt mot stången måste vara lika med hastigheten för motsvarande punkt på stången.
b) Utnyttja att

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}.$$

8.11 Punkten C:s hastighetskomposant i linans riktning är lika stor som A:s hastighet. Visa att detta leder till att

$$v_C \cos\frac{\varphi}{2} = v_A.$$

8.2 Kinematik – Allmän plan rörelse
Ledningar

8.15 Om vinkeln OBA betecknas φ, blir halvcirkelskivans vinkelhastighet $\dot{\varphi}$. Använd sinussatsen på triangeln OAB för att hitta ett samband mellan β och φ. Derivering med avseende på tiden ger ett samband mellan $\dot{\beta} = \omega$ och $\dot{\varphi}$.

8.16 Börja med att bestämma A:s hastighetsvektor.
Halvcirkelskivans rotationshastighetsvektor beräknades i ex 8.15. Tillämpa ekv (8.2.2) för att få övriga punkters hastigheter.

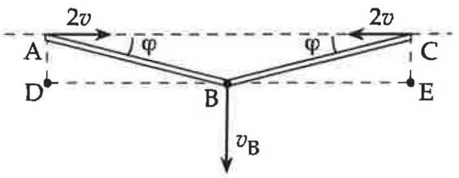
8.19 Börja med att bestämma hastigheten för B:s mittpunkt (du vet ju hur lång sträcka punkten har rört sig på 8 s).
Jämför sedan med figur 8.2.4 och tillhörande text.

8.20 Se figur 8.2.4 med tillhörande text.

8.22 Beräkna först B:s hastighet.
När denna är känd kan momentancentrum för BC bestämmas, och därefter i tur och ordning BC:s vinkelhastighet, C:s hastighet och CD:s vinkelhastighet.

8.23 Beräkna först B:s hastighet.
Visa sedan att momentancentrum för stången BC ligger rakt ovanför punkten C, på avståndet 400 mm från C.

8.24 Det kan vara lämpligt att under räkningarnas gång betrakta systemet från den referensram som rör sig med hastigheten v åt vänster. I den ramen är skeendet symmetriskt enligt figuren. Punkterna D och E är momentancentra för stängerna AB och CB.



Slutligen transformeras tillbaka till den ursprungliga referensramen. Eftersom vinkeln φ är densamma i båda referensramarna blir vinkelhastigheterna oförändrade vid transformationen.

8.25 Hjulets rörelse kan beskrivas som en rullning på en lodrät linje genom D. Figur 8.2.4 kan kanske vara till hjälp.

8.26 Gruskornets begynnelsehastighet i kaströrelsen är densamma som hastigheten för motsvarande punkt på hjulet. Visa att denna har komposanterna v uppåt, v framåt med $v = 30$ km/h. Se också figur 8.2.4.
För behandling av kaströrelsen, gå tillbaka till kapitel 6.2(b), speciellt illustrationsexempel 6.2.7.

8.30 b) Visa först att vinkelhastigheten är

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{v\sqrt{3}}{b}\boldsymbol{e}_z.$$

8.32 Visa först att momentancentrum ligger på linjen CD:s förlängning, 5 m till höger om D, samt att detta ger vinkelhastigheten $\omega = 0,03$ rad/s medurs. Ekv (8.2.2) ger därefter hastighetsvektorerna för övriga punkter.

8.33 Visa först att vinkelhastigheten är $2u/b\sqrt{3}$, där b är kvadratens kantlängd.

8.37 Bygger på ex 8.15, som först bör lösas.
Om vinkeln OBA betecknas φ, ger sinussatsen ett samband mellan φ och *beta*. Derivera två gånger med avseende på tiden för att få samband mellan dels vinkelhastigheter, dels vinkelaccelerationer.

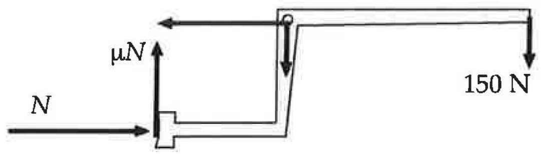
8.39 Utgå från hjulets mittpunkt D, som har en känd acceleration (cirkelrörelse med konstant fart v).
Betrakta figurerna 8.2.4 och 8.2.13, där punkten A motsvarar exemplets D. Den förra figuren hjälper oss att bestämma hjulets vinkelhastighet ω och därmed också den relativa vinkelaccelerationen $a_{\mathrm{P/A,n}} = r\omega^2$ i figur 8.4.13. Eftersom v i detta fall är konstant, är också ω konstant. Detta leder till att den relativa tangentialaccelerationen $a_{\mathrm{P/A},s} = r\dot{\omega}$ blir noll.
Återstår att addera accelerationsbidragen motsvarande a_{A} och $a_{\mathrm{P/A,n}}$ i figur 8.4.13 vektoriellt.
d) För vilken punkt på hjulets periferi har den relativa normalaccelerationen samma riktning som D:s acceleration?

