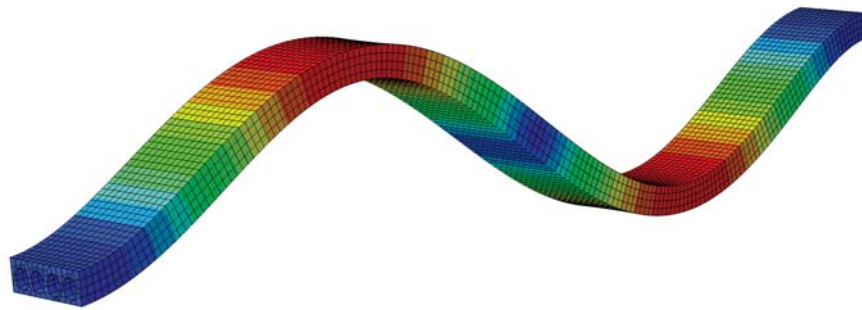




LUND
UNIVERSITY



DYNAMISKA EGENSKAPER FÖR HÅLDÄCKSBJÄLKLAG VID MODELLERING

Numerisk och experimentell analys

LUDVIG ZAAR

Structural
Mechanics

Master's Dissertation

DEPARTMENT OF CONSTRUCTION SCIENCES
DIVISION OF STRUCTURAL MECHANICS

ISRN LUTVDG/TVSM--26/5281--SE (1-62) | ISSN 0281-6679

MASTER'S DISSERTATION

DYNAMISKA EGENSKAPER
FÖR HÅLDÄCKSBJÄLKLAG
VID MODELLERING
Numerisk och experimentell analys

LUDVIG ZAAR

Supervisor: Professor **KENT PERSSON**, Division of Structural Mechanics, LTH.

Assistant Supervisor: **PER JØRSTAD**, MSc, Sweco i Sverige Malmö.

Examiner: **LINUS ANDERSSON**, Assistant Professor, Division of Structural Mechanics, LTH.

Copyright © 2026 Division of Structural Mechanics,
Faculty of Engineering LTH, Lund University, Sweden.

Printed by V-husets tryckeri LTH, Lund, Sweden, March 2026 (PI).

For information, address:

Division of Structural Mechanics,
Faculty of Engineering LTH, Lund University, Box 118, SE-221 00 Lund, Sweden.

Homepage: www.byggmek.lth.se

Abstract

A common building element in Northern Europe is the hollow-core slab. These are material-efficient components manufactured in factories with prestressed reinforcement at the bottom and hollow channels centered in the cross-section. Their design and low self-weight facilitate long spans and flexible floor plans. Static design and load capacities are well-documented and researched. However, this is not the case for dynamic capacity, which is only sparsely addressed in design standards and only moderately researched.

In the first part of the study, four experimental investigations were conducted. The hollow-core slabs were measured at various stages of the production process to observe if and how their natural frequencies had changed. Measurements were made on elements freely supported before grouting or the application of leveling compound. Measurements were also made on elements that had been grouted but had no leveling compound applied yet. Finally, two measurements were made when the elements were grouted, had leveling compound applied, and had interior walls installed, although the surrounding conditions and floor plans differed.

In the second part of the study, a numerical parameter study was conducted to examine how a hollow-core slab would be affected under different assumptions using the finite element method. Analyses were performed to determine how the length and thickness of the leveling compound influenced the slab's behavior, as well as how different assumptions regarding the mass distribution affect the response. The impact of support conditions was analyzed, and finally, the influence of continuity between slabs in the transverse direction and across supports in the longitudinal direction was assessed.

The results were at last compared to identify trends based on the measurements conducted in this work. It was concluded that before grout is applied, the elements lack continuity and behave as individual beam elements. After grouting, this changes, and they begin to behave as plates where continuity exists between elements and across supports. Continuity between elements is effective when they are close to a support in the transverse direction, however by itself it does not provide sufficient load distribution for the elements to act as supports.

Sammanfattning

Håldäckselement i betong är ett vanligt förekommande byggelement i Nordeuropa. Det är materialeffektiva element som tillverkas i fabrik med förspänd armering i underkant och ihåliga kanaler centrerat i tvärsnittet. Deras utformning och låga egenvikt bidrar till att möjliggöra långa spännvidder och flexibla planlösningar. Metoden för statisk dimensionering och lastkapaciteter finns dokumenterat och är undersökt. Kontroller av dynamisk respons är dock bristfälligt behandlat i dimensioneringsstandarder.

I arbetets första del genomfördes fyra experimentella undersökningar av håldäcksbjälklag, vilka var olika långt komna i produktionsprocessen, för att se hur och om egenfrekvenserna hade förändrats. Första undersökningen utfördes då elementet inte var foggjutet, andra efter att det foggjutits innan avjämningsmassa, slutligen utfördes två mätningar när elementen var foggjutna, avjämningsmassa var applicerad och innerväggar monterade.

I den andra delen av arbetet genomfördes fyra numeriska parameterstudier med finita elementmetoden för att undersöka hur ett håldäckselement påverkades av olika antaganden och förutsättningar. Dessa analyser undersökte hur egenfrekvensen för håldäckselementen påverkades. Inverkan av längd och avjämningsmassans tjocklek analyserades. Vidare analyserades hur olika antagande om medsvängande massa, upplagsvillkor samt kontinuitet mellan elementen i tvärriktningen och över stöd i längdriktningen påverkar håldäckens egenfrekvens.

Slutligen jämfördes resultatet mellan mätningar och numerisk parameterstudie för att baserat på arbetets omfattning urskilja tendenser till samband vilket i sin tur kan utnyttjas vid modellering av håldäckselement. Innan ett element är foggjutet så tyder resultatet på att ingen kontinuitet kan tillgodoräknas. Efter foggjutning ändras detta och elementen börjar uppträda som plattor med kontinuitet i tvärriktningen och över stöd. Kontinuiteten i tvärriktningen bidrar till en förstyvning nära upplag. Vid större avstånd till upplag kan elementen däremot betraktas som icke kontinuerliga i tvärriktningen och därmed vilande på två stöd.

Förord

Detta arbete markerar slutet för mina studier på civilingenjörsprogrammet Väg och Vattenbyggnad vid Lunds Tekniska Högskola. Examensarbetet är utfört under hösten 2025 på avdelningen för Byggnadsmekanik i samarbete med Sweco AB.

Förest vill jag uttrycka min tacksamhet till Prof. Kent Persson som varit handledare och bidragit med värdefull stöttning och guidning genom arbetet. Även ett stort tack till Per Jørstad på Sweco Malmö för insikter och kunskap under arbetets gång. Ytterligare ett tack till Starka Betong och Skanska Hus syd för möjligheten att genomföra mätningar hos er.

Jag lämnar nu studielivet i Lund och vill avslutningsvis tacka vänner och familj för att varit med på resan och gjort åren här oförglömliga.

Lund, januari 2026

Ludvig Zaar

Innehållsförteckning

1. Inledning	1
1.1 Bakgrund	1
1.2 Syfte och frågeställning	2
1.3 Avgränsningar	2
1.4 Metod	2
1.5 Disposition	3
2 Håldäcksbjälklag.....	5
2.1 Håldäckselement.....	5
2.2 Dimensioner och längder.....	5
2.3 Upplag, foggjutning och pågjutning	6
3 Strukturodynamik och modellering.....	9
3.1 Finita elementmetoden	9
3.2 Strukturodynamik.....	11
3.2.1 Rörelseekvationen	11
3.2.2 Dämpning och resonans	12
3.2.3 Egenvärdesanalys.....	13
3.2.3 Experimentell modalanalys	13
3.3 Teori för balkar och plattor	15
3.3.1 Balkar.....	15
3.3.2 Plattor	16
4 Experimentell mätning	17
4.1 Genomförande.....	17
4.1.1 Förutsättningar	17
4.1.2 Utrustning	17
4.1.3 Uppsättning och utförande.....	18
4.1.4 Felkällor	21
4.2 Resultat av experimentella mätningar	22
5 Numerisk Parameterstudie	25
5.1 Genomförande.....	25
5.1.1 Indata.....	25
5.1.2 Analysmodeller.....	29
5.2 Längd och pågjutningstjocklek.....	30
5.2.1 Resultat.....	30
5.2.2 Diskussion.....	31
5.3 Antagande för massa och längd	32

5.3.1 Resultat.....	32
5.3.2 Diskussion.....	33
5.4 Upplagsvillkor	34
5.4.1 Resultat.....	34
5.4.2 Diskussion.....	35
5.5 Samverkan mellan element	36
5.5.1 Resultat.....	37
5.5.2 Diskussion.....	39
6. Utvärdering av resultat	41
6.1 Mätning innan foggjutning.....	41
6.2 Mätning efter foggjutning	43
6.3 Mätning mitt på bjälklag.....	46
6.4 Mätning i kant av bjälklag	48
6.5 Sammanfattning av resultatet.....	51
7. Slutsats	53
7.1 Förslag till fortsatta studier	53
Referenser	55
Appendix A.....	57

1. Inledning

I följande kapitel kommer en introduktion till arbetet att ges där bakgrund till problemställningen beskrivs tillsammans med syfte, frågeställningar och avgränsningar till arbetet.

1.1 Bakgrund

Klimat och miljöfrågor är aktuella i det moderna samhället och byggsektorns påverkan är stor. Bygg- och fastighetssektorn står för ungefär en femtedel av Sveriges totala utsläpp av växthusgaser. För att gemensamt arbeta mot problemet har en färdplan tagits fram för att nå nettonollutsläpp 2045. Stora framsteg har gjorts genom att byggnader blivit energieffektivare under förvaltningen medan det i produktionen kvarstår utmaningar. En del är materialåtgången och dimensioneringen av byggnaderna (Naturvårdsverket, 2025).

För Nordeuropa är det vanligt förekommande att vid nybyggnation av exempelvis kontor och parkeringshus använda prefabricerade betongelement eller platsgjutna element som bärande betongstomme. Ett av de vanligaste prefabricerade bjälklagselementen är förspända håldäck, s.k. HD/F som har ett brett användningsområde. Elementen möjliggör stora spännvidder och planlösningar med få bärande element, vilket skapar flexibilitet i utformningen. Håldäckselement är materialeffektiva och har därmed en låg egenvikt, vilket i kombination med deras utformning innebär att de är slanka. Lindstedt beskriver begränsningen i denna utformning som medför en försämrad förmåga att uppfylla samma ljud- och vibrationskrav som platsgjutna bjälklag. För att kompensera för denna brist kan håldäcken förses med en pågjutning eller spackling för att öka massan (Lindstedt, 2008).

I dagens dimensioneringspraxis för bjälklag saknas det beskrivning för hur vibrationer ska beaktas i beräkningar. I Eurokod 2 *Betongkonstruktioner*, som är Europeiska unionens dimensioneringsstandard för betong, anges hur betongelement ska dimensioneras för statiska laster. För träbjälklag i Eurokod 5 anges krav för vilka vibrationsnivåer bjälklag ska dimensioneras för, något liknande förekommer inte för betong. Litteratur om vilka modelleringsantaganden som bör användas för beräkningar är begränsade. Mot denna bakgrund finns det behov av att undersöka hur vibrationer påverkar komforten hos brukarna och vilka upplagsvillkor som är möjliga att beakta vid modellering av dynamisk respons i

dimensioneringen. Specifikt krävs kontroller för lågfrekventa laster, exempelvis gånglaster, som påverkar komfortvibrationerna, under 8 hertz, i byggnaden (ISO 10137).

1.2 Syfte och frågeställning

Syftet med examensarbetet är att undersöka vilka upplagsvillkor som bör beaktas vid dimensionering med hänsyn till komfortvibrationer i håldäcksbjälklag. Examensarbetet syftar även till att få en djupare förståelse för det faktiska beteendet vid dynamisk last på håldäckselement och hur detta varierar under byggprocessen. Syftet är vidare att undersöka om styvhet i upplag samt kontinuitet mellan element kan tillgodoräknas vid dimensionering.

Examensarbetet utreder följande frågeställning:

- Kan delvis inspanning och/eller kontinuitet mellan håldäckselement beaktas vid dimensionering och hur påverkar detta vibrationsnivåerna?

1.3 Avgränsningar

Examensarbetet avgränsas till att undersöka håldäckelementens dynamiska beteende utifrån första egenfrekvensen. Avgränsning görs till att endast studera håldäckselement som är enkelspända mellan upplag. Examensarbetet undersöker inte inverkan av olika upplagstyper eller andra typer av prefabricerade bjälklagselement i betong.

1.4 Metod

Arbetet är uppdelat i två delmoment. Den första delen innefattar experimentella mätningar som utfördes med hjälp av accelerometrar på håldäckselement i fyra olika mätningar. Mätobjekten varierade utifrån hur långt i produktionsprocessen de hade kommit.

- Fall 1: Innan foggjutning eller avjämningsmassa var applicerad
- Fall 2: Efter att foggjutning utförts men innan avjämningsmassa applicerats

- Fall 3: Foggjutning var utförd, avjämningsmassa applicerat och innerväggar var monterade

För det sista fallet genomfördes två mätningar. Utifrån de tre olika fallen kunde de dynamiska egenskaperna av elementen fastställas, egenskaperna baseras på egenfrekvens och dämpningen av elementen.

Den andra delen är en numerisk analys. Inom ramen för analysen genomfördes parameterstudier av finita element modeller i Abaqus. Studien analyserade håldäckselement genom att tjockleken hölls konstant medan antaganden om längd, pågjutning, massa och laster samt upplagsvillkor och kontinuitet över stöd varierades.

Slutligen kunde resultatet från de två analyserna jämföras för att dra slutsats om det finns fall där inspänning och kontinuitet kan beaktas mellan håldäckselement och över upplag.

1.5 Disposition

Arbetet består av följande sju kapitel:

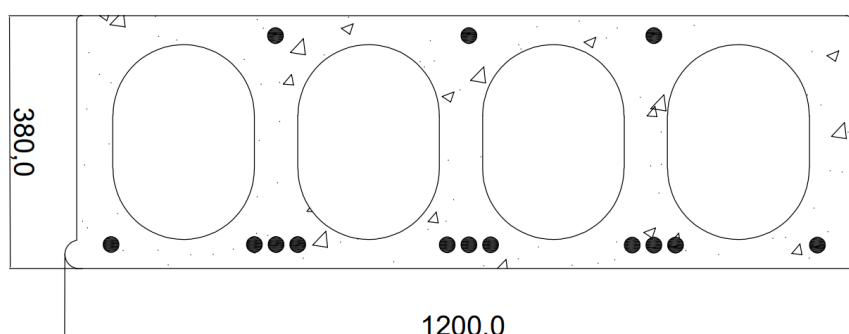
- *Kapitel ett* - introducerar problemet med håldäckselement och beskriver metod, syfte, frågeställning och avgränsningar för arbetet.
- *Kapitel två* –håldäck beskrivs med redogörelse för dess utformning och egenskaper.
- *Kapitel tre* – redovisar det teoretiska ramverket som arbetet utgår ifrån, såsom finita elementmetoden, strukturdynamik och analytiska metoder för vibrationsberäkning.
- *Kapitel fyra* – redogör för den experimentella mätningen med utförande, förutsättningar och process för att sedan redovisa resultatet ifrån mätningarna.
- *Kapitel fem* – den numeriska analysen presenteras utifrån hur den är utförd och vilken indata som använts för att sedan redovisa resultatet som erhöles.
- *Kapitel sex* - jämförelse mellan mätningarna och den numeriska analysen för varje mätning separat innan en slutlig övergripande analys utförs.
- *Kapitel sju* – Slutsats och förslag till fortsatta arbeten presenteras.

2 Håldäcksbjälklag

I följande kapitel ges en beskrivning av håldäckselement, för dess utformning och egenskaper. Vidare presenteras begrepp och produktionssteg för håldäcksbjälklag, från element till färdigt bjälklag.

2.1 Håldäckselement

Håldäcksbjälklag är en typ av bjälklag som består av prefabricerade håldäckselement i betong. Elementen gjuts på fabrik i löpande formar med kanaler i djupled av tvärsnittet. Elementen är försedda med förspänd armering i underkant och ibland även tryckarmering i ovkant. Kanalerna och armeringens placering visas i figur 1. Genom kanalernas utformning reduceras elementens egenvikt, vilket i kombination med spännarmeringen möjliggör stora spännvidder och hög bärkapacitet.



Figur 1 - Tvärsnittsfigur för ett håldäck 38 med kanaler och armering utritade.

2.2 Dimensioner och längder

Håldäckselement tillverkas i olika tjocklekar och längder. Som branschstandard tillverkas håldäck 1 200 millimeter breda och kapas vid behov därifrån till smalare bredder (Svensk Betong, 2025). Tjockleken kan varieras för elementen baserat på vilka laster och spännvidder som produkten ska klara av.

