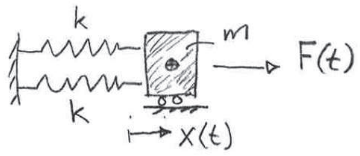
Övningsuppgifter Svängningar

Mekanik för V och Bi

Uppgifterna nedan behandlar fria och påtvingade odämpade svängningar. Uppgifterna relaterar till Föreläsningspass 13 enligt Kursprogrammet. Kursboken behandlar svängningar i avsnitt 6.4 men där behandlas också viskös dämpning som inte ingår i kursen. Därav dessa fristående uppgifter. Gör åtminstone uppgifterna 1), 3), 4), 6) och 7).

---

1) Betrakta massa-fjäder systemet i figuren, där $F(t)$ är en allmän yttre pålagd kraft och $x(t)$ är massans förskjutning. Båda är funktioner av tiden.



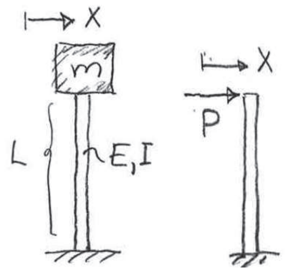
a) Visa att rörelseekvationen, d.v.s. ekvationen för massans förskjutning $x(t)$ ges av

$$m\ddot{x} + 2kx = F(t)$$

b) Antag att F=0, d.v.s. fria svängningar. Sätt k=250N/m och m=10kg. Vad blir då vinkelfrekvensen ω_n, frekvensen f_n och periodtiden T_n för systemet?

c) Hur påverkas egenfrekvensen om man bara har en fjäder i systemet? Beräkna f_n för det fallet.

2) Bestäm systemets naturliga vinkelfrekvens ω_n för horisontella svängningar när en lätt konsolbalk enligt figuren ger en elastisk kraft med styvhetsrelationen $P = kx$ där k=9.8kN/m. Massan i toppen m=50kg är betydligt större än balkens massa.



Anm. $k = 3EI/L^3$ där I, L och E är balkens tröghetsmoment, längd, och elastiska modul men detta ingår inte i mekanikkursen.

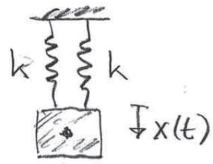
3) Bestäm den fria svängningen $x(t)$ för systemet i **1)** om

a) $x(0)$=0.2m och $\dot{x}(0)$=0

b) $x(0)$=0 och $\dot{x}(0)$=1.5m/s

Anm. Matematiskt är den fria svängningen den homogena lösningen (d.v.s. för högerledet lika med noll) till differentialekvationen enligt uppgift 1).

4) Antag att fjädersystemet enligt **1)** hänger vertikalt enligt figuren och att $x(t)$ mäts från fjäderns ospända längd.
Vad blir den totala förskjutningen $x(t)$ om systemet släpps från vila i fjäderns ospända läge? Kommentera resultatet.



5) Systemet i uppgift **2)** vrids nittio grader till ett horisontellt läge. Balken får då en statisk utböjning (som ger $x(0)$) och dessutom en initialhastighet $\dot{x}(0)$=1.2m/s genom att man slår till massan med en hammare.
Bestäm den fria svängningen $x(t)$ om x mäts från det raka (obelastade) läget.

6) Systemet enligt uppgift **1)** utsätts för en harmonisk kraft $F(t) = F_0 sin(\Omega t)$ där Ω är en godtycklig vinkelfrekvens och F_0 är en kraftamplitud. Bestäm den stationära lösningen på formen $x = x_0 sin(\Omega t)$ där man antar att förskjutningen $x(t)$ följer den harmoniska kraften. Dvs använd $x(t)$ som en ansats för att bestämma förskjutningsamplituden x_0. Visa att

$$x_0 = \frac{F_0}{2k} \frac{1}{1 - (\frac{\Omega}{\omega_n})^2}$$

där systemets naturliga vinkelfrekvens ges av $\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

7) I systemet enligt uppgift **6)** är den harmoniska kraft-amplituden $F_0 = 0.1mg$.

Beräkna vibrationsamplituden x_0 för fyra fall:

a) $\Omega = 0.05\omega_n$

b) $\Omega = 0.95\omega_n$

c) $\Omega = 1.05\omega_n$

d) $\Omega = 5\omega_n$

Observera vibrationsamplitudens storlek och tecken.

Anm. Fall a) är nära den kvasi-statiska svängningen som ges av $x_0 = F_0/2k$.

Svar och ledningar till övningsuppgifter Svängningar

Mekanik för V och Bi

1

a) Samma härledning som i föreläsningen men med två fjädrar.

b) ω_n=7.07rad/s, f_n=1.13Hz och T_n=0.89s

c) En fjäder sänker egenfrekvensen till f_n=0.80Hz

2

Balken fungerar som en fjäder. Egenfrekvens $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$=14rad/s

3

Jämför föreläsningen. Begynnelsedata bestämmer massans förskjutning. $\omega_n = 7.07 rad/s$. Förskjutning som funktion av tiden (i meter):

a) $x(t) = 0.2 cos(7.07t)$

b) $x(t) = 0.212 sin(7.07t)$

4

Jämför Uppgift 2) Seminariepass 13. Här gäller på samma sätt $x(0)$=0 och $\dot{x}(0)$=0. Partikulärlösningen ger det statiska jämviktsläget $x(0) = mg/2k$=0.196m.

Svar: $x(t) = 0.196(1 - cos(7.07t))$ (i meter).

5

Begynnelsedata för både utböjning och hastighet. Inverkan av tyngd ger svängning kring statiska jämviktsläget.
$x(0) = mg/k$ =0.050m och $\dot{x}(0)$=1.2m/s ger $x(t) = 0.05 + 0.086 sin(14t)$ (i meter).

6

Jämför föreläsningen. Härledningen finns där.

7

Förskjutningsamplituderna x_0 ges av:

a) 0.020m

b) 0.201m

c) -0.191m

d) -0.00082m

Då man är nära resonansen är amplituden stor. När man passerar resonansfrekvensen (egenfrekvensen) med den drivande kraftens frekvens, växlar förskjutningsamplituden tecken och blir mindre och mindre ju högre den drivande kraftens frekvens är. Kvasistatisk svängning $x_0 = F_0/2k$=0.01962m.