**BEGREPP:** *Rotation kring fix axel*

Du skall kunna ställa upp kraft- och momentekvationerna för en stel kropp när den roterar kring en fix axel. Momentekvationens högerled innehåller kroppens tröghetsmoment som tar hänsyn till massans utbredning.

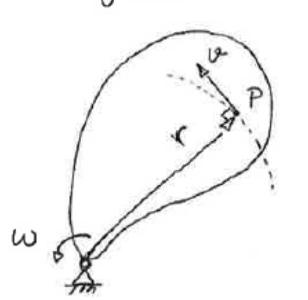
**Introduktion:** Rotation kring fix axel förekommer i många tillämpningar. En pendel och ett svänghjul är två exempel. Vi använder accelerationslagen som ger ett samband mellan krafterna som verkar på kroppen och tyngdpunktens acceleration. Vad gäller momentverkan, kommer vi att använda den fixa punkten som momentpunkt. Till skillnad från statiken är momentpunkten alltså inte valfri, men i övrigt används friläggning och momentberäkning på samma sätt. Det som skiljer är högerledet i momentekvationen, som nu inte är lika med noll. Vi inför ett mått på massans utbredning det s.k. *tröghetsmomentet I* - ett motstånd mot vinkelacceleration $\alpha$ för ett givet kraftpar.

**Sammanhang:** Detta avsnitt behandlar ett av de tre fall som beskrevs översiktligt i föregående avsnitt.

**Uppgift:** Vilka samband skall användas och hur räknar man vid rotation kring en fix axel?

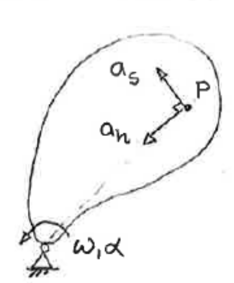
**Metod:** Vid ren rotation (kring en fix axel) kommer alla punkter inom den stela kroppen att beskriva ren cirkelrörelse. En punkt är fix dvs hastigheten för denna är noll. Alla andra punkter roterar kring den fixa punkten. Figuren visar hastighet respektive acceleration för en punkt P vid rotation kring en fix axel.

Hastighet:




$v = \omega r \quad \dots (1)$

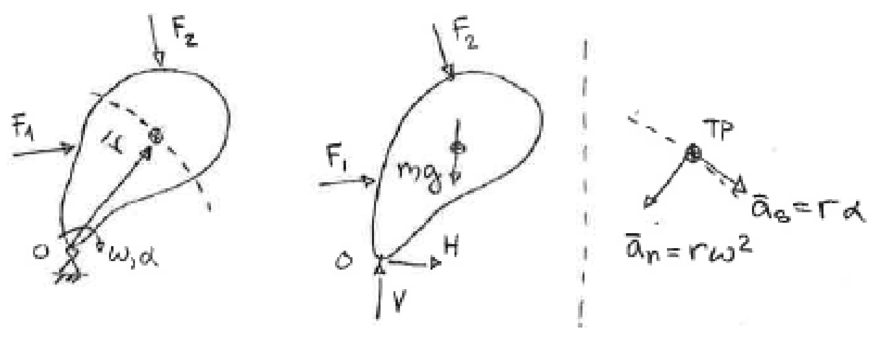
Acceleration:




$$\begin{cases} a_n = r\omega^2 \\ a_s = r\alpha \end{cases} \quad \dots (2)$$

Sambanden (1) och (2) ger hastighet respektive acceleration vid rotation kring fix axel för en godtycklig punkt P. När man använder accelerationslagen sätts punkten P lika med TP.

Kroppen påverkas av krafter enligt den vänstra figuren nedan:



Vi frilägger då som vanligt och sätter ut alla krafter som verkar, se figuren i mitten. Den högra figuren visar TPs acceleration enligt sambanden (2) ovan. Vi kan nu ställa upp kraft- och momentekvationerna enligt:

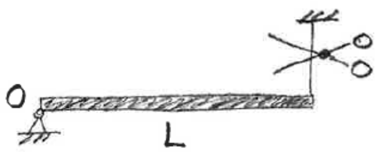
$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_n &= m\bar{a}_n \\ \Sigma F_s &= m\bar{a}_s \end{aligned}\right\} \quad \text{NII map TP}$$

$$\Sigma M_o = I_o\,\alpha \qquad \text{Moment map fix axel}$$

De två översta ekvationerna är accelerationslagen map på TP uttryckt i naturliga koordinater. Momentekvationen ger ett samband mellan summan av momenten som verkar på kroppen och den stela kroppens vinkelacceleration $\alpha$. Obs! Momenten som verkar på kroppen skall räknas med avseende på den fixa punkten O. Även tröghetsmomentet $I_o$ skall räknas med avseende på den fixa punkten O.

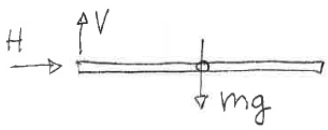
**Exempel:**

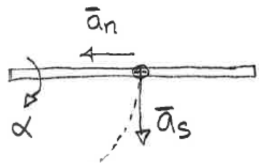
En stång med massan $m$ och längden $L$ är ledad i punkten O och upphängd i ett snöre i andra änden. Beräkna krafterna i leden direkt efter att man klippt av snöret. Tröghetsmomentet map punkten O kan visas vara $I_o = mL^2/3$ där $m$ är stångens massa.




**Lösning:**

Figuren till vänster visar friläggningen och figuren till höger visar vinkelaccelerationen och tyngdpunktens accelerationskomponenter. När snöret klipps av är $\omega = 0$ vilket ger att $\bar{a}_n = 0$.




$$\begin{cases} \bar{a}_n = \frac{L}{2}\omega^2 \\ \bar{a}_s = \frac{L}{2}\alpha \end{cases}$$

Kraft- och moment ekvationerna kan nu tecknas:

$$(\leftarrow) \quad -H = m\bar{a}_n \,, \quad \bar{a}_n = 0 \Rightarrow H = 0 \quad \ldots (3)$$

$$(\downarrow) \quad mg - V = m\bar{a}_s \,; \quad V = m\left(g - \frac{L}{2}\alpha\right) \quad \ldots (4)$$

$$(\curvearrowright O) \quad mg\frac{L}{2} = \frac{mL^2}{3}\cdot\alpha \quad \ldots (5)$$

där referensriktningen för krafterna sammanfaller med accelerationskomponenternas riktningar. Ur (5) får vi att $\alpha = 3g/(2L)$ och det sätts in i (4) som ger

$$V = m\left(g - \frac{3}{4}g\right) = \frac{1}{4}mg$$

Reaktionskraften i leden, precis efter att snöret klippts, verkar alltså vertikalt uppåt vid leden.

#