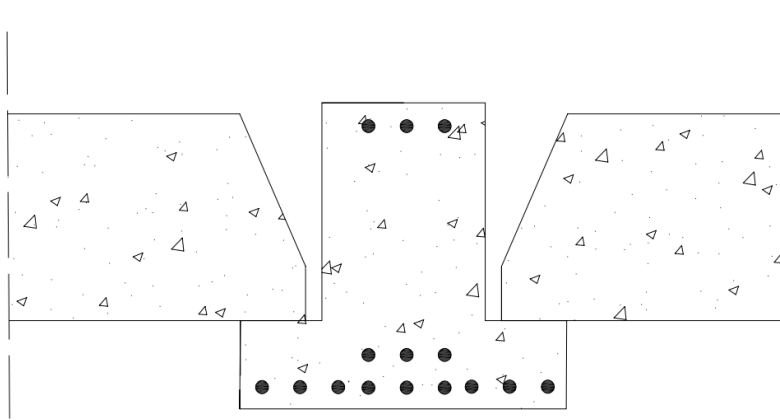
Det finns flera producenter av håldäckselement, Starka Betong är en av dessa aktörer i södra Sverige. Företagets produktutbud omfattar flera olika elementtjocklekar med tillhörande rekommenderade längdintervall. Vilken spännvidd och lastkapacitet ett håldäck klarar beror delvis på vilken armering som väljs. Starka erbjuder tre olika armeringsalternativ för samtliga elementtyper (Starka Betong, 2014). I tabell 1 presenteras fyra av håldäckselementen som Starka Betong producerar (Starka Betong, 2014).

Tabell 1: Fyra håldäckselement som Starka Betong erbjuder.

Håldäck	Tjocklek [mm]	Längd intervall [m]
HD/F 20	200	6 - 9
HD/F 27	265	7 - 13
HD/F 32	320	9 - 15
HD/F 38	380	10 - 17

2.3 Upplag, foggjutning och pågjutning

Håldäckselement kan samverka med flera olika typer av byggnadselement exempelvis stålbalkar, betongbalkar eller betongväggar. Hur anslutningen mellan elementen och upplaget ser ut kan skilja sig lite för de olika varianterna, för typen av betong-hattbalkar visas tvärsnittet i figur 2. Där vilar ändarna av håldäcken på balkens flänsar som likt namnet antyder påminner om en hatt i tvärsnittet.



Figur 2: Tvärsnittsfigur över håldäck upplagda på hattbalk innan foggjutning

Ändarna av håldäck är snedskurna för att skapa rum vid anslutning till bärande upplag. Vissa av kanalerna är även öppnade ca 500 millimeter för att armeringsjärn som finns fastgjutet i balken ska kunna böjas ut och gutas fast i elementet. Illustration över håldäckselement som är utplacerade på hattbalkar innan foggjutning visas i figur 3.



Figur 3: Bild över håldäckselement upplagda på håldäck innan foggjutning. Till vänster översiktsbild över en balk med flera element och till höger in zoomat över ett elements bredd.

Håldäck utformas med små ”läppar” som löper i längdriktningen med elementen i underkant av tvärsnittets tjocklek, se figur 1. Läppen bidrar till att skapa en anslutning mellan håldäckselementen i tvärriktningen men med ett gap om några centimeter för att plattorna ska ligga ostört till varandra. Figur 4 visar håldäckselement översiktligt utlagt innan foggjutning samt närbild på hålrummet som uppstår mellan elementen i tvärriktningen.



Figur 4: Håldäckselement utlagda över ett bjälklag innan foggjutning. Till vänster en översiktlig bild och till höger en inzoomad illustration över hålrummet mellan elementen i tvärriktningen.

Såväl mellanrummet i längdriktningen mellan elementen som hålrummet vid upplagen gjuts slutligen samman vid s.k. foggjutning. Betong hälls ner i hålrummen runt om elementen tills att en jämn ovansida har uppnåtts. Viktigt är att de interna kanalerna är försedda med plugg så att de inte fylls med betong. Foggjutningen mellan elementen och balken samt mellan respektive element bidrar till att skapa en mekanisk förbindelse som förhindrar inbördes rörelse.

Eftersom spännarmeringen i håldäckselementen ligger i underkant av tvärsnittet bidrar det till en uppåtböjd krökning (så kallad *kamning* eller *uppböj*). För att skapa plana bjälklag och möjliggöra golvläggning utan nivåskillnader mellan elementen eller över upplag appliceras en avjämningsmassa som normalt har en tjocklek mellan cirka 30–70 millimeter (Johansson, 2009). För bostadsbyggnader rekommenderar Starka Betong (2014) en avjämningsmassa på cirka 60 millimeter före ytbeläggning. I bjälklag med högre komfortkrav, där vibrationsnivåer eller dynamiska laster kan vara mer påtagliga, kan även armerade pågjutningar användas ovanpå elementen. Någon övre rekommendationsgräns för dessa finns inte, men pågjutningstjocklekar upp till cirka 100 millimeter förekommer (Linotol, 2020).

3 Strukturodynamik och modellering

I följande kapitel kommer det teoretiska ramverket för arbetet att presenteras. Först redogörs teorin för finita elementmetoden efterföljt av teorin i strukturodynamik. Slutligen beskrivs det bakomliggande egenskaperna och teorin för balkar respektive plattor.

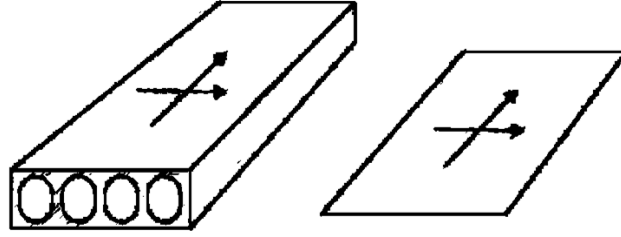
3.1 Finita elementmetoden

Finita elementmetoden (FEM) är en numerisk beräkningsmetod som används för att lösa fysikaliska problem som oftast inte har någon analytisk lösning. Metoden bygger på att strukturen delas upp i mindre delar, s.k. *finita element*. Varje element tilldelas specifika egenskaper och beräknas för en approximativ förskjutning.

Finita elementmetoden kan användas till olika tillämpningsområde, exempelvis grundvattenflöde, värmeledning och elastiska beteenden hos strukturer. Det finns flera kommersiella program som kan användas för att utföra finita elementberäkningar, Abaqus och RFEM är två exempel. Detaljer och teori gällande finita elementmetodens uppbyggnad och tillvägagångssätt beskrivs exempelvis av (Ottoson & Petersson 1992).

För att modellera håldäckselementen och genomföra numeriska analyser användes finita elementprogrammet Abaqus. Abaqus används inom olika industrier för att lösa komplexa problem genom finita elementmetoden (3DExperience, 2025).

För att erhålla skalelement som representerar håldäckselementen beräknades styvhetsmatrisen i finita elementprogrammet RFEM (Dlubal Software, 2025). Programmet innehåller fördefinierade skalelement för håldäck som utifrån indata (se tabell 1) genererar styvhetsmatriser. Genom styvhetsmatriserna kan håldäckselementen representeras av skalelement, se figur 5. Den framtagna styvhetsmatrisen överfördes därefter till Abaqus, där de numeriska analyserna genomfördes.



Figur 5: Håldäckselement som representeras av skalelement.

Ett element som utsätts för yttre last kommer baserat på dess styvheter att bli olika mycket deformerat. Då en platta blir utsatt för ren böjning ges sambandet mellan moment (M), styvhet (\tilde{D}) och krökning (κ) av ekvation 1 (Ottosson & Petersson 1992).

$$M = -\tilde{D}\kappa \quad (1)$$

Då en plattas membranstyvhet i form av förmåga att ta normalkrafter även beaktas kan ekvationen beskrivas i utvecklad form enligt ekvation 2. Ekvationen visar hur normalkrafter är beroende av töjning och membranstyvhet i planet, medan moment är beroende av böjstyvhet och krökning. Ekvation 3 visar ingående parametrar för membran- och böjstyvhet för en platta, som vid beaktning av membranverkan ofta benämns som *skal* istället för platta.

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & D_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{45} & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{EA_x}{1-\nu^2} & D_{22} &= \frac{EA_y}{1-\nu^2} \\ D_{12} &= \frac{\nu D_{11} + \nu D_{22}}{2} & D_{33} &= G(d_p - d) \\ D_{44} &= \frac{EI_{xx}}{1-\nu^2} & D_{55} &= \frac{EI_{yy}}{1-\nu^2} \\ D_{45} &= \frac{\nu D_{44} + \nu D_{55}}{2} & D_{66} &= GI_k \end{aligned} \quad (3)$$

Där E står för elasticitetsmodulen, A för tvärsnittsarea, I för tröghetsmomentet, ν för poissons tal, G för skjuvmodulen, I_k för vridtröghetsmomentet, och d/d_p för plattans faktiska respektive effektiva tjocklek.

3.2 Strukturdynamik

När en struktur är utsatt för dynamisk påverkan, dvs. förändringar i utböjning och last över tid, är statiska analyser i allmänhet inte applicerbara. Dynamisk last kan exempelvis vara vindlaster, jordbävningar eller fotsteg. För att förstå en strukturs egenskaper vid excitation av dynamisk påverkan är egenfrekvenserna viktiga. Egenfrekvenserna är de frekvenser som en struktur själv svänger med då den, utan extern last, släpps ifrån deformerat tillstånd. Om strukturen skulle vara utsatt för en dynamisk last som sammanföll med samma svängningsfrekvens som egenfrekvensen skulle resonans uppstå. Resonans innebär att strukturen börjar svänga med ökande amplitud (last för kontinuerligt in energi) och för tillräckligt stor svängning kan kapaciteten i strukturen uppnås och kollaps uppstå (Chopera, 2012).

3.2.1 Rörelseekvationen

För att analysera en dynamisk struktur är fem parametrar väsentliga: strukturens massa, styvhet och dämpning samt utböjning och lasten på strukturen. Förhållandet mellan parametrarna beskrivs i rörelseekvationen som visas i ekvation 4.

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (4)$$

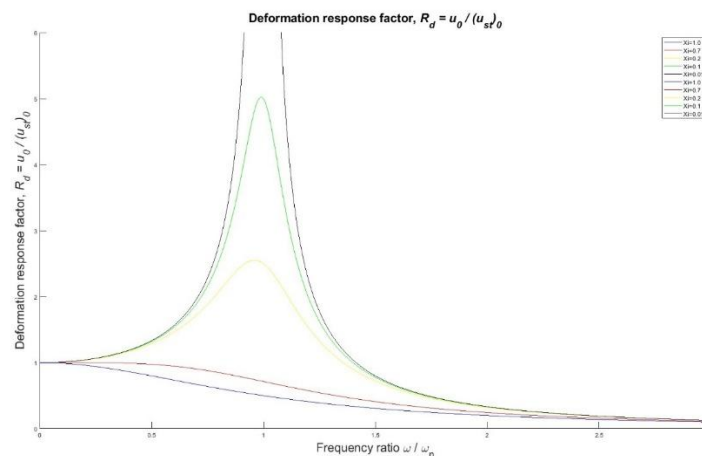
I ekvationen står m för massan i systemet, c för dämpningen, k för styvheten, u för deformation och t för tiden. Variabler som \ddot{u} och \dot{u} är andra respektive första derivatan av deformationen i relation till tid och därmed acceleration och hastighet. Variabeln p beskriver extern kraft som påverkar systemet. Ekvation 4 representerar ett system med en frihetsgrad (SDOF). För större system kan i stället ett ekvationssystem tas fram, som representerar flera olika frihetsgrader (MDOF), samt matriser som beskriver de dynamiska egenskaperna för hela systemet. Med n frihetsgrader ersätts m , c och k av $n \times n$ matriser, medan u och p bildar $n \times 1$ vektorer. Rörelseekvationen för ett flerfrihetsgradsystem visas i ekvation 5. \mathbf{M} , \mathbf{C} , och \mathbf{K} är de globala matriserna för massa, dämpning och styvhet medan \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$ och \mathbf{f} är deformationen, hastigheten, accelerationen och krafter i det globala systemet (Chopra, 2012).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (5)$$

3.2.2 Dämpning och resonans

Resonans är fenomenet som uppstår då lastfrekvensen är samma som egenfrekvensen av strukturen och svängningen av strukturen växer. Lasten bidrar kontinuerligt med energi som ökar amplituden för svängningen, vilket kan leda till kollaps av strukturen.

Dämpning refererar i strukturdynamik till förlusten av energi inom ett system och medför att vibration över tid kommer att försvinna. Dämpning är dock komplext och svårt att exakt bestämma. Det som i byggnader händer är att energin som finns i systemet försvinner genom friktion och energiöverföring till andra delar (Chopra, 2012). Dämpning påverkar hur stark resonans som kan uppstå och hur snabbt svängningar klingar ut. Vid en hög dämpning blir svängningen lägre och dämpas snabbt ut medan det vid låg dämpning blir högre svängningar, detta illustreras i figur 6 nedan. För byggnader är dämpningen ofta mindre än 10% och då det ingenjörsmässigt anses att dämpning lägre än 20% inte påverkar egenfrekvensen (Chopra, 2012) så beaktas vanligtvis inte dämpning vid kontroller av egenfrekvenser i dimensionering.



Figur 6: Illustration av dämpningens inverkan på resonans

För ett system med en frihetsgrad (SDOF) är den odämpade egenfrekvensen beroende av styvheten och massan i ekvation 5. Egenfrekvensen kan då bestämmas med ekvation 6.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6)$$

Där ω_n är den naturliga egenfrekvensen strukturen svänger med. För ett system med dämpning kan egenfrekvensen beräknas genom ekvation 7, där ζ är dämpningskoefficienten.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}(1 - \zeta^2)} \quad (7)$$

3.2.3 Egenvärdesanalys

För system med flera frihetsgrader (MDOF) finns det lika många olika egenfrekvenser som antal frihetsgrader. För ett odämpat MDOF system utan extern last kan rörelseekvationen (ekvation 5) skrivas om till ett egenvärdesproblem, se ekvation 8.

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M})\Phi_n = 0 \quad (8)$$

\mathbf{K} står för styvhetsmatrisen, ω för den naturliga egenfrekvensen, \mathbf{M} för massmatrisen och Φ för vektor med egenmod. Egenmoderna beskriver förhållandet mellan förskjutningar i alla frihetsgrader när systemet är i svängning vid tillhörande egenfrekvens.

Lösningen kommer att bestå av n antal egenfrekvenser, en för varje modform och lika många som antalet frihetsgrader i systemet. I en verklig struktur finns oändligt antal egenfrekvenser. För att analysera en strukturs dynamiska egenskaper studeras vanligtvis endast de lägsta egenfrekvenserna. Anledningen är att gånglasterna i normalfallet har relativt låg frekvens. Därmed behöver endast de lägsta egenfrekvenserna av strukturen studeras för att kontrollera att dessa inte sammanfaller med lastens frekvens (Chopra, 2012).

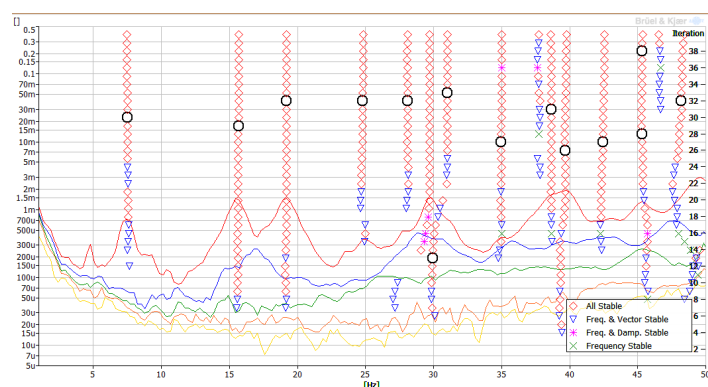
3.2.3 Experimentell modalanalys

Vid experimentell modalanalys exciteras en struktur med en känd kraftimpuls, vanligen genom en impulshammare utrustad med en kraftsensor. Hammaren registrerar både den applicerade kraften (N) och den tid under vilken impulsen verkar, vilket tillsammans beskriver kraftens variation över tiden. Samtidigt mäts strukturens respons med accelerometrar, som registrerar acceleration (m/s^2) som funktion av tid (Crystal Instruments, 2016).

För att analysera sambandet mellan excitation och respons i frekvensdomänen beräknas överföringsfunktioner. Funktionerna beskriver förhållandet mellan uppmätt accelerationens amplitud och den applicerade kraftens amplitud över ett givet frekvensspektrum. Överföringsfunktioner uttrycks i enhetsformen m/s^2 per N och visar hur strukturen reagerar vid olika lastfrekvenser (Crystal Instruments, 2016).

För att erhålla överföringsfunktioner omvandlas signalerna från tidsdomänen (amplitud över tid) till frekvensdomänen (amplitud över frekvens) genom Fast Fourier Transformation (FFT). Det är en numerisk algoritm som möjliggör att tidsserierna transformeras till frekvensdomänen. Eftersom mätutrustningen även registrerar små vibrationer och bakgrundsbrus utförs flera mätningar vid varje punkt. För att reducera brusnivån och förbättra uppskattningen av den strukturella frekvensresponsen medelvärdebildas de olika mätningarna för samma position (Crystal Instruments, 2016).