8.41 Bygger på ex 8.21. Kan vara lämpligt att först lösa detta.
Visa att det lilla hjulets vinkelhastighet är 5ω och vinkelaccelerationen 5α.
Använd ekv (8.2.9) för att beräkna de sökta accelerationerna.

9.1 Kinetik – Rotation kring fix axel
Ledningar

9.5 Frilägg hjulet och armen var för sig.
Normalkraften kan beräknas med hjälp av jämvikt för armen.

9.6 Frilägg armen, och beräkna normalkraften.
a)



b) Hur ändras friläggningen om hjulet roterar i motsatt riktning?

9.7 Normalkrafterna vid de två kontaktställena är inte lika.

Till vänster: $$N_1 = \frac{mg}{\sqrt{2}}\frac{1-\mu}{1+\mu^2}$$

Till höger: $$N_2 = \frac{mg}{\sqrt{2}}\frac{1+\mu}{1+\mu^2}$$

9.8 Stången roterar kring den fixa axeln O.
Frilägg stången, och ställ upp grundekvationerna, ekv (9.1.1) + (9.1.3).
I startögonblicket är ω och därmed också tyngdpunktens normalacceleration noll.

9.10 b-c) Frilägg hjulet och den hängande kroppen var för sig.
Inför linkraften som obekant. Observera att denna *inte* är lika med den hängande kroppens tyngd (kroppen är ju inte i jämvikt).
d) Se b-c) ovan för var och en av kropparna.

9.11 Visa först att vinkelhastigheten då linan just lindats av är $\sqrt{12\pi M/mr^2}$.

9.12 Frilägg valsarna var för sig, och ställ upp lagen för rörelsemängdsmomentet, ekv (9.1.3), för var och en av dem. Tänk på Newtons 3:e lag!
Observera att det inte finns något som säger att vinkelaccelerationerna för några av valsarna är lika under inslirningsförloppet.
Visa att summan av vinkelaccelerationerna är noll. Vad säger detta om summan av vinkelhastigheterna?

9.13 Antag att linan inte glider, och beräkna linkrafterna på ömse sidor.
Resultat: $32mg/11$ till höger, $14mg/11$ åt vänster
Om linan inte glider, måste sambandet (4.1.6) vara uppfyllt. Detta bestämmer minsta möjliga värde på friktionskoefficienten.

9.14 Den fysiska pendeln behandlas i illustrationsexempel 9.1.3.
Visa först att pendelns tröghetsmoment är $322mR^2/3$ i a) och $319mR^2/3$ i b).

9.15 Den fysiska pendeln behandlas i illustrationsexempel 9.1.3.
Visa att vinkelfrekvensen för skivan är

$$\omega = \sqrt{\frac{4gx}{R^2 + 4x^2}},$$

där x är det sökta avståndet.

9.16 a) Frilägg först hela stången, och beräkna reaktionskraften i A som funktion av φ. Det är lämpligt att dela upp kraften i normal- och tangentialkomposanter. Resultatet blir:

$$R_{\mathrm{n}} = \frac{5}{2}mg\cos\varphi, \quad R_s = \frac{1}{4}mg\sin\varphi.$$

Frilägg därefter den del av stången som ligger mellan A och snittet, och beräkna de sökta storheterna.
b) Böjmomentet beror på två variabler, x och φ. Man ser att värsta fallet fås för $\varphi = 90°$. Återstår att bestämma vilket värde på x som ger maximum (svar: $x = b/3$).

9.17 Från det att hjulet släpps fram till det att linan slaknar kan hjulets rörelse beskrivas som en fjärdedels period av en harmonisk svängningsrörelse.
I illustrationsexempel 9.1.2 löses ett likartat problem.

9.19 I det första fallet deltar inte vätskan i svängningsrörelsen.
I det andra fallet har vätskan frusit fast vid det tunnväggiga skalet, och den svängande kroppen är då sammansatt av skalet och det frusna vätskeklotet.

9.20 Inför cylindrarnas vridningsvinklar φ_1 och φ_2 relativt startläget, och ställ upp lagen för rörelsemängdsmomentet för var och en av cylindrarna. Beteckna relativa vridningsvinkeln $\varphi_1 - \varphi_2$ med α, och härled en differentialekvation för denna. Ekvationens lösning är

$$\alpha = \frac{16M}{17k}(1 - \cos\omega t) \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\max} = \frac{32M}{17k}.$$

9.27 a) Eftersom kinetiska energierna är noll i de två lägena, så är potentiella energierna lika. Detta ger $k = mg/2a$, där $a = 300$ mm.
b) När vinkelhastigheten har maximum, har också kinetiska energin maximum och potentiella energin minimum. Ställ därför upp potentiella energin i ett godtyckligt läge, beskrivet av vinkeln φ mellan luckan och horisontalplanet. Man får då

$$V = -mg\frac{a}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2}kx^2,$$

där

$$x = 2a\sin\frac{\varphi}{2}$$

är fjäderförlängningen.