Varje mätpunkt motsvarar en frihetsgrad i modellen, och genom att kombinera samtliga överföringsfunktioner i en gemensam datamodell kan strukturens modformer och egenfrekvenser identifieras. Egenfrekvenserna representeras av toppar i Frequency Response Function (FRF) -diagrammet, medan motsvarande modformer härleds genom analys av amplitud och fas för respektive mätpunkt vid dessa frekvenser (Crystal Instruments, 2016). Exempel på FRF-kurvor visas i figur 7.



Figur 7: FRF funktioner för olika accelerometrar i frekvensdomänen. Identifierade egenfrekvenser är markerade med svarta cirklar.

3.3 Teori för balkar och plattor

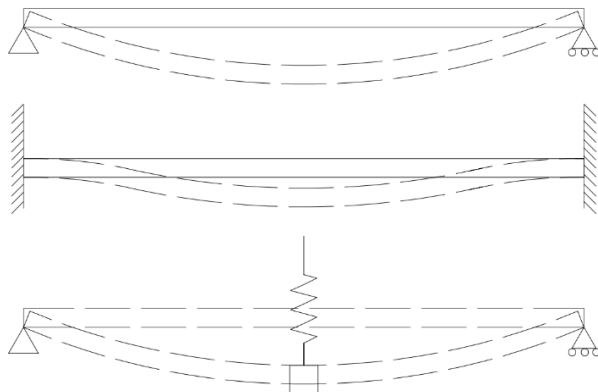
Inom dimensioneringsteorin finns ingen enhetlig praxis för hur bjälklag ska modelleras eller antas vara inspända för att uppfylla ställda krav på brukbarheten. Det är upp till konstruktören att göra väl avvägda antaganden som på ett realistiskt sätt speglar konstruktionens verkliga beteende, och utifrån dessa bestämma lämpliga dimensioner och materialparametrar. Ett sätt att dimensionera håldäckselementen är genom att betrakta dem som balkar.

3.3.1 Balkar

För att analysera en balk dynamiskt skriver Heyden et al. att balken kan ses som en fjäder med en frihetsgrad centrerat över spännvidden av balken. Fjäders styvhet kan då ses som styvheten för nedböjning i balken och massan som massan i balken. Massan skall dock anpassas till att all massa inte är medsvängande. Ett ingenjörstantagande är att anta halva massan som medsvängande i vibrationerna. Nedan anges ekvationerna för den första egenfrekvensen av en balk som är fritt upplagd (ekvation 10) respektive fast inspänd (ekvation 11). Ekvationerna är en utvecklad form för ekvation 6 (kapitel 3.2.) med styvhet och massa och kommer ifrån Bernoulli-Eulers balkteori. I formlerna är massan inte halverad utan görs separat (Heyden et al, 2008). Illustration av fritt upplagd balk och fast inspänd balk med respektive nedböjning visas i figur 8, figuren illustrerar även approximationen och hänvisningen till fjäderelementet.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{384EI}{5L^3m}} \quad (10)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{384EI}{L^3m}} \quad (11)$$



Figur 8: Illustration av fritt upplagd balk samt fastinspänd med respektive nedböjning. Illustration av antaget en-frihetsgradsystem visas på nedersta balken

3.3.2 Plattor

För att analysera plattor är Kirchhoffs platteori en utveckling av Bernoulli balkteori till två dimensioner. Platteorin är applicerbar för plattor som är tunna då det antas att normalen till mittplanet förblir rak och vinkelräta även efter deformation. Skjuvdeformationer genom tjockleken blir därmed försummade, en förenkling som ingenjörsmässigt ofta anses accepterad. Till skillnad från balkteorin finns det för plattor böjmoment i två riktningar samt ett vridmoment som beskriver hur böjningen i en riktning påverkar böjningen i den andra (Ottosen & Pettersson, 1992).

Baserat på ekvation 2 och 3 kan styvhetsmatrisen för en platta härledas till matris i tabell 2. Notera att detta är samma matris som redovisas i ekvation 2.

Tabell 2: Styvhetsmatris för platta med okopplad membran- och böjstyvhets.

$\frac{EA_x}{1-\nu^2}$	$\frac{\nu D_{11} + \nu D_{22}}{2}$	0	0	0	0
$\frac{\nu D_{11} + \nu D_{22}}{2}$	$\frac{EA_y}{1-\nu^2}$	0	0	0	0
0	0	$G(d_p - d)$	0	0	0
0	0	0	$\frac{EI_{xx}}{1-\nu^2}$	$\frac{\nu D_{44} + \nu D_{55}}{2}$	0
0	0	0	$\frac{\nu D_{44} + \nu D_{55}}{2}$	$\frac{EI_{yy}}{1-\nu^2}$	0
0	0	0	0	0	GI_k

4 Experimentell mätning

I följande kapitel presenteras tillvägagångssätt och resultatet från experimentella mätningar av egenfrekvenser för håldäckselement/bjälklag. För att identifiera beteenden i olika byggsleden genomfördes fyra mätningar med olika förutsättningar.

4.1 Genomförande

Mätningarna baserades på modalanalys (beskrivet i kapitel 3.2.3), där accelerometrar placerades på ett håldäckselement och systemet exciterades med en impulshammare. Den uppmätta responsen registrerades och analyserades med programvara från Brüel & Kjær, som identifierade systemets modformer samt de tillhörande egenfrekvenserna.

4.1.1 Förutsättningar

Vid samtliga mätningstillfällen eftersträvades att omgivningen skulle vara tyst och fri från störningar. Förekomst av ljud, vibrationer eller rörelser i närheten, exempelvis från liftar eller annan byggutrustning, kan påverka mätresultaten och ge upphov till avvikelser. För att minimera dessa felkällor utfördes mätningarna därför efter arbetstid på byggarbetsplatserna.

4.1.2 Utrustning

Mätutrustningen som används kommer ifrån Brüel & Kjær Vibro som är en producent och leverantör av mätutrustning för vibrationer. Utrustningen som användes presenteras i tabell 3.

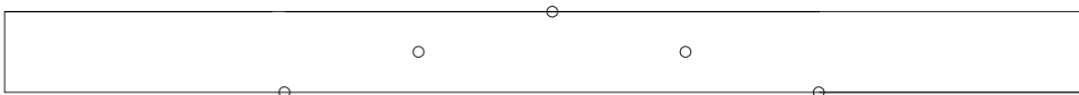
Tabell 3: Mätutrustning använd vid experimentell mätning

Produkt	Antal	Typ
Frontpanel	1	Front end 3056
Accelerometer	4	Delta Tron Acc 457 001
Accelerometer	1	Delta Tron Acc 001
Impulshammare	1	Modal Hammer 52472
Programvara	1	BK connect 2022

4.1.3 Uppsättning och utförande

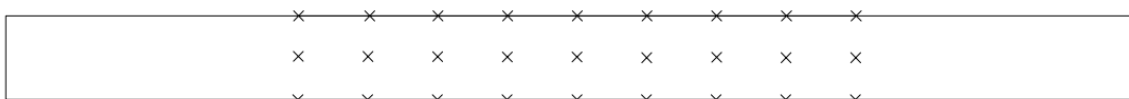
Mätningar genomfördes med 5 accelerometrar som placerades ut i ett sick-sack mönster på mitten av ett håldäckelement. Med hjälp av impulshammare exciterades bjälklaget till svängning utifrån ett flertal olika punkter.

Accelerometrarnas placering mättes in för att i alla mätningar placeras utifrån samma mönster och bestämda avstånd till änden av elementet. Accelerometrarnas placering har valts för att fånga rörelserna av den första böjmoden och har därför placerats i sick-sack mönster med förskjutning på 50 cm i tvärriktningen och 2 meter i längdriktningen, figur 9 illustrerar placeringen av accelerometrarna.



Figur 9: Placering av accelerometrarna på elementen, planvy.

Excitationspunkterna var placerade centrerat över håldäckelementet för att excitera första egenmoden. Placeringarna förflyttades med 50 cm i tvärriktningen och 1 meter i längdriktningen. Första punkten placerades med samma avstånd från upplag som den första accelerometern. Vid varje mätpunkt applicerades tre impulser och tre mätningar för att erhålla ett genomsnittligt resultat (medelvärdesberäkning, se kapitel 3.2.3.). Figur 10 illustrerar impulspositioner.



Figur 10: Placering av impulser på elementen, planvy.

Vid de mättillfällen då plattorna var täckta med avjämningsmassa var exakt position av elementen svåra att bestämma. Positionerna bestämdes för dessa fall utifrån ritningar och inspektion av plattornas position sett underifrån. Mätpunkterna positionerades för att minimera omgivande störningsmoment och minska inverkan av upplag i tvärriktningen. Inverkan från upplag i tvärriktningen kunde ej elimineras men alla mätningar har utförts minst 4 plattor (4,8 meter) ifrån ett bärande upplag i tvärriktningen.

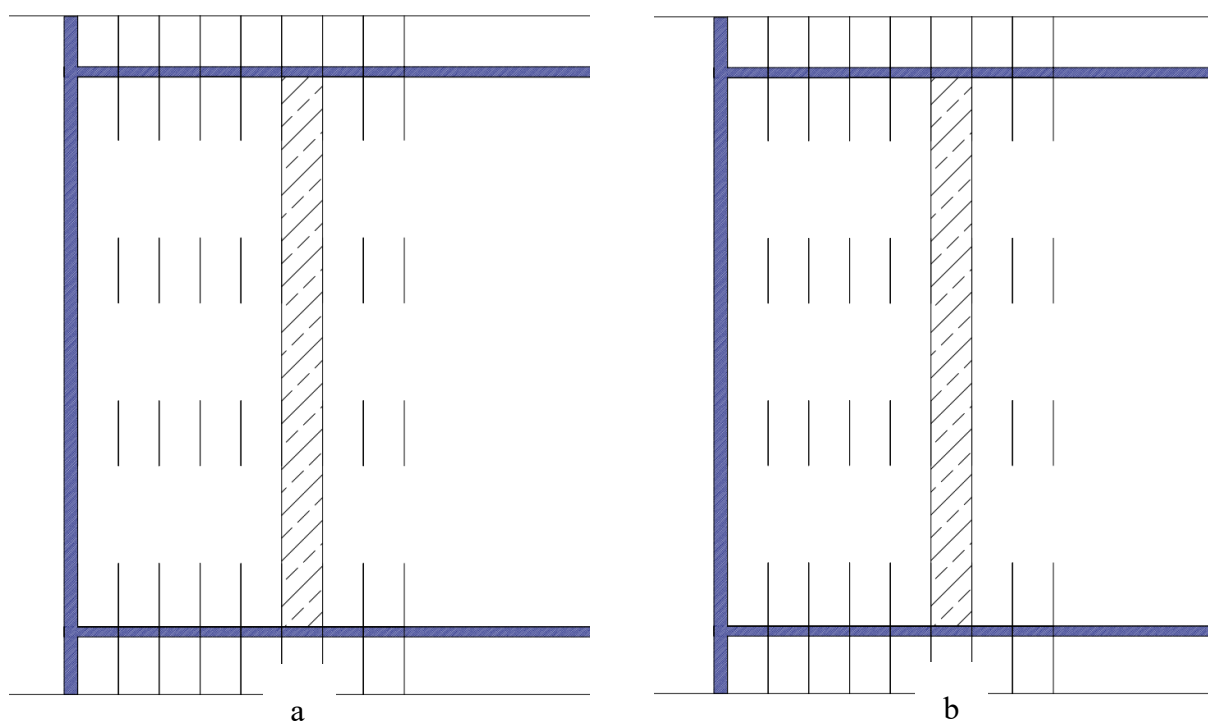
4.1.3.1 Mätserie

Fyra olika mätningar utfördes för fallen definierade i kapitel 1.5 med varierande förutsättningar. Mätningarna presenteras nedan utifrån dess olika förutsättningar. I tabell 4 sammanställs mätningarnas skillnader och tillhörande planritning över mätningarna visas i figur 11 och 12. I planritningen är håldäcket som mättes på markerat och blåa element visas för bärande upplag medan röda element visar lätta innerväggar nära mätningen.

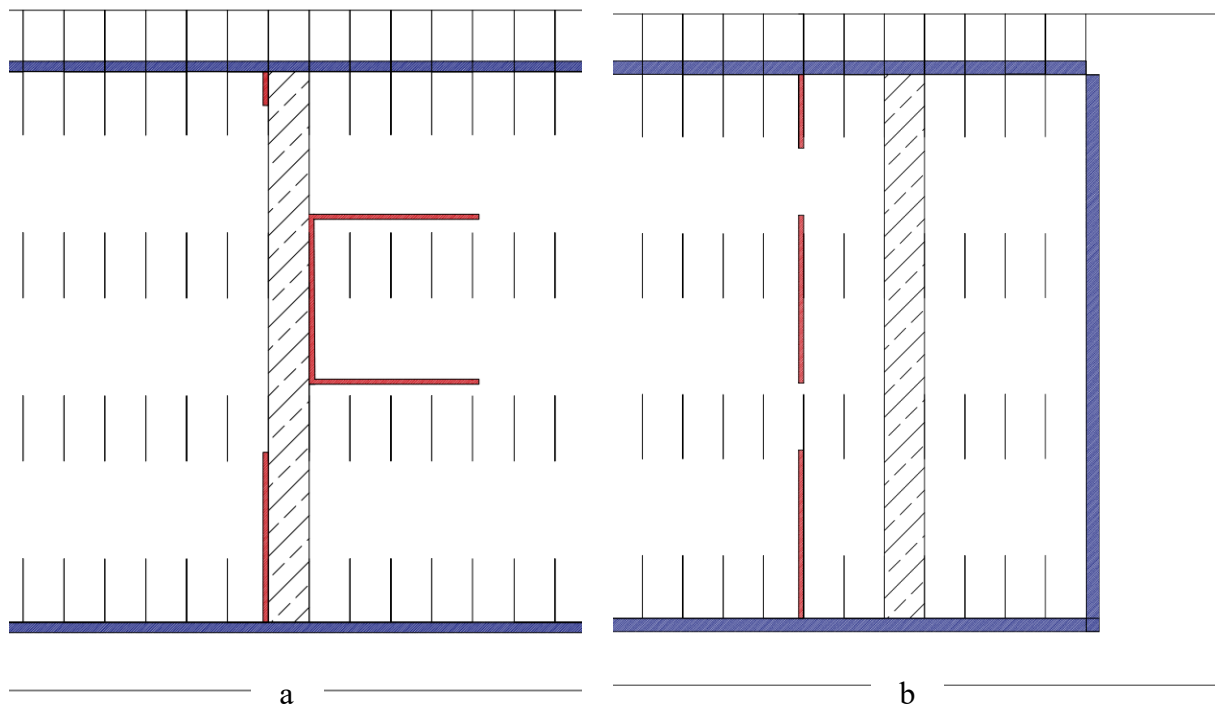
1. Den första mätningen genomfördes på håldäckselement innan de hade foggjutits eller avjämningsmassa var applicerad.
2. Den andra mätningen utfördes på ett element placerat en våning under elementet i första mätningen, i motsvarande position. Elementet vilade på hattbalkar och hade vid detta tillfälle foggjutits såväl tvärs mellan plattorna som över upplagsbalkarna.
3. Den tredje mätningen utfördes på ett håldäckselement som är beläget i en annan konstruktion som var mer färdigställd. Här var elementen inte bara foggjutna, utan även försett med två skikt avjämningsmassa, ett grövre utjämningsskikt och ett tunnare finspackel, till en sammanlagd tjocklek på cirka 50–60 mm. Elementen vilade även här på hattbalkar. Likt planritningen i figur 11 kan det urskiljas hur den aktuella plattan finns i en korridorsektion där flera lätta gipsinnerväggar löper växelvis längs elementet. Gipsväggarna återfinns i samma mönster ovan såväl som under bjälklaget. Både mätning 3 och 4 är utförd på håldäckselementet längst ut mot fasaden och vilar därmed i en ända på kantbalken och fasaden.
4. Den fjärde mätningen genomfördes i samma byggnad och våningsplan som mätning 3. Det aktuella elementet är på höger sida ca 4,8 meter ifrån fasadelement och en IPE 360-balk. På vänster sida löper parallellt en lätt gipsvägg på cirka tre meters avstånd.

Tabell 4: Mätfallen med dess respektive specifikationer

Mätning	Fall	HD/F platta	Längd HD/F element [m]	Foggjuten	Avjämnings tjocklek [mm]	Planritning över mätning
1	1	38	16.2	-	-	Figur 11 a
2	2	38	16.2	Ja	-	Figur 11 b
3	3	38	16.6	Ja	50-60	Figur 12 a
4	3	38	16.6	Ja	50-60	Figur 12 b



Figur 11: Planritning över de första två mätningarna. Mätning 1 till vänster och mätning 2 till höger. Blå färg innebär bärande upplag.



Figur 12: Planritning över mättilfälle 3 och 4. Mätning 3 till vänster och 4 till höger. Blå färg innebär bärande upplag och röd lätta innerväggar.

4.1.4 Felkällor

Under mätningarna reflekterades över möjliga felkällor som kan ha påverkat resultaten. Gällande uppsättning och utförande noterades vid fall 3 och 4 att det var svårt att exakt lokalisera elementens position, eftersom dessa var täckta av avjämningsmassa. Detta kan ha medfört att mätningarna potentiellt utfördes över en fog i längdriktningen, vilket innebar att accelerometrarna placerats på två intilliggande element. En ytterligare osäkerhet gäller accelerometrarnas exakta läge utmed längden, då håldäckselementens ändrar inte var tydligt identifierbara. Detta kan ha resulterat i en mindre förskjutning av mätpunkterna i förhållande till elementets centrumlinje har uppstått.

En potentiell felkälla rör utförarens förflyttning under mätningen. Vid excitation med impulshammare förflyttade sig experimentatorn över håldäckselementet, vilket tillförde en punktlast på cirka 90 kg. Eftersom egenfrekvensen är beroende av konstruktionens massa kan denna extra belastning ha påverkat mätresultatet i viss grad. Experimentatorn placerade sig alltid på intilliggande element för att inte störa mätningen men kan fortfarande ha påverkat resultatet.

Ytterligare osäkerheter identifierades vid mättillfälle 1 och 2, då mätningarna utfördes utomhus på håldäckselement som inte var väderskyddade. Under dessa tillfällen rådde högre vindhastigheter, vilket kan ha orsakat störningar i mätutrustningen genom oönskade vibrationssignaler. Genom att tillämpa medelvärdesberäkning antogs dessa störningar i stor utsträckning reduceras, varför resultaten fortsatt bedömdes vara representativa och tillämpbara.

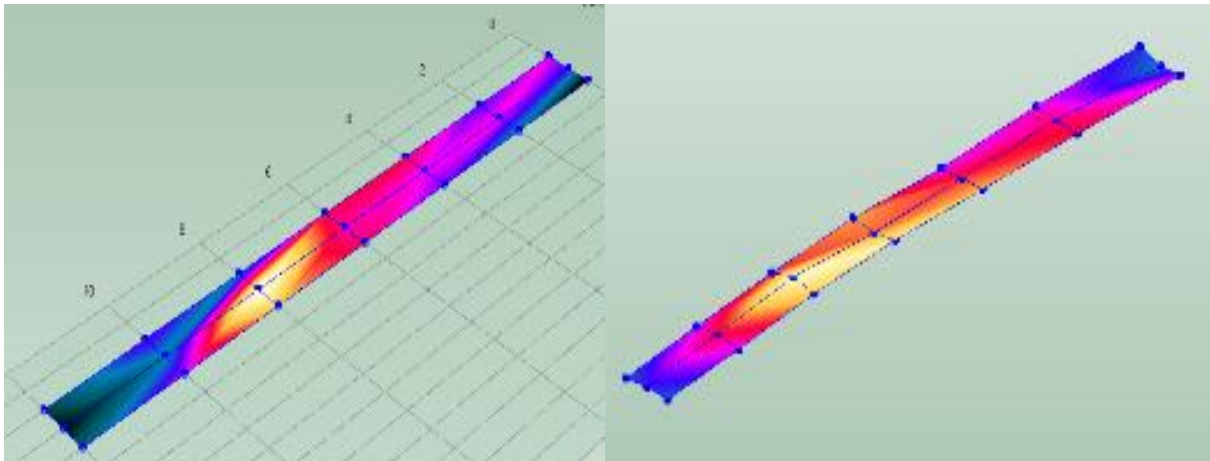
4.2 Resultat av experimentella mätningar

Resultatet av de experimentella mätningarna redovisas genom egenfrekvens och dämpningskoefficienten för den första, andra och tredje böjmoden i tabell 5 nedan. Alla mätningars FRF kurvor och stabilitetskorningar med tillhörande stabila egenfrekvenser redovisas i Appendix A.

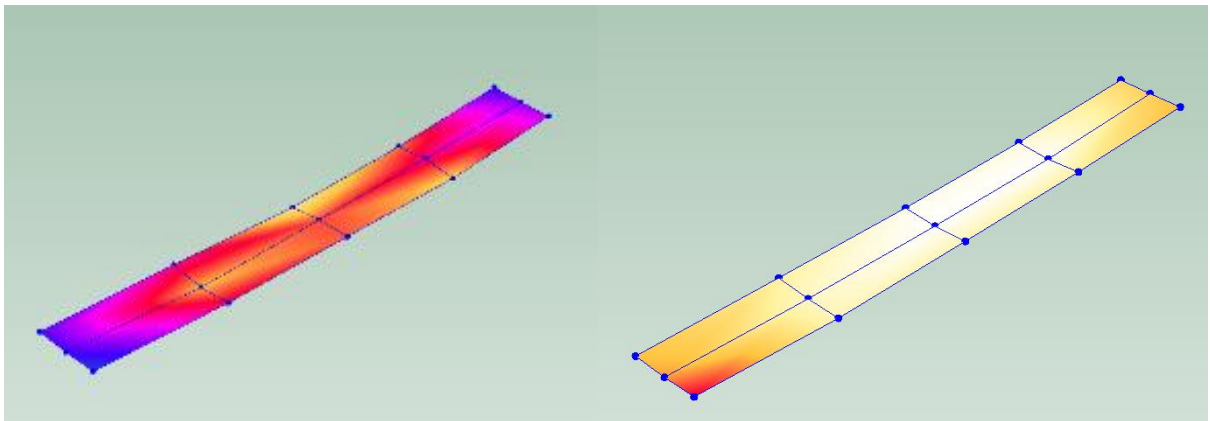
Tabell 5: Mätresultat med egenfrekvenser och dämpningskoefficienter för de tre första böjmoderna för mätning 1 till 4

	Böj 1 [Hz]	Dämpning [%]	Böj 2 [Hz]	Dämpning [%]	Böj 3 [Hz]	Dämpning [%]
Mätning 1	4.66	4.77	9.27	6.22	12.1	4.38
Mätning 2	7.51	5.34	15.68	3.31	20.0	3.81
Mätning 3	8.79	16.33	16.69	11.71	26.44	12.97
Mätning 4	12.43	11.23	15.15	9.68	23.69	9.11

Figur 13 och 14 visar första egenmoden för mätning 1, 2, 3 respektive 4.



Figur 13: Egenmod 1 för mätning innan foggjutning respektive efter foggjutning



Figur 14: Första egenmoden för mätning efter foggjutning, avjämningsmassa och innerväggar, långt ifrån upplag i tvärriktningen respektive nära upplag

Resultatet från de experimentella mätningarna visar på att en stor förändring sker i egenfrekvensen av elementen när de foggjuts. Dämpningen förändras inte i någon större utsträckning mellan mätningarna. Ett resultat som tyder på att dämpningen inte blir påverkad i detta skede men till följd av foggjutningen beter sig elementen som plattor med upplag på flera sidor.

För mätning tre när avjämningsmassa var applicerad och innerväggar var monterade stiger egenfrekvensen ytterligare från mätning två, inte med samma storlek men ändå med drygt 1 Hz. Att notera är hur dämpningen kraftigt ökar för denna mätning mot resultatet från mätning ett och två. Resultaten från mätning fyra indikerar att egenfrekvensen stiger ytterligare medan

dämpningen avtar jämfört med mätning nummer tre. Den sistnämnda mätningen befinner sig närmast ett upplag i tvärriktningen och kan därmed även betraktas som en tresidigt upplagd platta vilket bidrar till ökad styvhet. För att tolka förändringen av dämpningen kan en möjlig orsak vara innerväggarnas placering som nu är längre ifrån mätningen. För mätning fyra bör noteras att egenfrekvensen för andra böjmoden är snarlikt samma som för mätning två och därmed att modellerna bör vara jämförbara.

Att utifrån de experimentella mätningarna utläsa vilka parametrar som påverkar egenfrekvensen är svårt, det kan vara närhet till längsgående upplag, innerväggar eller avjämningsmassa som bidrar. Vad som säkert går att säga är att egenfrekvensen stiger mellan mätningarna.

5 Numerisk Parameterstudie

För att studera vilka parametrar som påverkar egenfrekvenserna i håldäckselement genomfördes en numerisk parameterstudie. Studien kan genom variation av olika antaganden visa vad som bidrar till förändring av egenfrekvensen. I detta kapitel presenteras metodik för vilka antagande som varierar och därefter resultatet.

5.1 Genomförande

Syftet är att studera hur olika antagandena påverkar komfortvibrationer i håldäckselementen utifrån första böjmoden. Skalelement har modellerats i finita elementprogrammet Abaqus för att sedan förses med ekvivalenta styvheter som motsvarar ett håldäckselement. Modellerna har baserats på skalelement med storlek om 50 millimeter som varit fyrnodiga vid parameterstudien. Då slutsatserna har testats för respektive mätfall har solidelement använts och materialparametrar antagits utifrån indata till RFEM. Elementstorleken var vid dessa studier 100 millimeter och 20 nodiga element användes. Utifrån att studiens syfte varit att undersöka egenfrekvensen har egenvärdesanalyser genomförts. Indata för de olika modellerna och antagande som gjorts beskrivs inför respektive modell, i avsnitt 5.1.1 – 5.1.2 nedan.

5.1.1 Indata

För att i enlighet med mätningarna erhålla jämförbart resultat har håldäckselement 38 valts ut ifrån Tabell 1. Produktfakta för håldäck 38 presenteras i Tabell 6 nedan.

Tabell 6: Elementdata för håldäck 38 som vidare kommer användas i parameterstudien, Datan är hämtad ifrån *Starka Betong (2014)*. * - Diametern är idealiserad till medelvärdet mellan höjden och bredden av den ovala kanalen.

Namn	Tjocklek [mm]	Längder [m]	Kanaldiameter [mm]	Cc kanaler [mm]	Tröghetsmoment i längdriktning [m ⁴]	Egenvikt [kg/m ²]
HD/F 38	380	10 - 17	254*	215	0,00394	458

Betong kan betraktas som ett isotropt material vilket innebär att det har samma egenskaper i alla riktningar. Håldäckselement har längsgående kanaler i strukturen vilket medför att böjstyvheten är olika i längd och tvärriktning. I detta arbete behandlas därför elementen som ortotropa vilket innebär att de har olika egenskaper i två olika riktningar. Betongens elasticitetsmodul kan variera men i den numeriska analysen har den antagits till 37 GPa i linje med uppgifter från Starka Betongs produktkatalog. Poissons tal har i analyser satts till 0.2.

Utifrån produktfakta i Tabell 5 och materialparametrar beräknades styvhetsmatriser i RFEM fördefinierade skalelement för håldäcksbjälklag. Första styvhetsmatrisen för håldäck 38 utan avjämningsmassa presenteras som matris till vänster i tabell 7. För att studera effekten av olika avjämningsmassor justerades elementets totala tjocklek i RFEM utifrån summan av håldäckelementets och pågjutningens tjocklek. Detta utgör en förenklad modell eftersom RFEM antar att kanalerna är centrerade över höjden, medan de i verkligheten är placerade på ett bestämt avstånd från underkanten. För beräkning av tröghetsmomentet i längdriktningen påverkar denna förenkling resultatet till det bättre och därmed erhålls resultat som är styvare än verkligheten. Styvhetsmatriserna för de tre modellerna med 50, 90 och 130 millimeter avjämningsmassa presenteras i tabell 7 och kan härledas från tabell 2.

Tabell 7: Styvhetsmatriser för modellerna med varierande avjämningsjocklek hämtade ifrån RFEM. Alla värden $\cdot 10^9$

HD/F 38 – 0 avjämnning						HD/F 38 – 50 mm avjämnning					
7,671	0,971	0	0	0	0	9,598	1,357	0	0	0	0
0,971	4,856	0	0	0	0	1,357	6,783	0	0	0	0
0	0	1,94	0	0	0	0	0	2,713	0	0	0
0	0	0	0,148	0,028	0	0	0	0	0,227	0,045	0
0	0	0	0,028	0,141	0	0	0	0	0,045	0,224	0
0	0	0	0	0	0,059	0	0	0	0	0	0,019

HD/F 38 – 90 mm avjämnning						HD/F 38 – 130 mm avjämnning					
11,140	1,665	0	0	0	0	12,681	1,973	0	0	0	0
1,665	8,325	0	0	0	0	1,973	9,867	0	0	0	0
0	0	3,330	0	0	0	0	0	3,946	0	0	0
0	0	0	0,305	0,061	0	0	0	0	0,398	0,080	0
0	0	0	0,061	0,305	0	0	0	0	0,080	0,400	0
0	0	0	0	0	0,123	0	0	0	0	0	0,162

För detta examensarbete användes som ovan beskrivet styvhetsmatriser hämtade ifrån RFEM för att förse skalelementen med ekvivalenta styvheter som håldäckselement. I tabell 8 nedan presenteras ekvivalenta elasticitetsmodulen i längdriktning, tvärriktningen och skjuvmodulen i planet för RFEM modellen utan pågjutning. I tabell 8 presenteras även materialparametrarna som Liu (2019) visade ge minst fel mellan experimentella mätningar och numerisk analys i sin licentiatavhandling om komfortvibrationer i håldäckselement. Tabell 8 presenterar även den karakteristiska elasticitetsmodulen i längdriktningen från Starka Betong. Alla värden är för element utan antaget bidrag ifrån pågjutning.

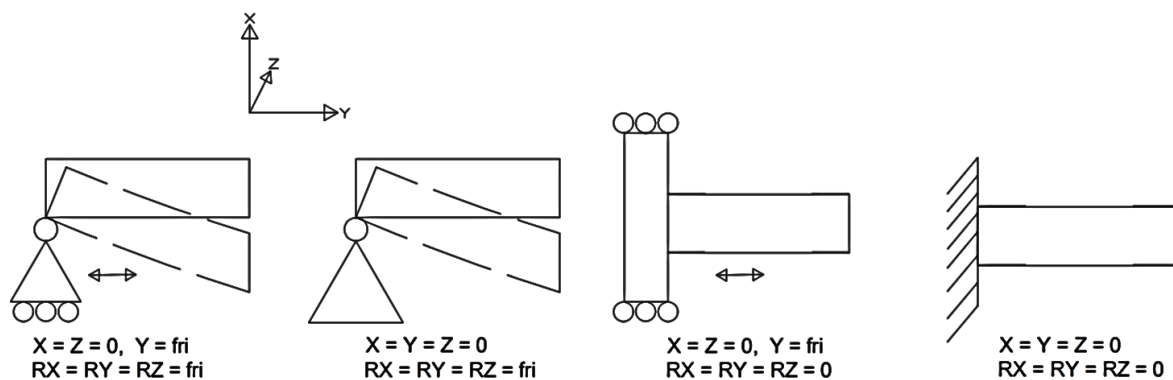
Tabell 8: Ekvivalent elasticitiesmodul i längdriktning ($E1$), tvärriktningen ($E2$) samt skjuvmodulen (G), alla värden i GPa.

	RFEM	Liu (2019)	Starka Betong
E1	36	36	35
E2	6.9	16	-
G	1.4	12.1	-

Tabell 8 ovan visar på att förhållandet mellan styvheten i längdriktningen och i tvärriktningen skiljer sig mellan vad RFEM beräknar och vad Liu (2019) har angivet. I detta arbete beaktas att en skillnad mellan styvheterna i de olika riktningarna finns och att modellen som använts i detta arbete är vekare i tvärriktningen än vad Liu beaktade.

Vid parameterstudier 1, 2 respektive 4 som inte berör upplagsvillkor har elementen antagits som fritt upplagda. Fritt upplagt element definieras utifrån att ett upplag är fixt vilket innebär förhindrad förskjutning i samtliga riktningar men ingen förhindring av rotation. Den andra änden i ett fritt upplagt element vilar på ett rullupplag vilket innebär förhindrad förflyttning i tvärriktning och vertikalt men inte i längdriktningen av elementet, det är inte heller förhindrat att rotera.

För studien har fyra upplagsvillkor undersökts, rullager, fixt, rullager med förhindrad rotation och fastinspönt. De fyra olika varianterna visas i figur 15 nedan där möjliga rörelser är markerade.



Figur 15: Rullager, fixupplag, rullager med förhindrad rotation och fastinspönt upplag med tillhörande beskrivning för möjliga rörelser

Då studien analyserat inverkan av upplagsvillkor har modellen baserats på att upplaget finns i underkant av håldäckselementen. Modellerade skalelementet representerar normalplanet och för att beakta membranstyvheten förflyttades upplaget halva håldäckets tjocklek nedåt (190 mm) och förbands i de punkterna med en rotationsfjäder.

5.1.2 Analysmodeller

I studien har det genomförts 4 olika parameterstudier utifrån följande:

- Längd och pågjutningstjocklek: längden varierar jämnt fördelat i intervallet rekommenderat för HD/F 38 av Starka Betong (10 - 17 meter) och pågjutningen varierar utifrån fyra olika avjämningsstjocklekar mellan 0 och 130 millimeter.
- Antagande för massa och längd: längden varierar utifrån intervallet av rekommenderad HD/F 38 av Starka Betong och fyra olika antagande om massa varierades. Att avjämningsmassan har densitet av betong, har densitet av spackel, att massan verkar icke samverkande med håldäcket och därmed endast utgör extra vikt, samt vid samverkande element men att delar av nyttiga lasten bidrar till medsvängande last.
- Upplagsvillkor: ett element vilande på två upplag varierar med olika kombinationer av upplag mellan rullager, fixupplag, rullager med förhindrad rotation och fastinspönt.
- Samverkan mellan element: först analyseras samverkan mellan element i längdriktningen för balkelement efterföljande varandra. Andra delen varierar bredden på plattorna och om det fanns 2, 3 eller 4 upplag som påverkade då det antogs att elementen var samverkande i tvärriktningen.