9.28 a) Beräkna först vinkelaccelerationen i startögonblicket genom att betrakta hela systemet. Resultatet blir

$$\dot{\omega} = \frac{3(a + 2c)}{2(a^2 + 3c^2)}g.$$

Frilägg därefter enbart kroppen A och beräkna normalkraften i startögonblicket. Villkoret att denna skall vara positiv ger $c < 2a/3$.
b) Här är $c = a/3$. Betrakta först hela systemet, och beräkna vinkelhastigheten och vinkelaccelerationen för en godtycklig vridningsvinkel φ. Därmed är kroppen A:s acceleration känd, och de verkande krafterna kan bestämmas. Man finner att normal- och friktionskrafterna är:

$$N = \frac{3}{8}mg\cos\varphi, \quad F = \frac{9}{4}mg\sin\varphi.$$

Kroppen börjar glida när $F/N = 0,4$.

9.29 Motorns och friktionsmomentets totala effekt är

$$P - M_\mathrm{f}\omega = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t},$$

där $M_\mathrm{f} = c\omega^2$ är friktionsmomentet och

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2$$

är kinetiska energin.
Alternativt ger lagen för rörelsemängdsmomentet

$$M_\mathrm{d} - M_\mathrm{f} = I\dot{\omega},$$

där $M_\mathrm{d} = P/\omega$ är det drivande momentet.

9.32 Frilägg stången och ställ upp grundekvationerna, ekv (9.1.1) + (9.1.3).
I startögonblicket är ω och därmed också tyngdpunktens normalacceleration noll.

9.35 Lagerreaktionen bestäms ur lagen för tyngdpunktens rörelse, ekv (9.1.11).
Vi måste därför bestämma tyngdpunktens acceleration i andra läget.
Lagen för rörelsemängdsmomentet, ekv (9.1.12), ger vinkelaccelerationen $\dot{\omega}$ och därmed tangentialaccelerationen.
En energibetraktelse ger ω^2, som i sin tur ger normalaccelerationen. Dragkraftens arbete är $PR\pi/2 = \Delta T + \Delta V$, där $P = 75$ N.

9.36 a) Använd energilagen.
b) Använd energilagen kombinerad med lagen för tyngdpunktens rörelse.

9.38 Tröghetsmomentet bestäms ur svängningstiden för små svängningar. Då fås

$$I = mgc\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2,$$

där $c = 0,93$ m och $\tau = (120/39)$ s.
Använd lagen för tyngdpunktens rörelse, lagen för rörelsemängdsmomentet samt energilagen för att bestämma reaktionskraften. Den horisontella komposanten blir

$$R_\mathrm{h} = \frac{m^2gc^2}{I}(3\cos\varphi - \sqrt{3})\sin\varphi,$$

som har maximum för $\varphi = \pi/6$.

9.39 I startögonblicket är vinkelhastigheten och därmed tyngdpunktens normalacceleration noll.
Vinkelaccelerationen bestäms ur lagen för rörelsemängdsmomentet, ekv (9.1.3). Denna ger också tyngdpunktens tangentialacceleration.
Friktions- och normalkrafterna fås sedan ur lagen för tyngdpunktens rörelse. Här kan det eventuellt vara fördelaktigt att dela upp tyngdpunktens acceleration i horisontella och vertikala komposanter, och betrakta motsvarande komponenter av lagen för tyngdpunktens rörelse. Oavsett vilket blir resultatet

$$F = \frac{3}{10}mg, \quad N = \frac{2}{5}mg.$$

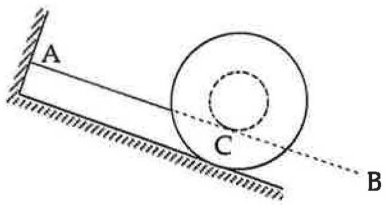
9.2 Kinetik – Allmän plan rörelse
Ledningar

9.43 b) Villkor för att linan inte skall glida ges av ekv (4.1.6).

9.45 Ställ upp grundekvationerna, ekv (9.2.1) + (9.2.4), för trådrullen.
I momentekvationen, tänk på att linkraftens hävarm med avseende på trådrullens tyngdpunktsaxel är lika med rullens innerradie, eftersom trådens fria del är tangent till motsvarande cirkel.
Det är tecknet på rullens tyngdpunktsacceleration som avgör åt vilket håll den rullar.

9.46 Man vet inte i förväg om cylindern glider i kontaktpunkten eller ej.
Antag exempelvis att den inte glider, och beräkna friktionskraften F och normalkraften N. Bilda därefter kvoten F/N. Om beloppet av denna är mindre än 0,15 var antagandet korrekt. I annat fall får man börja om från början utan rullvillkor men med $F/N = 0,15$.