5.2 Längd och pågjutningstjocklek

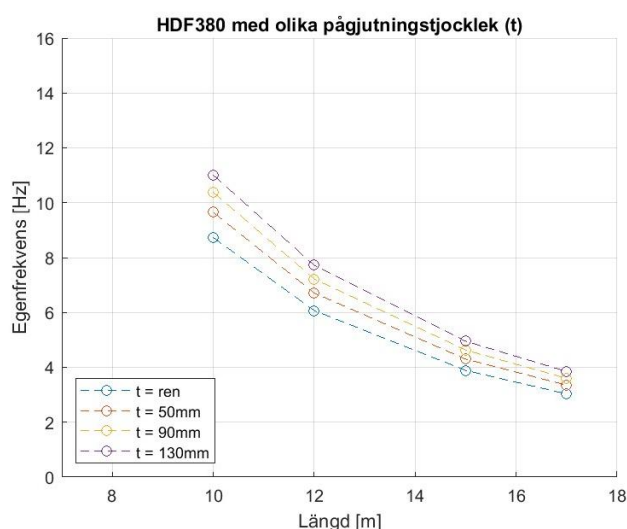
Som första studie analyserades hur egenfrekvenser varierar beroende på elementlängd och pågjutningstjocklek. De fyra längderna som antogs jämnt fördelade över intervallet angivet av Starka Betong var 10, 12, 15 och 17 meter. Pågjutningstjockleken varierades mellan 0, 50, 90 och 130 millimeter. För samtliga längder genomfördes beräkningar med samtliga pågjutningstjocklekar.

5.2.1 Resultat

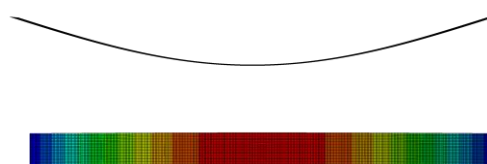
I tabell 9 redovisas resultatet från den första parameterstudien. Illustration över hur resultatet varierar visas i figur 16. Ett exempel på egenmod ifrån den numeriska analysen visas i figur 17.

Tabell 9: Resultat av analys om längd respektive avjämningsstjocklek, första egenfrekvensen i Hertz redovisas mellan längden (m) och avjämningsstjockleken (mm).

	10	12	15	17
0	8.73	6.07	3.89	3.03
50	9.65	6.71	4.30	3.35
90	10.38	7.22	4.63	3.60
130	11.01	7.72	4.95	3.85



Figur 16: Resultat för första egenfrekvensen för olika längder och olika avjämningsstjocklekar.



Figur 17: Första egenmod enligt FE-analys. Övre figur visar sidovy och nedre figur visar planvy. Färgskala indikerar förflytningsstorlek.

Resultatet visar att den procentuella skillnaden mellan egenvärdena för två längder är oberoende av tjockleken på avjämningsmassa. Liknande mönster visas i att den procentuella förändringen är samma vid olika avjämningsmassor, oberoende av längden på elementet.

5.2.2 Diskussion

Det går ifrån resultatet att utläsa att den procentuella förändringen av egenfrekvenser förhåller sig konstant för respektive parameter. Det innebär att oberoende av vilken tjocklek avjämningsmassan har så kommer den procentuella förändringen vara densamma vid ändring av längden, vilket bedöms som rimligt eftersom den procentuella förändringen av massan blir densamma. Samma fenomen uppstår om tjockleken på avjämningsmassa förändras oberoende av vilken längd elementen har. Procentuellt kommer egenfrekvensen förändras på samma sätt.

Notera storleken på förändring som uppstår. Vid längdförändring om exempelvis 20% uppstår en förändring av egenfrekvensen på ca 30% medan vid förändring om avjämningsmassans tjocklek på 80% så förändras egenfrekvensen endast med 8%. Detta visar att den faktor som är mest avgörande för egenfrekvensen är vilken längd som elementen har. Avjämningsmassans tjocklek har inverkan på egenfrekvensen men längden får en avgörande betydelse. Resonemanget styrks i figur 16, där egenfrekvenserna konvergerar vid ökad elementlängd, oberoende av jämning.

Med förändringen av massan skall det noteras att när massan ökar så sjunker egenfrekvensen av elementen. Samtidigt visar resultatet att den bidragande tjockleken höjer styvheten och tröghetsmomentet med en större faktor än massan ökas och därav stiger egenfrekvensen vid adderad massa. Notera dock att med en ökad massa blir elementet svårare att excitera till svängning.

5.3 Antagande för massa och längd

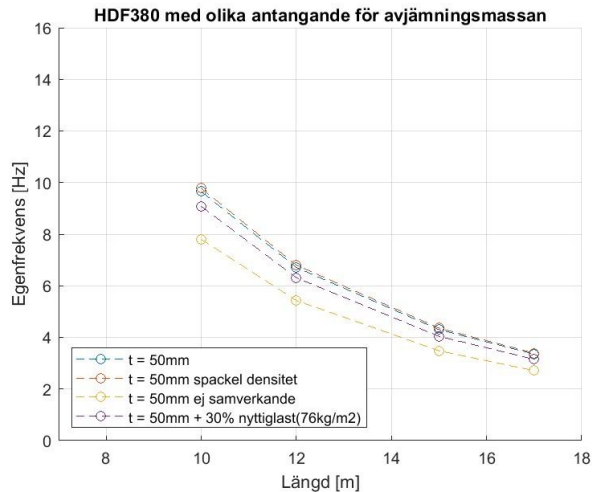
Den andra parameterstudien undersökte hur olika antaganden om massan påverkar egenfrekvensen vid olika längder på element. Med en pågjutningstjocklek om 50 millimeter antogs 4 olika modeller för hur massan i strukturen kan approximeras. Först (elementär fallet som antas i alla andra analyser) att avjämningsmassa har samma densitet som betong. Andra modellen antar att pågjutningen har en lägre massa, likt flytspackel, om 2000 kg/m^3 . Tredje modellen undersökte hur responsen påverkas om avjämningsmassan inte är samverkande med håldäckselementet och därmed endast står för extra massa. Den fjärde modellen undersökte om det i kontorsmiljö antas var 30% medsvängande massa av den nyttiga lasten, exempelvis att den fasta inredningen om 75 kg/m^2 verkar som medsvängande. Analysen baserades på platta som var fritt upplagd på ett fixupplag och ett rullupplag.

5.3.1 Resultat

I tabell 10 visas resultatet för hur egenfrekvenserna varierar mellan de olika antagandena om medräknad massa. Grafer över resultatet visas i figur 18.

Tabell 10: Resultat för parameterstudie om olika massantagande utefter längden av element. Fyra olika antagande för massa studeras mot fyra olika längder och första egenfrekvensen presenteras [Hz].

Längd	10	12	15	17
Betong densitet	9.65	6.71	4.30	3.35
Spackeldensitet	9.78	6.80	4.36	3.39
Ej samverkande spackel-håldäck	7.80	5.43	3.48	2.71
30% nyttig last medsvängande	9.08	6.31	4.04	3.15



Figur 18: Första egenfrekvensen för olika längd på elementet, vid olika antagande för avjämningsmassan

För fallet då avjämningsmassan antas ha en lägre densitet blir skillnaden liten, drygt en procent, och därmed för liten för att i beräkningar anses ha betydelse för egenfrekvensen. För det tredje fallet där avjämningsmassan och håldäckeelementet inte antas vara samverkande blir skillnaden större. Här erhålls en relativt stor skillnad mellan egenfrekvenserna, att notera är att håldäcken och avjämningsmassan ska vara samverkande enligt branschstandard (Linotol, 2020). För det sista fallet med medsvängande massa i bjälklaget blir förändringen ca 6% även om förändringen i massa är drygt 16%. Sammanfattningsvis visar resultatet att antaganden om massan för elementen har relativt liten inverkan under förutsättning att avjämningsmassan och håldäckeelementet är samverkande.

5.3.2 Diskussion

För den andra analysen kan det sammanfattas att val av densitet för avjämningsmassan och antagen extra massa från nyttolasten bidrar väldigt lite. Ett antagande om att 30% av den nyttiga lasten är medsvängande anses vara i övre gränsen för vad som är rimligt och ändå bidrar detta inte till någon större förändring. En väsentlig förändring sker om inte avjämningsmassan samverkar med håldäcken, men då detta är ett antagande som strider mot branschpraxis så bör detta resultat tas med försiktighet. Liket den första analysen blir de olika antagandena mindre betydelsefulla vid längre håldäck, vilket kan urskiljas från grafen, figur 18.

5.4 Upplagsvillkor

Den tredje analysen undersöker inverkan av olika upplagsvillkor och hur detta påverkar egenfrekvensen. Analysen baseras på ett håldäck upplagd på två sidor som testas för fyra olika typer av upplagsvillkor: rullager, fixupplag, rullager med förhindrad rotation samt fastinspänning. Alla upplagsvillkoren testas för kombinationer på ett håldäck 38'a som är 16,5 meter långt och har 50 millimeter avjämning.

För denna analys är modellen omgjord så att skalelementet fortsatt är placerade i normalplanet i håldäcken, men att upplagen är förskjutna 190 millimeter nedåt (halva tjockleken) för att på ett mer realistiskt sätt beakta inverkan av membranstyvheten.

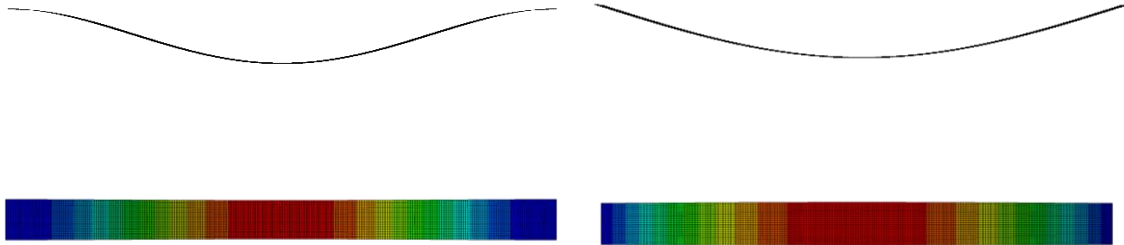
5.4.1 Resultat

I tabell 11 redovisas resultat för hur olika upplagsvillkor påverkar egenfrekvensen. Resultatet visar att upplagsvillkoren påverkar egenfrekvensen mycket.

Tabell 11: Resultat av parameterstudie med upplagsvillkor i två ändar med alla kombinationer av Fixupplag, rullupplag, rullupplag med förhindrar rotation samt fastinspänning. Tabellen visar kombinationen med de två upplagen och den första egenfrekvensen.

Vänster upplag	Höger upplag	Hz
Fixupplag	Rullupplag	3.55
Fixupplag	Fixupplag	4.98
Fixupplag	Fastinspänd	6.02
Rullupplag	Fastinspänd	5.55
Rullupplag Förhindrad rotation	Fastinspänd	8.04
Fastinspänd	Fastinspänd	8.04

Skillnaden mellan utböjningen för de båda extremfallen fritt upplagd i båda ändarna och fast inspänd i båda ändarna visas i figur 19 respektive 20.



Figur 19: Utböjning av platta fastinspänd i två upplag, överst sett från sidan och underst ovanifrån.

Figur 20: Utböjning av platta fritt upplagd på två upplag, överst sett från sidan och underst ovanifrån.

5.4.2 Diskussion

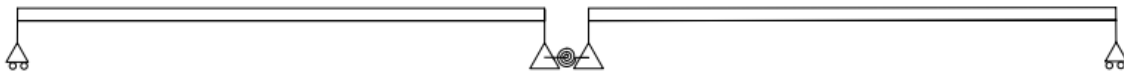
Upplagsvillkorens inverkan på egenfrekvensen kan konstateras vara stor. Resultaten för de olika kombinationerna kan grupperas till 3 olika resultatgrupper. Den första innefattar fall där förflyttning eller rotation inte är förhindrade i något upplag, dessa erhåller ett resultat på ca 3.55 Hz. Den andra gruppen är de fall där det inte är förhindrad förflyttning i båda ändarna, medan rotation är förhindrad i ett upplag. Då blev resultatet ca 5.55 Hz. Den tredje gruppen innefattar kombinationer med förhindrad rotation i båda ändarna, men inte tvunget förhindrad horisontell förflyttning. Den gruppen har resultatet 8.04 Hz i egenfrekvens. Mellan andra och tredje gruppen finns ett fall där det är förhindrad förflyttning i båda ändarna men bara förhindrad rotation i en ände (fix-fast). För detta fall blev resultatet 6.02 Hz.

Att konstatera från analysen är att förhindrad rotation är det som påverkar egenfrekvensen mest i jämförelse med förhindrad förflyttning vid upplagen. Om det är en eller båda upplag som är förhindrade att rotera medför stora skillnader i resultatet. Notera att kombinationer av förhindrad förflyttning och rotation vid båda upplag är den styvaste, men att vid förhindrad rotation har det ingen inverkan om förflyttning är förhindrad eller ej.

5.5 Samverkan mellan element

Den sista parameterstudien undersökte hur egenfrekvensen påverkas om det antas finnas kontinuitet mellan elementen. Analysen baserades på håldäck 38'a som var 16,5 meter långa och hade 50 millimeter avjämnning. Det gjordes två delanalyser, en där samverkan mellan element över upplag studeras och en där samverkan mellan element i tvärriktningen och upplag på fler sidor undersöktes.

I den första delen undersöktes samverkan i längdriktningen. Modellen bestod av två element efterföljande varandra över ett upplag med en förskjutning på 10 millimeter mellan varandra. Modellen var, för att beakta excentricitet vid membranverkan, baserad på två element efterföljande varandra, där upplagsvillkoren var förskjutna till en referenspunkt 190 millimeter ned, som i sin tur förbands med en rotationsfjäder, se figur 21. De båda elementen var modellerade med fixupplag i centrum och rullager i ytterkanter. Rotationsfjäders styvhet varierades mellan modellerna för att undersöka olika grad av samverkan mellan elementen. Två ytterligheter definierades: när fjädern saknar styvhet, vilket motsvarar att elementen inte samverkar över stödet, och när fjäderns styvhet motsvarar betongens elasticitetsmodul (37 GPa), vilket motsvarar ett kontinuerligt system och full samverkan.



Figur 21: Illustration av modell som används vid analys av kontinuitet över upplag i längdriktningen.

Den andra analysdelen undersökte hur egenfrekvensen varierar om det finns kontinuitet mellan elementen i tvärriktningen. Om foggjutningen antas medföra samverkan mellan elementen, sprids lasten i två riktningar. Vid närhet till upplag i tvärriktningen kan således håldäcksbjälklaget bäras upp av 3 eller 4 upplag. Analysen baseras på skalelement som var fritt upplagda längs kanterna, med ett fixupplag och ett, två respektive tre rullupplag. Analyser genomfördes med upp till 14 håldäckselement i bredd, för två och tre upplag, och mellan 6 och 22 i bredd för fyra upplag. Full samverkan antogs mellan olika element.

5.5.1 Resultat

Resultatet av analyserna visar att egenfrekvensen för två efterföljande håldäck blev 3.55 Hz och att denna inte förändras vid samverkan över upplag. Detta beror på att första böjmod blir asymmetrisk vid samverkan, vilket visas i figur 22.



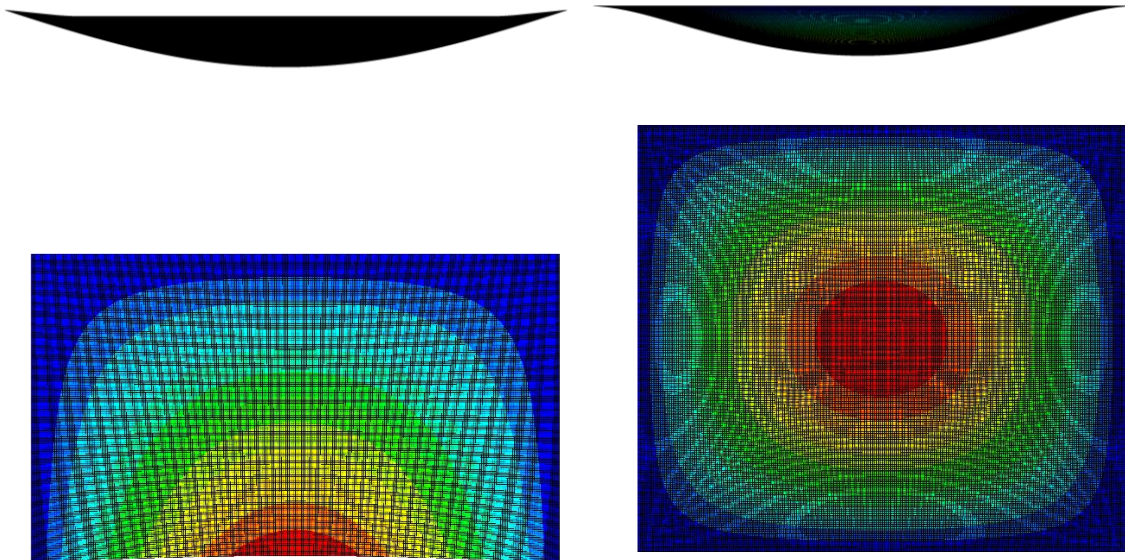
Figur 22: Illustration av första böjmod vid samverkan över upplag.