9.47 Alla punkter på linans raka del är i vila, speciellt C (se figuren nedan).
Det betyder att cylinderns momentancentrum ligger i C. Cylindern "rullar på" den räta linjen AB.
Friktionen är fullt utbildad i kontaktpunkten med underlaget. Här är det viktigt att friktionskraften har korrekt riktning. Åt vilket håll glider cylindern i kontaktpunkten?



9.48 b) Kinematiskt samband: $v_B = \bar{v} + R\omega$

9.50 Den kraft som verkar på bilens hjul från marken är P/v i det aktuella ögonblicket. Detta gäller såväl före som efter linans bristning.
Omedelbart innan linan brister rör sig systemet bil + rör som en enda stel kropp, och accelerationen kan enkelt bestämmas.
För att bestämma bilens acceleration omedelbart efteråt friläggs bilen och röret var för sig.

9.51 Kinematiskt samband (i båda fallen): $\bar{v}_{\text{trumma}} = v_{\text{plattform}} + r\omega$.
a) Frilägg trumman och plattformen var för sig.
b) Frilägg trumman för sig; systemet plattform + person för sig.

9.52 Med gängse beteckningar kan svaret skrivas:

$$\mu = \frac{Iv^2}{mgLR^2}.$$

9.53 Beräkna först stångens vinkelhastighet och tyngdpunktshastighet just då stången lossnar. Resultat:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{3gL}{4}}.$$

Därefter är ω konstant medan tyngdpunkten fortsätter i kaströrelse. Efter hur lång tid är stången vertikal igen?

9.54 Bestäm först tyngdpunktens acceleration samt vinkelaccelerationen.
Använd därefter metoden med instantant accelerationscentrum för att finna den sökta punkten (se kapitel 8.2(c), "Specialfallet $\boldsymbol{\omega} = 0$").

9.55 Beräkna först banradien R.
Vid "bunden rotation" måste satelliten rotera ett varv runt sin egen axel på samma tid som den tillryggalägger ett varv i omloppsbanan. Vad blir då dess vinkelhastighet ω?
Bestäm därefter hur stort moment som måste läggas på för att satelliten skall accelerera från vinkelhastigheten noll till ω på den angivna tiden (integrera ekv (9.2.4) med avseende på tiden).
Observera att vissa av de numeriska uppgifterna är överflödiga.

9.58 Frilägg stången och ställ upp de tre grundekvationerna, ekv (9.2.1), (9.2.4). Dessa innehåller fyra obekanta (två accelerationskomponenter för tyngdpunkten, vinkelaccelerationen och linkraften).
Ett kinematiskt samband behövs. Punkten A är bunden att röra sig i en cirkelbana. I startögonblicket är hastigheten och därmed normalaccelerationen noll. Därmed är accelerationsvektorns riktning känd. Detta kan utnyttjas till att teckna samband mellan A:s acceleration, tyngdpunktsaccelerationen och vinkelaccelerationen.

9.59 a, b) I första ögonblicket är alla krafter kända – fjäderns längd är ju given.
c) Eftersom alla hastigheter är noll, är även alla relativa normalaccelerationer noll. Se också kapitel 8.2(c), "Specialfallet $\omega = 0$".

9.60 Bestäm först tyngdpunktens acceleration samt vinkelaccelerationen.

$$\text{Resultat: } \quad \bar{a} = \frac{F}{m}, \quad \dot{\omega} = \frac{6F}{mL}.$$

Frilägg därefter den del av stången som ligger mellan kraftens angreppspunkt och ett snitt på avståndet x därifrån. Du kan nu beräkna tyngdpunktsaccelerationen för den avsnittade delen.Bestäm sedan tvärkraften som funktion av x.

9.61 Betrakta värsta fallet, det vill säga då skåpet står på gränsen till tippning.
Då är bara ena hjulparet i kontakt med golvet.

9.63 Betrakta vad som händer efter det att skivan frigjorts från A.
Vad kan man då säga om kraftmomentet med avseende på en vertikal axel genom B?

9.64 Under den korta stöttiden är tyngdkraftens impulsmoment med avseende på hörnet P försumbart. Det betyder att motsvarande rörelsemängdsmoment konserveras under stöten.
Använd ekv (9.2.7) för att teckna rörelsemängdsmomentet omedelbart före stöten.
Efter stöten roterar klotet kring en fix axel genom P. Rörelsen övergår i rullning utan förlust i mekanisk energi.

9.69 Eftersom A.s hastighet och riktningen för B:s hastighet är kända, kan det vara lämpligt att använda metoden med momentancentrum för att bestämma vevstakens vinkelhastighet.
c) Några mellanresultat:
Punkten B:s avstånd från hjulaxeln är $3,82R$.
Momentancentrums avstånd från A är $3,42R$.
Vevstakens vinkelhastighet är $0,293\omega$.
B:s avstånd från momentancemtrum är $2,21R$.
Tyngdpunktens avstånd från momentancentrum är $2,45R$.

9.71 I båda fallen bevaras energin.
b) Tyngdpunkten måste röra sig på en lodlinje. Vad är då dess hastighet i det aktuella läget?

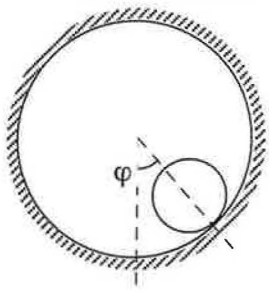
9.73 a) Om klotet *nätt och jämnt* kan fullborda ett varv är normalkraften i högsta läget känd. I så fall kan också tyngdpunktens normalacceleration och därmed också farten beräknas.
Energikonservering ger den sökta hastigheten.
b) Energikonservering ger tyngdpunktshastigheten och därmed också normalaccelerationen i det betraktade läget.
Grundekvationerna, ekv (9.2.1) och (9.2.4), ger tillsammans med rullvillkoret tangentialaccelerationen.
Blanda inte ihop klotets vinkelhastighet (ingår i rörelsemängdsmomentet och rullvillkoret) med tyngdpunktens vinkelhastighet i dess cirkelbana (ingår i sambanden mellan tyngdpunktshastighet och -acceleration, ekv (5.2.16))! Ingen poäng att blanda in den sistnämnda här!

9.75 a) Visa först att tyngdpunkten följer en lodlinje.
Var ligger i så fall momentancentrum strax innan den övre stångändan slår i golvet?
Om man inser detta, kan man enkelt uttrycka kinetiska energin i stångens vinkelhastighet ω. Med hjälp av energilagen bestäms först ω och med hjälp av denna den sökta hastigheten.
b) Visa först att tyngdpunktens acceleration är $\bar{a} = L\dot{\omega}/2$ just innan överändan slår i golvet.
Utnyttja detta samband tillsammans med lagen för tyngdpunktens rörelse, ekv (9.2.1), och lagen för rörelsemängdsmomentet med avseende på tyngdpunkten, ekv (9.2.4), för att bestämma normalkraften.

9.76 Beräkna först hjulets tyngdpunktshastighet i B.
Resultat: $\sqrt{50gh/41}$, där $h = 3,60$ m.
Tänk på att hjulet bibehåller sin vinkelhastighet när den har lämnat banan i B.

9.77 Enklast är nog att härleda svängningsekvationen från ett energisamband. Det kan vara lämpligt att införa en koordinat x för att beskriva tyngdpunktens läge relativt något referensläge, till exempel där fjädern är ospänd. Hur mycket förlängs fjädern när tyngdpunkten flyttas sträckan x utmed planet?
Ställ upp sambandet $T + V$ = konstant, och derivera detta med avseende på tiden. Resultatet bör bli den vanliga differentialekvationen för harmonisk svängningsrörelse. Vinkelfrekvensen kan läsas av direkt ur denna; gå tillbaka till kapitel (6.4) om nödvändigt.
Alternativ metod: Frilägg cylindern och ställ upp grundekvationerna (lagarna för tyngdpunktens rörelse och rörelsemängdsmomentet med avseende på tyngdpunkten). Eliminera friktionskraften (som *inte* är lika med μN i det här fallet).
Varning! Blanda inte ihop vinkelfrekvensen i svängningsrörelsen med vinkelhastigheten i rullningsrörelsen. Båda brukar visserligen olyckligtvis betecknas med ω, och båda har samma dimension, men där upphör alla likheter. Den ena är till exempel konstant, den andra är en funktion av tiden.

9.78 Inför vinkeln φ enligt figuren nedan som obekant.



Energilagen ger $T+V$ = konstant. Teckna därför totala energin $T+V$ i ett godtyckligt läge och derivera med avseende på tiden. Om approximationen $\sin\varphi \approx \varphi$ utnyttjas, fås ekvationen för en harmonisk svängningsrörelse. Vinkelfrekvensen kan sedan läsas av direkt.
Se även sista stycket i ledningen till föregående uppgift.

9.79 Kraftmomentet med avseende på en vertikal axel genom A är noll.
Vad säger det om motsvarande rörelsemängdsmoment?
Ekv (9.2.7) kan vara användbar här.

9.80 Lådan kan antingen glida eller tippa baklänges.
Det kan vara fördelaktigt att räkna i den accelererade referensram som följer med bilen. I så fall måste en fiktivkraft införas på lådan enligt avsnitt (c) och kapitel 6.5. Det dynamiska problemet övergår då i ett jämviktsproblem.
Problemet kan naturligtvis också lösas på traditionellt sätt i en inertialram. Då måste man använda grundekvationerna (9.2.1) och (9.2.4).

9.81 Friktionen är fullt utbildad i framhjulets kontaktpunkt.
Värsta fallet är när bakhjulet nätt och jämnt är i kontakt med marken.