Resultatet för den andra delstudien redovisas i tabell 12. Tabellen visar egenfrekvenserna för modeller då det råder kontinuitet mellan elementen i tvärriktningen. Överst i tabellen redovisas första egenfrekvensen för platta på två upplag, nedanför på tre upplag och slutligen för när plattan vilar på fyra upplag. Resultatet visar att egenfrekvensen minskar när avståndet till upplag i tvärriktningen ökar. Det finns även tydliga indikationer på att egenfrekvensen påverkas när det är fler än två upplag samt att samma platta uppvisar väsentliga skillnader om det antas finnas upplag längs tre eller fyra sidor. Då avståndet till upplag i tvärriktningen är litet blir även skillnaden mycket stor mot beräkningar för endast två upplag.

Tabell 122: Resultat av FEM-modeller med kontinuitet mellan elementen i tvärriktningen för 2, 3 och 4 upplag med fix alternativt rullupplag. Analys för 2 – 12 håldäckselement i bredd för två och tre upplag och 6-14 element i bredd för fyra upplag.

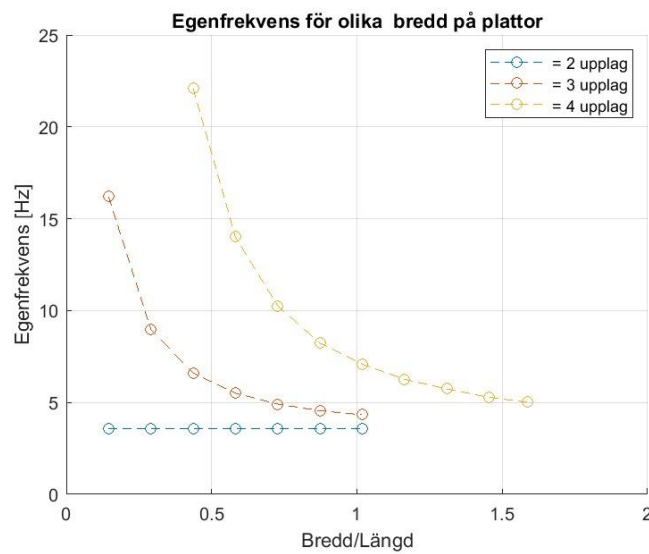
Antal plattor i bredd [st]	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Bredd [m]	2,4	4,8	7,2	9,6	12	14,4	16,8	19,2	21,6	24	26,2
2 sidor	3.56	3.56	3.57	3.57	3.58	3.59	3.59				
3 sidor	16.20	8.97	6.60	5.51	4.91	4.55	4.33				
4 sidor			22.10	14.01	10.26	8.23	7.08	6.26	5.74	5.28	5.01

Illustration för utböjning då det råder samverkan mellan element upplagda på tre respektive fyra upplag visas i figur 23 respektive 24. Figur 25 visar graf över egenfrekvenserna som varierar med förhållandet mellan längden och bredden på plattan.



Figur 23: Utböjning av platta på tre upplag. Överst sett ifrån sidan och nederst ovanifrån.

Figur 24: Utböjning av platta på fyra upplag. Överst sett ifrån sidan och nederst ovanifrån.



Figur 25: Eigenfrekvens för platta upplagd på 2, 3 och 4 upplag.

5.5.2 Diskussion

Resultatet för den första delen visar att egenfrekvensen för håldäckselement som är eller inte är kontinuerliga över stöd har samma egenfrekvens. Det bör dock noteras att denna studie endast studerar egenfrekvenser och inte accelerationer. Om accelerationer hade studerats hade möjligen fler aspekter kunnat analyseras då det även för samma egenfrekvens inte behöver vara lika lätt att excitera systemet i svängning då lasten verkar på ett element, dvs. eftersom en större massa exciteras.

Det är konstaterat att inverkan av kontinuitet över stöd inte bidrar till förändrade egenfrekvenser, vilket beror på att första böjmod blir asymmetrisk över upplaget. Som visat i analysen med upplagsvillkor kan däremot inspänningsförhållanden påverka egenfrekvensen. Vid ett resonemang om att elementen är kontinuerliga över stödet men inte asymmetriska så kommer egenfrekvensen att förändras utifrån att det exciterade element svänger medan det andra är stilla. Det kommer uppstå en stabiliserande effekt av det icke svängande elementet på det svängande som förändrar inspänningen vid upplaget.

Resultatet för den andra delen visar på stora skillnader i egenfrekvensen baserat på hur långt det är till stöd i tvärriktningen. Det visas även på stora skillnader om en platta med samma bredd har upplag längs två, tre eller fyra sidor. Figur 3 och 4, som visar utlagda håldäck, exemplifierar hur element läggs i långa rader utefter varandra i bredd. Att avståndet mellan upplag i tvärriktningen understiger 14 meter bedöms som ovanligt. Mot bakgrund av detta kan inverkan från upplag i tvärriktningen i många fall anses försumbar, vilket i allmänhet också är ett antagande på säker sida.

6. Utvärdering av resultat

I följande kapitel jämförs resultatet ifrån de experimentella mätningarna och de numeriska analyserna för att se vilka antaganden för FEM modell som bäst kan beskriva de dynamiska egenskaperna i ett håldäck utifrån studiens resultat. Efter diskussion om vilka parametrar och antaganden som bäst kan beskriva mätningen testas en kalibrerad modell med antaganden som bäst beskriver förutsättningarna för mätningen. Analyserna bygger på en begränsad mängd data och kan därför inte med säkerhet utesluta parametrar som kan inverka. Jämförelserna kommer presenteras utifrån det resultat som finns att tillgå men bör tolkas med försiktighet då det endast är tendenser som går att utläsa.

6.1 Mätning innan foggjutning

Mätningen som utfördes på håldäck som inte foggjutits visade att första egenfrekvensen var 4.66 Hz. Elementet var placerat nära upplag som löper parallellt med elementet men det var inte heller foggjutet. Utifrån figur 1 som visar hur elementen är utformade med små läppar som ansluter till varandra bedöms det inte ha funnits friktion mellan elementen som påverkat resultatet nämnvärt. Mot bakgrund av att elementen inte är foggjutna och att friktionen mellan dessa förutsätts vara liten så kan det antas att elementen är upplagda på två upplag.

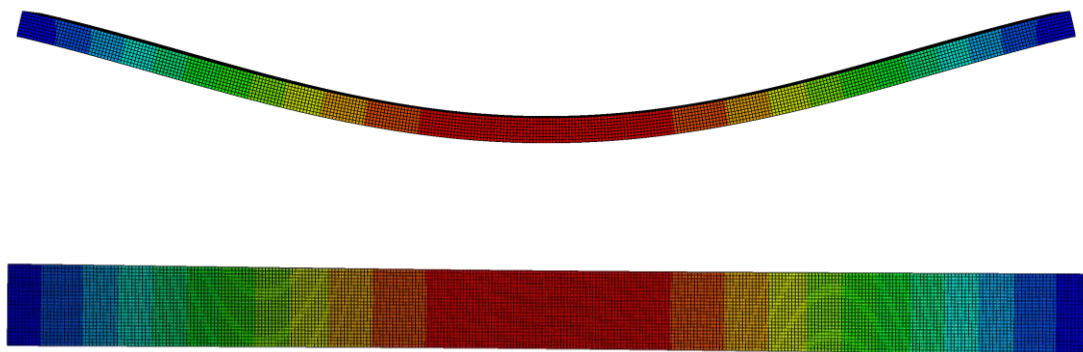
I ändupplagen hade det vid mätning inte genomförts foggjutning vilket medför att håldäcken inte är sammanhängande med primärbalken. Dock skall friktionskraften mellan elementet och balkens fläns som den vilar på inte förringas. Håldäckselementet kan utifrån produktfakta för HD/F 38 konstateras väga strax under 9 ton. Både håldäcket och hattbalken är producerade i betong vilket innebär att de har skrovliga ytor vilket med 4,5 ton i upplagslast bidrar till stor friktion mellan elementen. Detsamma gäller på andra sidan hattbalken då det enligt planritning i figur 11 visas hur håldäcken fortsätter på andra sidan. Med hänsyn till friktion mellan element och balk så kan det antas att håldäcken har svårt att förflytta sig i längdriktningen. Det finns även element i tvärriktningen vilket förhindrar förflyttning i tvärriktningen. Detta indikerar att det rimligaste borde vara förhindrad förflyttning i samtliga riktningar. Något motstånd som förhindrar rotation kan dock inte fastställas. Notera dock att håldäckselementen vilar på hattbalkens flänsar, rotationspunkten ligger därmed förskjuten mot centrum av håldäcket med

djupet av flänsens bredd. Med förflyttad rotationspunkt blir elementet kortare och därmed erhålls högre egenfrekvens. Det kan även uppstå ett motriktat moment vid upplagen med avseende på stödets placering, vilket påverkar massan och därmed egenfrekvensen. Vilken av faktorerna som inverkar mest på egenfrekvensen är svårt att avgöra.

Från den första mätningen innan håldäck blivit foggjutet är egenfrekvensen 4.66 Hz. Tre sammanfattande punkter kan formuleras utifrån jämförelsen med den numeriska analysen:

- Elementen kan antas var upplagda på två upplag.
- Elementen är förhindrade för rörelse i tvärriktning och längdriktning.
- Förhindrad rotation bedöms inte uppstå vid upplagspunkter.

Utifrån punkterna ovan utvärderas en solid modell i Abaqus som är 16,2 meter lång, 380 millimeter tjock och med tvärsnitt enligt Starka Betongs tvärsnittsritning. Upplagsvillkoren ansattes till förhindrad förflyttning i samtliga riktningar i underkant av tvärsnittet för båda de två ändupplagen. Första egenfrekvensen för modellen var 4.48 Hz, figur 26 visar deformationen. Resultatet av denna analys har en differens mot den första mätningen på 0.18 Hz, vilket indikerar att modellen stämmer väl med mätningen.



Figur 26: Utböjning av solidmodell anpassad för mätning innan foggjutning. Övre illustration visar utböjning från sidan och nedre ovanifrån.

6.2 Mätning efter foggjutning

Den andra mätningen, efter att elementen blivit foggjutna resulterar i en högre egenfrekvens än den första, den stiger till 7.51 Hz. Denna mätning var utförd på samma håldäckselement som den första men en våning ned där det hade hunnit foggjutas. Skillnaderna mellan de två mätningarna är därmed endast om det hade foggjutits eller inte, annars var det likadana element, lika långt ifrån stöd men en skillnad på 61% och 2.85 Hz.

Det finns två delar som kan påverka, antal lastvägar och därmed hur många upplag som plattan vilar på samt hur inspända de är över upplagen. Först, antalet upplag som plattan vilar på kan ändras då foggjutningen bidrar till att binda samman alla håldäck till att verka som ett enhetligt element. Hålrummet som tidigare bildades mellan element i tvärriktningen som kanaler med botten formad av håldäckens läpp i underkant blir nu foggjutet och därmed skapas en solid förbindelse. Mellan elementen förekommer ingen armering i foggjutningen. Liu (2009), som anpassade styvheter för att stämma bäst överens med mätningens resultatet erhöll ett förhållande om 45% styvhet i tvärriktningen mot längdriktningen. Med RFEM erhöles endast en styvhet om 19% i tvärriktningen. Vilket som är rätt är svårt att avgöra, men styvheten i tvärriktningen bedöms vara mindre än 50%. Dock skall inte styvheten i tvärriktningen underskattas, baserat på den numeriska analysen om egenfrekvens för håldäck upplagda på tre och fyra upplag är skillnaden stor mot två upplag då det är nära till upplag i tvärriktningen, vilket också mätresultaten indikerar.

Mätningen utfördes på ett håldäck som fanns 6,6 meter (centrumlinjen) från ett upplag i tvärriktningen men på ett bjälklag som var 9,6 meter brett mellan upplag och fri kant, se figur 11. Då det visats genom den numeriska analysen att upplag på tre sidor bidrar till en förändring av egenfrekvensen så kommer detta att inverka. Vid mätningen då excitation av svängningen utförts har accelerometrarna mätt accelerationerna för det specifika håldäcket. Dock har egenmoden då den svängningen exciterats varit den första för bjälklaget. Oberoende var på bjälklaget som mätning utförs, så är egenfrekvensen densamma för hela bjälklaget vid antagande om kontinuitet. Därav är mätningen på 7,51 Hz den första egenfrekvensen för en platta på tre upplag som är 9,6 meter bred.

Gällande inspänningsförhållandena vid upplagen kan det fastställas att det även för detta fall har skett en förändring mot första mätningen. Den sista parameterstudien undersökte hur egenfrekvensen varierade med tre upplag för ett fritt upplagt element, där fastställdes att en

platta 9,6 meter bred har en första egenfrekvens på 5,51 Hz (vid 50 millimeter avjämningsmassa). Då det är visat att egenfrekvensen sänks från att inte ha någon avjämningsmassa till att det finns 50 millimeter och att mätningens resultat var högre kan det fastställas att håldäcksplattan är mer inspänd än elementarfallet. I parameterstudien beräknades egenfrekvensen för olika fall som kan delas in i tre grupper med olika upplagsvillkor. Den första gruppen (och elementarfallet som sedan appliceras i studien om antal upplag) visade en egenfrekvens på drygt 3 Hz, den andra, där en ände var förhindrad för rotation, steg den till drygt 5 Hz och slutligen, då båda ändar var förhindrade för rotation, var egenfrekvensen över 8 Hz, en förändring mellan första och sista gruppen som är en större än dubbling. Lika stor skillnad finns inte mellan sista parameterstudien och experimentell mätning 2 vilket innebär att förändring i inspänningsförhållande finns men att det inte nödvändigtvis är rimligt att anta fast inspänning i samtliga upplag.

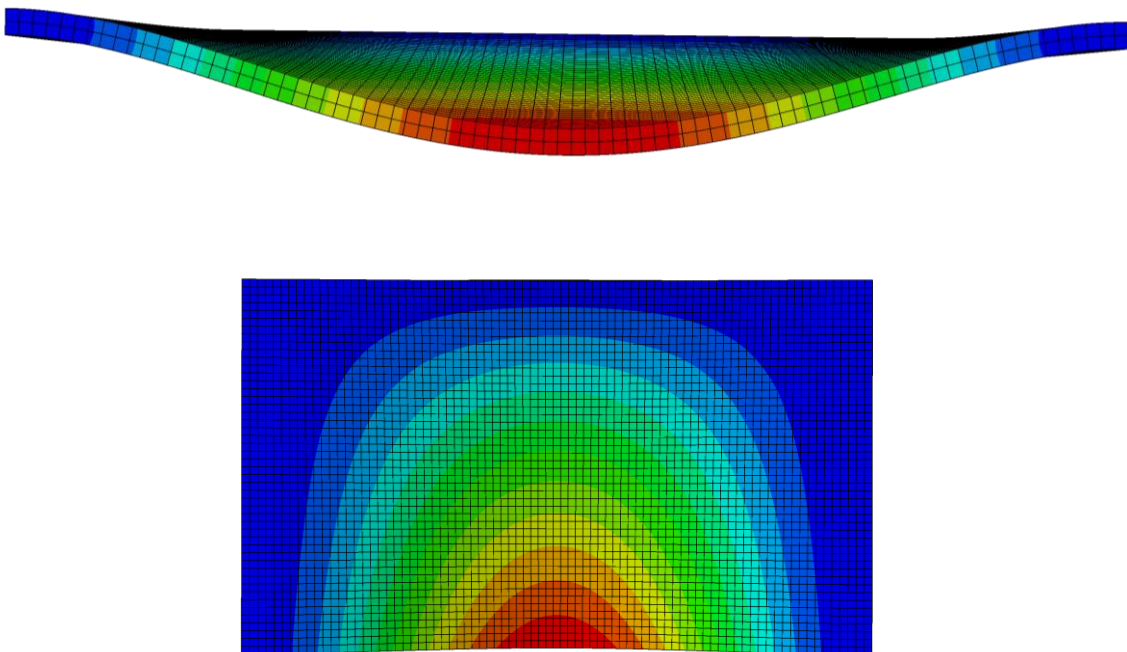
För element som vilar på hattbalkar (ändarna i längdriktningen) finns det element som ansluter på andra sidan balken. Då ett element modelleras som fast inspänt vid upplag behöver det dock finnas något som är styvt nog så att kraftparet som bildas av det belastade elementet kan balanseras. Resultatet från parameterstudien för kontinuerligt element över upplag visade att egenfrekvensen var densamma med eller utan kontinuitet.