9.82 Två möjliga metoder:
1) Den absoluta rörelsen betraktas, vilket innebär att grundekvationerna (9.2.1) och (9.2.4) används.
2) Dörrens relativa rörelse i bilens accelererade referenssystem betraktas. Då måste en fiktivkraft införas på dörren, se kapitel 9.2(c) (och 6.5). I detta fall roterar dörren kring en "fix" axel, och problemet kan lösas med en enkel energibetraktelse.

9.83 Två möjliga metoder:
1) Den absoluta rörelsen betraktas, vilket innebär att grundekvationerna (9.2.1) och (9.2.4) används.
2) Bilens accelererade referenssystem utnyttjas. Då måste en fiktivkraft införas enligt kapitel 9.2(c) (och 6.5). i denna referensram är bilen i vila.
Oavsett val av metod kan det vara lämpligt att betrakta värsta fallet. I a) och b) gäller att friktionskrafterna på de drivande hjulparen är 0,75 x normalkrafterna (fullt utbildad friktion). I c) är friktionskraftena lika stora på alla hjul (samma drivande moment). För det hjulpar där risken för slirning är störst är friktionen fullt utbildad (men inte nödvändigtvis för det andra).

10.1 System av kroppar – Allmänna tillämpningar, konservering
Ledningar

10.1 c) Visa att stångens momentancentrum ligger i dess högra ändpunkt.
Vad betyder det för högra hjulets rörelse?
d) Några mellanresultat som kan komma till användning:
Stångens momentancentrum ligger rakt under det vänstra hjulets mittpunkt på avståndet $r\sqrt{15}$ från denna.
Stångens vinkelhastighet är $\omega/\sqrt{15}$.
Vänstra hjulets vinkelhastighet är

$$\frac{\sqrt{15}+1}{2\sqrt{15}}\omega.$$

Avståndet mellan stångens mittpunkt och dess momentancentrum är $4,78r$.

10.3 Just innan dörren slår igen har motvikten lika stor fart som linans fästpunkt i dörren.

10.6 Ändringen i kinetisk energi är lika med det arbete som uträttats av momentet, det vill säga $M\varphi$, där $\varphi = 1$ rad.

10.8 Ändringen i kinetisk energi är lika med det arbete som uträttas av kraften F.
Några mellanresultat:
a) Arbetet är $0,62Fr$.
b) Arbetet är $Fr\sqrt{2}$.
Avståndet mellan C och stångens momentancentrum är $3,62r$.
Om hjulets vinkelhastighet betecknas ω, så är stångens vinkelhastighet $\omega/\sqrt{17}$.
Avståndet mellan stångens tyngdpunkt och dess momentancentrum är $3,58r$.
c) Arbetet är $1,79Fr$.

10.9 Momentets arbete är lika med ändringen i kinetisk energi.

10.10 Energin konserveras.
a) Skivan roterar kring den fixa axeln O. Beteckna dess vinkelhastighet med ω. Beräkna hastigheterna för hjulaxlarna, samt visa att hjulen har vinkelhastigheten 2ω.
Visa att skivans tröghetsmoment är $8mR^2/3$.
Med dessa mellanresultat kan kinetiska energin för hela vagnen beräknas (resultat: $40mR^2\omega^2/3$).
b) Här förenklas uttrycket för kinetiska energin väsentligt. Skivan har translationsrörelse med samma fart som hjulaxlarna. Om denna är v, så är hjulens vinkelhastigheter v/R enligt rullvillkoret.

10.11 Använd den metod som beskrivs i illustrationsexempel 10.1.4, lösning a).
Inför först en lämplig variabel, till exempel vinkeln mellan radien AC och lodlinjen, för att beskriva systemets läge. Energin kan då uttryckas som funktion av denna vinkel i ett godtyckligt läge.
Eftersom svängningstiden för *små* svängningar söks, är det tillåtet att göra vissa approximationer.

10.13 Systemets totala rörelsemängdsmoment med avseende på rotationsaxeln bevaras under stöten. Använd detta för att bestämma vinkelhastigheten efter det att partikeln fastnat.
För att bestämma lagerreaktionen kan man frilägga partikeln och cylindern var för sig och införa kontaktkrafterna mellan kropparna som yttre krafter. Eftersom cylinderns tyngdpunkt är i vila måste nettokraften på den vara noll. Det betyder att den sökta lagerreaktionen måste vara lika stor som kontaktkraften från partikeln. Denna kan i sin tur bestämmas med hjälp av Newtons andra lag.

10.14 a) Rörelsemängdsmomentet för hela systemet med avseende på rotationsaxeln konserveras.
b) Systemets totala energi konserveras.

10.16 Om Arnold går längs periferin roterar karusellen (jfr illustrationsexempel 10.1.5). På detta sätt kan Arnold se till att dörrarna hamnar mitt för varandra.
Om Arnold går i någon av de radiella gångarna roterar däremot inte karusellen, vilket gör att Arnold med en lämpligt vald väg via centrum kan nå de sammanfallande dörrarna utan att ändra läget för dessa.