När rotation motverkas har det i parameterstudien konstaterats att egenfrekvensen stiger. Metoden för de experimentella mätningarna var att utifrån impulser ifrån en handslägga excitera systemet och mäta accelerationerna. Att en mindre handslägga, även när det rör sig om mycket små rörelser, skulle excitera tre håldäck i längd och 8 element i bredd till svängning med tillräcklig amplitud kan antas vara orimligt. Därmed kan elementen i denna mätning ha verkat som fastinspända över upplag.

Upplaget i tvärriktningen behöver inte ha varit inspänt på samma vis som upplagen i längdriktningen. I mätningen fanns det inget element på den andra sidan av betongväggen som bjälklaget i detta fall vilade på. Det behöver därmed bedömas om den vertikala betongväggen ovan såväl som under bjälklaget är stark nog att motverka förflyttning och rotation. Håldäcken är i detta fall inte inklämda mellan två väggelement utan väggen står löst bredvid som ett eget element. För att skapa stabilitet till väggen och håldäcken sticker dock armeringsjärn ut ifrån väggen som gjuts samman med bjälklaget. För vertikal förflyttning är det rimligt att anta att väggen förhindrar detta då det är i väggens styvaste riktning, detsamma gäller i längdriktningen av håldäcken. Att väggen skulle förhindra att håldäcken böjer ut i tvärriktningen är inte troligt,

då det leder till böjning ut ur väggens plan. Det skall noteras att håldäckens egen styvhet i planet är så stor att böjning i planet inte kommer ske i de lägre egenmoderna och därmed kommer inte resultatet påverkas för om förflyttning förhindras eller inte i horisontell riktning. Det är inte heller troligt att väggens styvhet till att vridas ut ur planet skulle vara stor nog att det förhindrade bjälklaget ifrån att rotera vid infästningen.

Utifrån jämförelse och diskussion analyseras följande modell: håldäck 38 som är 16,2 meter långt och 9,6 meter bred, utan avjämningsmassa vilar på tre upplag med fastinspänning i ändupplagen och ett rullupplag utan förhindrad rotation vid upplaget i tvärriktningen. Resultatet av modellen visas i figur 27, egenfrekvensen var 8.05 Hz. Modellen stämmer överens med den experimentella mätningen efter foggjutning med en differens på endast 0.54 Hz.



Figur 27: Utböjning av solidmodell anpassad för mätning efter foggjutning. Övre illustration visar utböjning från sidan och nedre ovanifrån.

Håldäcksbjälklag som är foggjutna kan innan det appliceras avjämningsmassa jämföras med experimentell mätning två, på 7.51 Hz för första egenfrekvensen, då dessa modelleras med följande antagande:

- Platta som vilar på tre upplag.
- Fastinspänd över hattbalkarna.
- Rullager vid kantupplag.

6.3 Mätning mitt på bjälklag

Den tredje mätning utfördes på håldäck som hade foggjutits och avjämnats med 50 millimeter och även försetts med innerväggar. Placeringen av mätpunkter var i änden på en korridor vilket bidrog till att lätta innerväggar löpte växelvis med elementet samt att det var olika upplagskonstruktioner i de två ändarna. Resultatet blev en första egenfrekvens på 8.79 Hz.

Mätningen utfördes mitt på ett bjälklag vilket innebär att det var långt till upplag i båda tvärriktningarna från elementet (mer än 10 meter). Baserat på att förändringen i egenfrekvens för en platta som var upplagd på 4 sidor i parameterstudien hade börjat att konvergera då det var 21 meter brett så kan det antas att det för mätningen var så brett i tvärriktningen att mer än två upplag inte påverkar.

Vid analys av inspänningsförhållande finns aspekter som är svåra att utvärdera. Baserat på jämförelse mellan mätning två och tre så bedöms elementet vara fast inspänt. Antagande om fritt upplagt element är vid en snabb jämförelse med parameterstudien inte rimligt. I en av ändarna för håldäcket är det likt mätning två en hattbalk där bjälklaget fortsätter på andra sidan. Kontinuitet över stöd innebär massa på andra sidan stödet som kan motverka svängning av det element som mättes på. Utifrån samma argumentation som i förra jämförelsen kan det därmed motiveras att elementet är på en sida fastinspänd. Vid fasad upplaget diskuterades i föregående avsnitt hur väggen vid sidan av bjälklaget inte motverkade vridning och förflyttning i alla riktningar. För denna mätning är uppbyggnaden annorlunda, här finns en kantbalk som elementen vilar på och mellan bjälklagen ovan och under är fasadmoduler inlyfta som byggklossar. Modulerna vilar därmed på håldäcken och balken, och står inte som separata element vid sidan av. Att tjocka fasadmoduler är inklämda mellan elementen bidrar detta till att håldäcket blir klämt ovan och underifrån en bit in från yttersta upplagskant. Eftersom moduler håller elementet på plats längre in än vid upplagskant förhindras rotation och bjälklaget kan därmed möjligen antas vara fast inspänt.

Skillnad mellan mätningen efter foggjutningen och efter att avjämningsmassa och innerväggar var byggda är inte jättestor. Resultaten skiljer 1.28 Hz, och även om det skall beaktas att det har tillkommit avjämningsmassa så visar första parameterstudien att den inte inverkar med mer än drygt 10%. En skillnad mellan de två mätningarna är att avståndet till upplag i tvärriktningen ökat så mycket att det inte längre inverkar. Det kvarstår således en förändring i egenfrekvensen mellan de två mätningarna som inte kan förklaras av de aspekter som analyserats i

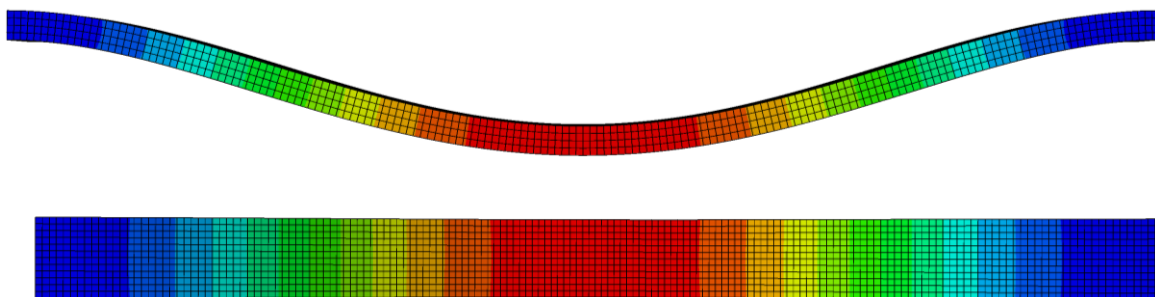
parameterstudien. Det kan därför rimligtvis antas att resultatet för denna mätning har påverkats av innerväggarna, hur mycket är dock svårt att fastställa. Men att innerväggarna gör bjälklaget styvare är rimligt.

Ytterligare en skillnad mellan de två mätningarna är dämpningen som för den första mätningen inte var större än 5,34% medan i den med innerväggar har stigit till 16,33%. Att det är innerväggarna som bidrar till denna förändring går inte att fastställa. Förändringen av upplagsvillkor, antal upplag bjälklaget vilar på och avjämningsmassan kan alla bidra till friktion där energi försvinner, men med hänsyn till likheter mellan mätningarna i övrigt kan det antas att innerväggarna bidrar till mycket av dämpningen.

Eftersom dämpningen för denna mätning är så stor, blir FRF-kurvorna för mätningen i Appendix A svårare att utläsa tydliga egenfrekvenser ifrån. I de två tidigare mätningarna har tydliga resonansstoppar kunnat utläsas och egenfrekvenser fastställas. För denna mätning är kurvorna mer utjämnade. Skillnaden bidrar till att mätningens precision inte blir lika exakt och att resultatet för egenfrekvensen blir mindre säker.

Utifrån diskussion ovan kan det sammanfattas att en modell som är jämförbar med den tredje mätningen, då bjälklaget varit foggjutet, avjämnat med 50 millimeter och innerväggar varit monterade och som resulterade i en första egenfrekvens på 8.79 Hz baseras på följande antagande:

- Platta upplagd på två upplag.
- Fastinspänd i ändupplagen.
- Hög dämpning för att beakta inverkan av innerväggar.



Figur 28: Utböjning för modell anpassad för mätning mitt på bjälklag som är foggjutet, avjämnat och innerväggar monterade. Övre figur visar utböjning från sidan och nedre ovanifrån.

Resultatet visas i figur 28 där egenfrekvensen blev 7.20 Hz. Resultatet skiljer sig mot mätningen nämnvärt vilket bevisar innerväggarnas inverkan på styvheten. En annan parameter som inte värderats utifrån dess inverkan är härdningen av betongen. Vid mätningen då det foggjutits så var gjutningen utförd i närtid. Den tredje mätningen på bjälklaget där innerväggar hunnit monteras hade det därmed gått lång tid sedan foggjutningen. Betong är även efter att det härdat i någon dag eller vecka långt ifrån fullt härdad och mycket av styvheten återstår. Skillnaden i härdning kan bidra till att inspänningen mellan de två fallen skiljer och att bjälklaget i det sista fallet är mer stabilt med större inverkan av samverkan. Det skall dock nämnas att även om betongen härdat kan betongen hunnit spricka något. Sprickor bidrar till att egenskaperna förändras i betongen och friktion i materialet kan uppstå vilket potentiellt kan påverka dämpningen och egenfrekvensen.

6.4 Mätning i kant av bjälklag

Den fjärde och sista mätningen utfördes på samma bjälklag som den tredje, men förflyttat i tvärriktningen, närmare upplag. Detta bidrar till oförändrade egenskaper i upplagsvillkor av ändupplagen, avjämningsmassa och längd på elementen. Resultatet ifrån mätningen var 12.43 Hz för första egenfrekvens, vilket kan jämföras med 8.79 Hz för föregående mätning.

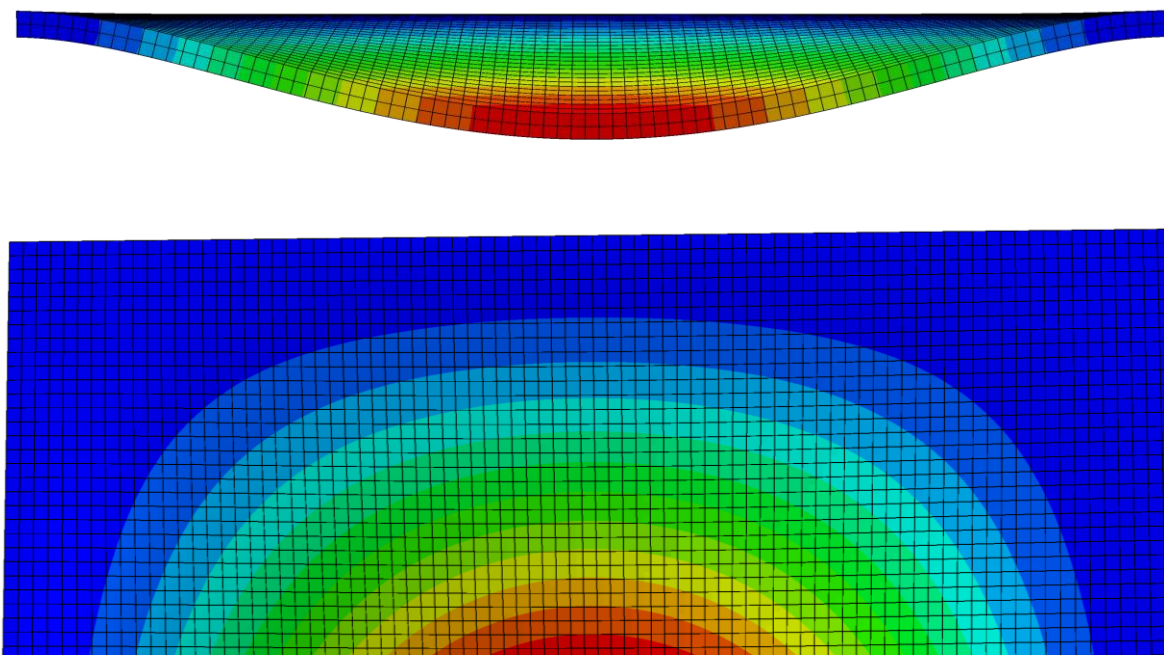
För en platta på tre upplag konvergerar egenfrekvensen vid stor bredd mot 4.5 Hz (se figur 25). Baserat på att förändringen i egenfrekvens mellan en platta på två upplag som är fast inspänd eller fritt upplagd är 126% så kan det inte, även för platta fastinspänd på tre sidor, beräknas en egenfrekvens på över 12 Hz. En alternativ förklaring till att uppmätt egenfrekvens är hög är att den experimentella mätningen inte har exciterat bjälklagets första egenmod. Vidare kan lasten ifrån handsläggan inte ha varit stor nog för att bjälklaget som består av 16,6 meter långa håldäck som väger knappt 9 ton och är sammangjutna till flera plattor i bredd, ska sättas i svängning. Utifrån FRF-kurvorna i Appendix A kan det för denna mätning inte heller utläsas några tydliga resonanstoppas som visar att det är första egenmoden som har exciterats. Antingen har lasten inte varit tillräcklig eller också har en annan egenmod exciterats.

Gällande inspänningsförhållandena för denna mätning kan liknande resonemang som för föregående mätning göras. Båda de två ändupplagen bedöms som fast inspända, ena till följd av det element som agerar stabiliserande på andra sidan hattbalken, medan det i fasaden finns

moduler som är inkilade mellan bjälklagen. För upplaget i tvärriktningen är uppbyggnaden densamma som vid andra fasaden, fasadmoduler är inlyfta mellan bjälklagen. Till följd av att modulen vilar på bjälklaget och att den bygger i djupled bildar det ett motstånd mot rotation vid upplagskanten. Som tidigare bedöms fasaden inte vara bidragande till förhindrad förflyttning av bjälklaget i tvärriktningen, men till följd av bjälklagets egen styvhet i planet sker inte detta.

Även vid den sista mätningen fanns innerväggar i närheten, dock förskjutna 2,4 meter ifrån mätområdet. Den skillnad som går att se, då innerväggen inte längre är intilliggande, är att dämpningen har sjunkit från tidigare 16,33% till 11,23%. Det är fortfarande inte samma låga dämpning som mätningen efter foggjutningen (5,34%), men dock en sänkning. Sänkningen av dämpningen kan bero på innerväggens förflyttning. Även om dämpningen sjunkit är den fortsatt så stor att det bidrar till att FRF-kurvorna inte har några tydliga resonanstopp, utan är mer utjämnade. Därmed är egenfrekvensen inte så tydlig i utvärderingen.

Baserat på antagna parametrar som bjälklaget kan modelleras utifrån utvärderas den experimentella mätningen på 12.43 Hz. Modellen baseras på håldäck 38, 16,6 meter långa med 50 millimeter avjämning. Plattan vilar på tre upplag som alla är fast inspända. Utifrån att någon rimlig bredd inte kunde identifieras för att efterlikna mätfallet används bredden som mätningen är utförd på ifrån upplaget (4,8 meter). Resultatet visas i figur 29 och resultatet visar en första egenfrekvens på 12.95 Hz.



Figur 29: Utböjning av modell anpassad för mätning i kant av balklag efter foggjutning, avjämnning och innerväggar är monterade. Övre illustration visar ifrån sidan och nedre ovanifrån.

Skillnaden mellan den experimentella mätningen och resultatet ifrån modellen är inte mer än 0.52 Hz vilket kan tyckas vara bra. Dock skall inte bortses ifrån att bjälklaget är mycket bredare och att egenfrekvensen därmed skulle sjunkit om detta beaktats i analysen. Som beskrivet i förra jämförelsen så är egenmoden och egenfrekvensen densamma oberoende var på elementet man mäter. Men för att resultatet ska vara samma så ska även rätt egenmod bli exciterad. Med resonemang om att egenfrekvensen skall sjunka jämfört med analyserad modell erhålls ett resultat som är lägre än vad mätningen visar, samma som för mätningen mitt på bjälklaget.

För mätning på bjälklag som foggjutits, avjämnats och där innerväggar är monterade nära upplag i tvärriktningen är slutsatsen att den bästa modellen för att beskriva resultatet på 12.43 Hz är:

- Platta på tre upplag.
- Att samtliga tre upplag är fastinspända.
- Att plattan är bred men utifrån att innerväggarnas inverkan på förstyvning inte går att bestämma så är bästa jämförelsen att endast beakta bredden mellan upplaget och mätpositionen.