10.17 Under första skedet, stöten:
Rörelsemängdsmomentet för hela systemet med avseende på A konserveras.
Under andra skedet, pendlingen: Totala energin konserveras.

10.18 Det arbete som uträttas av konståkerskan är lika med ändringen i totala mekaniska energin (kinetisk + potentiell).

10.19 Systemets rörelsemängdsmoment med avseende på axeln A bevaras.
För att teckna vagnens bidrag behövs dess absoluta hastighet. Denna fås genom att (vektoriellt) addera relativhastigheten v och hastigheten för motsvarande punkt på karusellen.

10.20 Två storheter bevaras: rörelsemängdens horisontella komposant och den totala energin.
Låt oss anta att A rör sig åt vänster och att stången roterar medurs. Beteckna A:s hastighet med v och stångens vinkelhastighet med ω. När stången har roterat $45°$ har dess tyngdpunktshastighet en komposant $L\omega/2\sqrt{2}$ nedåt och en komposant $L\omega/2\sqrt{2} - v$ åt höger.

10.22 Två storheter bevaras: rörelsemängdens horisontella komposant och den totala energin.
Om vagnens hastighet åt vänster betecknas v, och klotets vinkelhastighet medurs betecknas ω, så är klotets tyngdpunktshastighet $R\omega - v$ riktad åt höger.

10.24 Två storheter bevaras: rörelsemängdens horisontella komposant och den totala energin.
Stängernas vinkelhastigheter måste vara till beloppet lika stora, säg ω.
Om tyngdpunktshastighetena betecknas v_1 och v_2 (förslagsvis), så kan punkten B:s hastighet tecknas på två sätt, vilket ger ett samband mellan v_1, v_2 och ω. Tillsammans med de två konserveringslagarna får vi tre ekvationer som kan användas för att bestämma samtliga obekanta.

10.26 Två storheter bevaras: rörelsemängdsmomentet med avseende på OC och den mekaniska energin.

10.2 Stöt
Ledningar

10.28 Den större kroppens hastighet omedelbart efter stöten är $\frac{2}{7} \cdot 1,6 \cdot 3,4$ m/s.

10.31 Mellanresultat: Kroppen B har efter stöten mot väggen hastigheten $0,425\, v_0$.

10.32 Mellanresultat: B:s rörelseenergi är

$$\frac{Mm^2(1+e)^2 v_0^2}{2(m+M)^2},$$

där v_0 är den första kroppens hastighet före stöten, och M är B.s massa.

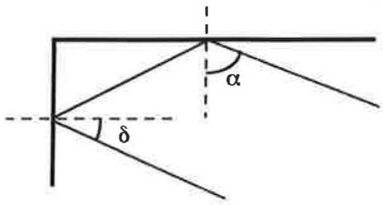
10.34 Börja med att visa att L:s fart direkt efter kollisionen var $\sqrt{44}$ m/s (använd lagen för kinetiska energin).

10.35 Använd resultaten från första fallet till att bestämma friktionskoefficienten. När denna är beräknad, kan hastigheterna omedelbart före och efter stöt beräknas för det andra fallet.

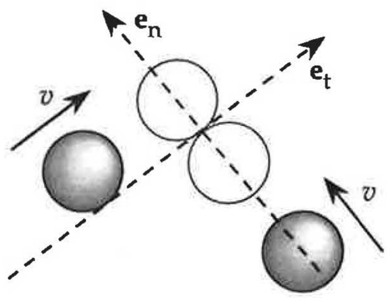
10.42 Problemet består av tre delar:
1) Fallrörelse (bestämmer klumpens hastighet omedelbart före stöt)
2) Stötförloppet (bestämmer pålens hastighet omedelbart efter stöt)
3) Pålens fortsatta rörelse (använd lagen för kinetiska energin för att bestämma sträckan)

10.45 Enklast är nog att betrakta de horisontella och vertikala rörelserna var för sig. Vertikala hastighetskomposanten omedelbart efter första studsen ges av ekv (10.2.11), där golvets hastighet är lika med noll. Tiden för kulan att återvända till golvet kan sedan enkelt beräknas.
Den horisontella hastighetskomposanten är konstant, vilket ger L.
Alternativt kan man beräkna elevationsvinkeln för andra språnget med hjälp av ekv (10.2.13). Eftersom den horisontella hastighetskomposanten är känd kan då utgångsfarten beräknas. Längden av andra språnget fås då enligt illustrationsexempel 6.2.7.

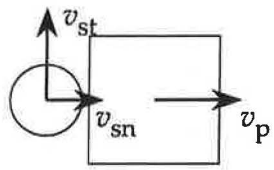
10.46 Tillämpa "reflexionslagen", ekv (10.2.13), på båda stötarna.
Visa att $\tan\alpha \cdot \tan\delta = 1$. Vad innebär detta för vinkeln mellan rörelseriktningarna?



10.47 Om kloten är glatta och det ena stannar, så måste dess hastighet före stöten ha legat längs stötnormalen. Då måste träffbilden ha sett ut så här:



10.48 Efter stöt:



Visa att

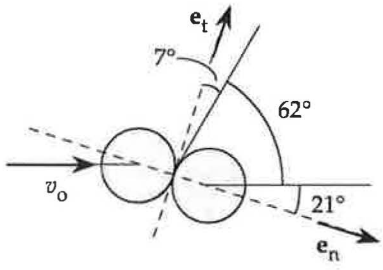
$$v_P = \frac{(1+e)u}{2\sqrt{2}}, \quad v_{sn} = \frac{(1-e)u}{2\sqrt{2}}, \quad v_{st} = \frac{u}{\sqrt{2}}.$$

10.49 I och med att stöten är "glatt" måste den från början vilande kroppen ha sin hastighet riktad längs stötnormalen efter stöten.

10.50 I och med att stöten är "glatt" måste den från början vilande kroppen ha sin hastighet riktad längs stötnormalen efter stöten.

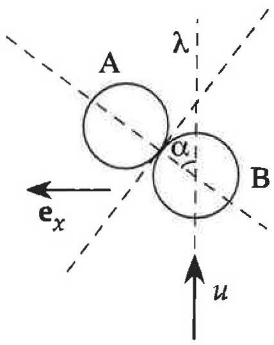
10.51 Eftersom friktionen kan försummas måste B:s hastighet efter stöten vara riktad längs stötnormalen. Om man ritar bollarna i det läge där de är i kontakt ser man direkt hur stort avståndet a måste vara.
A:s hastighet före stöten kan nu delas upp i tangential- och normalkomponenter. Med hjälp av grundekvationerna i avsnitt 10.2(c) kan motsvarande komponenter efter stöten beräknas.

10.52 Eftersom ytorna är glatta måste det vilande myntet ge sig av i stötnormalens riktning. Läget i stötögonblicket måste då vara detta:



10.53 Det kan vara lämpligt att införa en vinkel α enligt figuren för att beskriva läget av linjen λ.
Visa att A:s hastighet efter stöten har x-komponenten

$$v_{Ax} = \frac{1+e}{4} u \sin 2\alpha.$$



Appendix I Tröghetsmoment
Ledningar

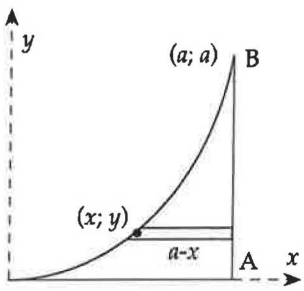
AI.3 För I_x, använd Steiners sats, och tänk på att $\bar{I}_x \approx 0$ för en *smal* stång. Eftersom stången ligger i xy-planet, fås I_z enklast ur ekv (AI.3).

AI.12 Inför ytdensiteten $\sigma = m/A$ (massa/area).
Om ytan delas in i element enligt övre figuren nedan, gäller att

$$m = \int \sigma \mathrm{d}A = \int \sigma(a-x)\mathrm{d}y,$$

vilket leder till

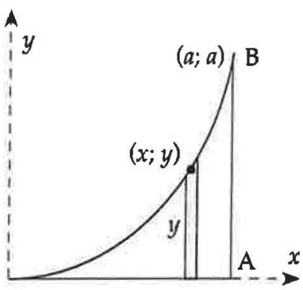
$$m = \frac{\sigma a^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{3m}{a^2}.$$



Samma elementindelning är lämplig för bestämning av I_x:

$$I_x = \int y^2 \mathrm{d}m = \int y^2 \sigma(a-x)\mathrm{d}y = \ldots$$

För att bestämma I_y är det enklare att göra en elementindelning enligt figuren nedan.



$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \int x^2 \sigma y \mathrm{d}x = \ldots$$

I_z fås enklast från ekv (AI.3).

AI.19 Oktantens tröghetsmoment med avseende på x-axeln måste vara $1/8$ av tröghetsmomentet för en hel sfär (massa $8m$) med avseende på samma axel. Oktantens tyngdpunkt måste ligga lika långt från xy-planet som tyngdpunkten för en halvsfär med plana ytan i xy-planet. På grund av symmetrin ligger oktantens tyngdpunkt lika långt från alla tre koordinatplanen.

AI.21 b) Visa att kroppens tyngdpunkt ligger på avståndet $R/12$ under den plana begränsningsytan mellan delkropparna.
c) Enklast att inte införa densiteten och beräkna volymen för den ihåliga kroppen.
Se i stället kroppen som skillnaden mellan en cylinder med radien $2a$ och en med radien a. Om den borttagna delen har massan μ, så har den ursprungliga delen massan 4μ. Då är $m = 3\mu$.