6.5 Sammanfattning av resultatet

Baserat på de fyra jämförelserna som utförts mellan de experimentella mätningarna och numeriska analyserna i form av parameterstudier finns det några egenskaper som går att sammanfatta. Baserat på studiens mätningar kan det konstateras att:

- Håldäck verkar innan de foggjutits eller bearbetats, som fritt upplagda plattor på två upplag. Det finns ingen samverkan mellan elementen i tvärriktningen och plattorna har låg egenfrekvens.
- Efter att bjälklagets foggjutits ökar styvheten. Elementen är kontinuerliga i såväl tvärriktningen som längdriktningen och egenfrekvensen höjs väsentligt.
- Efter att avjämningsmassa och innerväggar monterats höjs egenfrekvensen ytterligare. Avjämningsmassans tjocklek bidrar till förändrad egenfrekvens men utefter en ökning av längden blir den mindre och mindre avgörande. Innerväggar påverkar även egenfrekvensen och ökar styvheten avsevärt även om detta är svårt att beakta vid modellering.
- Vid upplag på en hattbalk kan håldäckselementen baserat på studiens omfattning antas vara fast inspända då bjälklaget fortsätter på andra sidan. Vid upplag i fasad kan inspänningsförhållandena variera baseras på hur anslutningen är konstruerad.

7. Slutsats

Examensarbetet har studerat håldäckselement 38 genom såväl experimentella mätningar som numeriska analyser. Slutsatsen är att efter foggjutning, kan håldäcksbjälklag betraktas som en plattmodell med kontinuitet mellan elementen i tvärriktningen och längdriktningen. På längre avstånd ifrån upplag i tvärriktningen konvergerar egenfrekvensen till att endast påverkas av två upplag. Nära upplag i tvärriktningen inverkar upplaget och höjer egenfrekvensen. Då element vilar på upplag av hattbalkar mitt i ett bjälklag, kan det beaktas som fastinspända håldäck enligt studien.

Arbetet har inte kunnat fastställa till vilken grad innerväggar och avjämningsmassa påverkar styvheten av bjälklaget. Avjämningsmassan höjer dock egenfrekvensen då styvheten ökar snabbare än massan ökar. Innerväggar bidrar till att bjälklagen blir mer dämpade och styvare, de är inte styva nog att verka som upplag men höjer styvheten för bjälklaget som helhet.

Utifrån vad studien visat går det att beakta kontinuitet över upplagen i längdriktningen vid gånglaster eller andra lågfrekventa laster. Mellan elementen i tvärriktningen finns samverkan som kan beaktas, vilket bidrar till inverkan av upplag i tvärriktningen och höjda egenfrekvenser.

7.1 Förslag till fortsatta studier

Innerväggarnas inverkan på egenfrekvensen bedöms som väsentlig, men hur stor? Påverkar innerväggarna styvheten av bjälklaget i den grad som detta arbete antar? I fortsatta studier kan en djupare undersökning genomföras, med innerväggarna som fokusområde, för att se hur dessa skulle kunna beaktas vid modellering. Förslagsvis genomföra mätningar på ett bjälklag som är försett med avjämningsmassa men inte innerväggar för att sedan jämföra med flera mätningar av bjälklag med avjämningsmassa och innerväggar.

Vidare studier krävs också gällande inverkan av avjämningsmassans tjocklek. För detta arbete har inte mätningar genomförts för bjälklag med olika tjocklekar på avjämningsmassa.

Referenser

Chopra, Anil K. (2020) *Dynamics of structures* (Upplaga 5). Pearson Education

Eurokod 2 – del 1 (2005) *Dimensionering av betongkonstruktioner - Del 1: Allmänna regler och regler för byggnader*

Eurokod 2 – del 2 (2005) *Dimensionering av betongkonstruktioner - Del 2: Broar*

Eurokod 5 – del 1 (2004) *Dimensionering av träkonstruktioner – Del 1: Gemensamma regler och regler för byggnader*

Heyden Susanne, Dahlblom Ola, Olsson Anders och Sandberg Göran (2008) *Introduktion till strukturmekniken*, Studentlitteratur

ISO 10137 (2008) *Grundläggande dimensioneringsregler för bärverk – Byggnaders samt gång- och cykelbroars brukbarhet med hänsyn till svängningar och vibrationer.*

Johansson, Pia (2009) *Vibration of Hollow core concrete elements induced by walking.* Byggmekanik, LTH

Lindstedt Pär, Aprobo Ab, *Att lösa akustikproblem*, 2008

URL: www.subfloor.se/app/uploads/2021/12/db_broschyr_081205_lr-kompr_2.pdf

Linotol (2020) *Pågjutning på prefabbjälklag*

URL: https://www.linotol.se/wp-content/uploads/Linotol_Pa%CC%8Agjutning_produkblad_2020.pdf

Liu Fangzhou (2019) *Dynamic analysis of hollow core concrete floors*, Kungliga Tekniska Högskolan

Naturvårdsverket *Klimatet och bygg- och fastighetssektorn 2025*

URL: www.naturvardsverket.se/amnesomraden/klimatomställningen/omraden/klimatet-och-bygg--och-fastighetssektorn/

Ottosen Niels, Petersson Hans (1992) *Introduction to finite element method*, Pearson Education (us)

Starka Betong, (2014) *Elementfolder: Betongelement*

URL: <https://www.starka.se/wp-content/uploads/2017/02/elementfolder-2014.pdf>

Starka Betong, (2025) *Prefab – handbok: Betongelement*

Svenskbetong, *Industrialisering och kvalitet 2025*

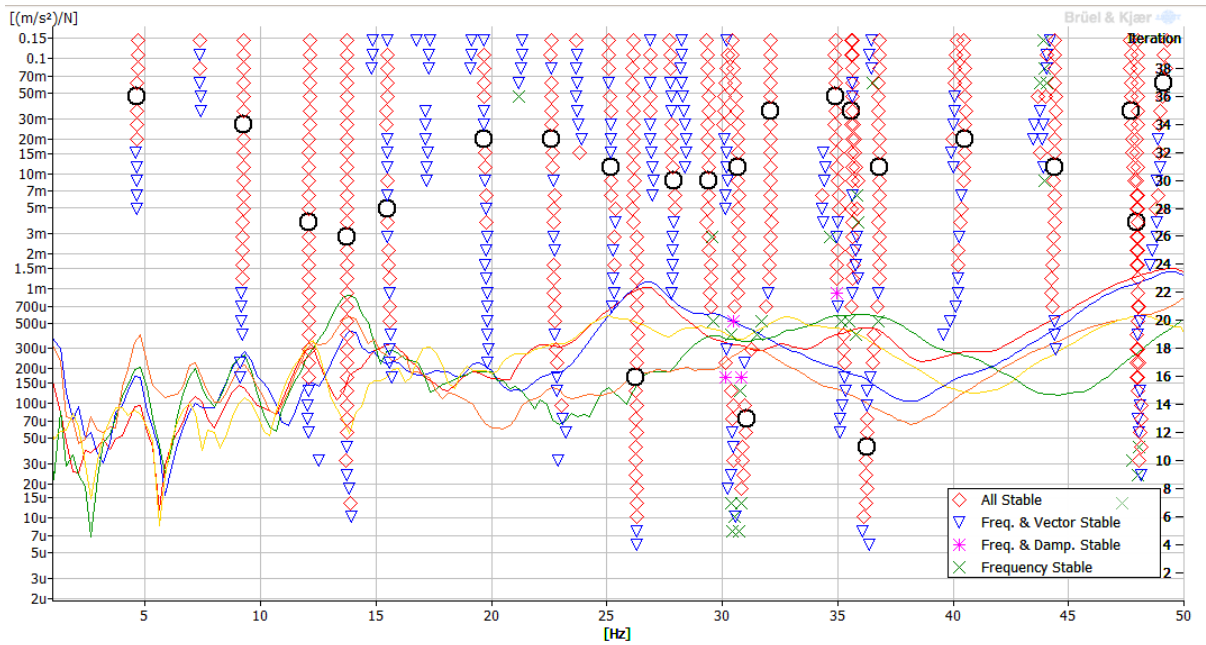
URL: <https://www.svenskbetong.se/om-betong/prefab/industrialisering-och-kvalitet>

3DExperiance – user assistance (2025) *Abaqus*, Dassault Systemes ,

URL: <https://help.3ds.com>

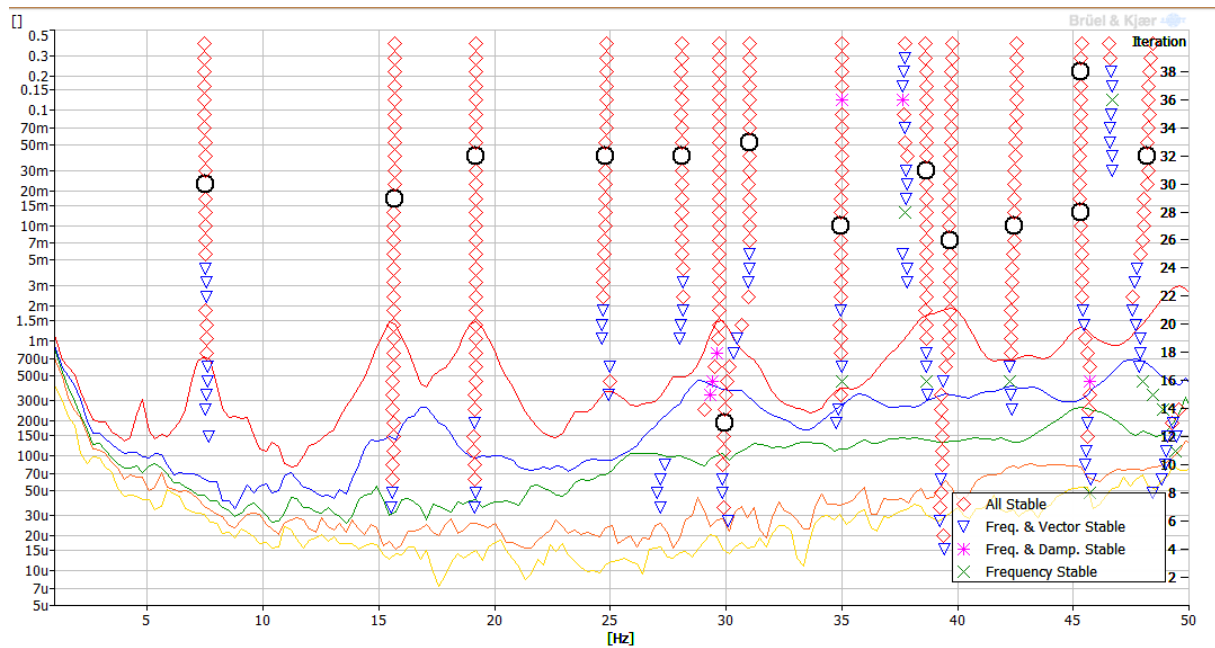
Appendix A

Mätning innan foggjutning



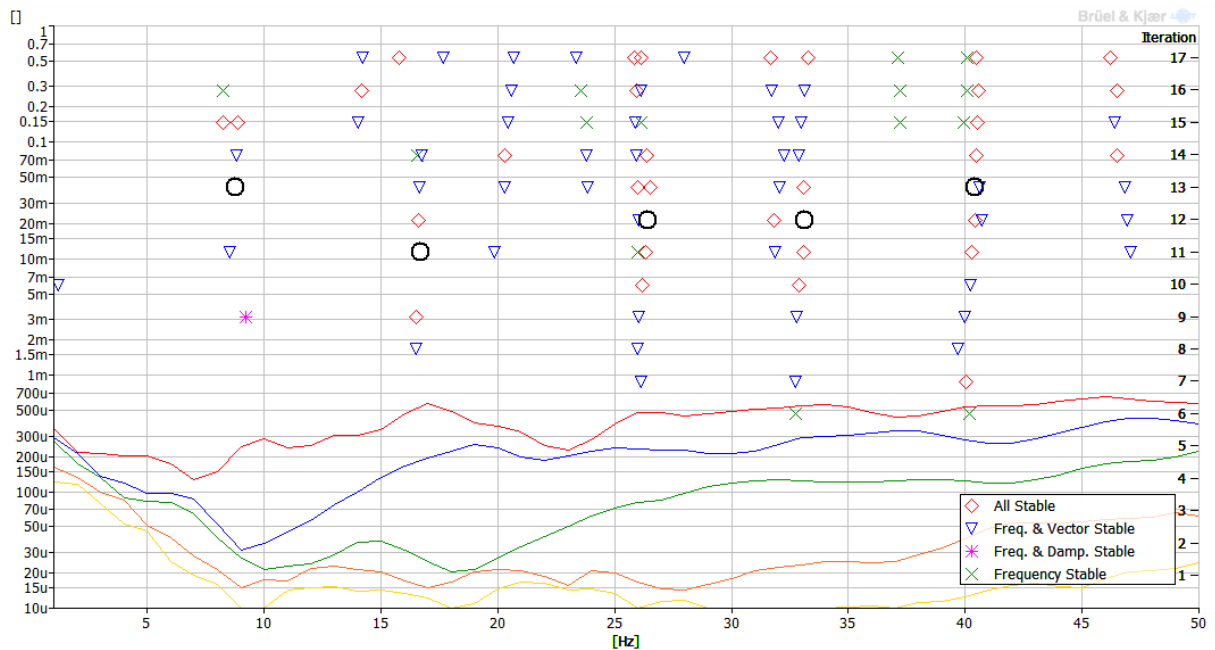
Mode	Damped Frequency (Hz)	Dampi...	Description	Complexity	Parameter Estimation Method
<input checked="" type="checkbox"/>					
<input checked="" type="checkbox"/> 1	4.66499	4.76812		0.46202	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 2	9.27432	6.22293		0.08061	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 3	12.10602	4.37886		0.0418	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 4	13.76602	4.90071		0.16254	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 5	15.51132	3.16099		0.24957	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 6	19.69395	1.90362		0.21777	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 7	22.61862	3.06261		0.1738	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 8	25.17729	2.0222		0.47441	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 9	26.27705	4.55066		0.0654	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 10	27.90098	2.44253		0.36037	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 11	29.41553	3.44243		0.85735	Rational Fraction Polynomial-Z

Mätning efter foggjutning



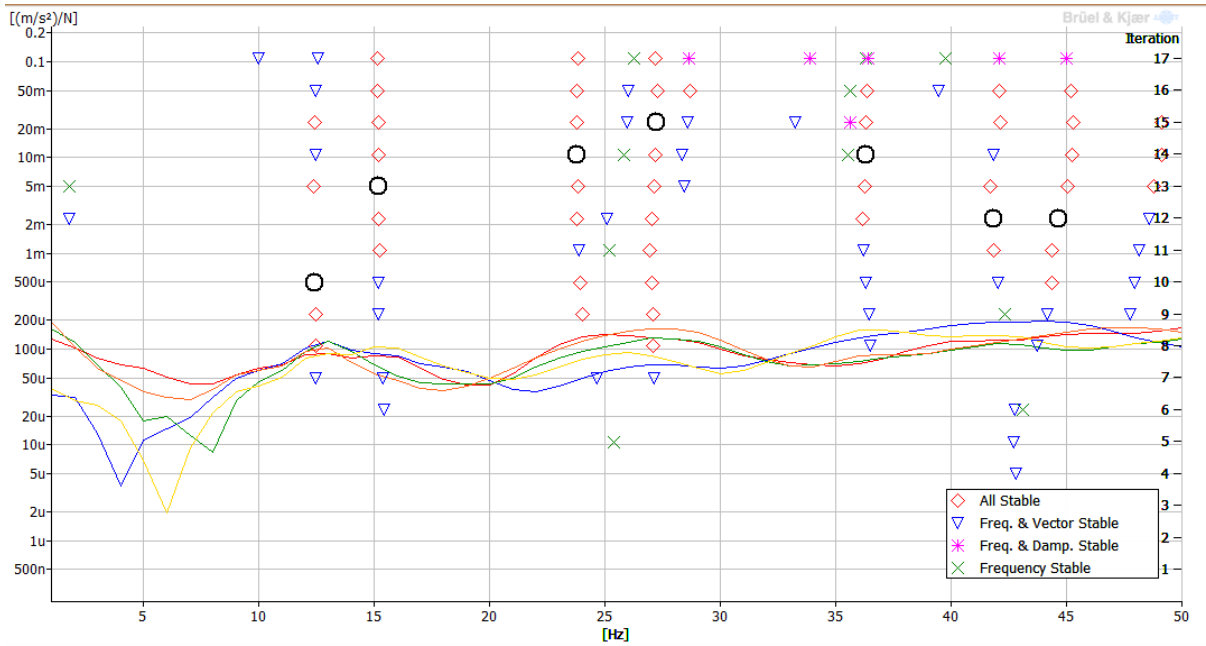
Mode	Damped Frequency (Hz)	Dampi...	Description	Complexity	Parameter Estimation Method
<input checked="" type="checkbox"/>					
<input checked="" type="checkbox"/> 1	7.50747	5.34301		0.17572	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 2	15.67905	3.31114		0.08928	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 3	19.19675	3.81309		0.02338	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 4	24.8097	4.17786		0.09859	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 5	28.10718	3.54929		0.59984	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 6	29.94875	2.71302		0.01701	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 7	31.01632	2.61455		0.99883	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 8	34.98205	3.0297		0.12611	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 9	38.65963	3.34801		0.07362	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 10	39.66413	2.50113		0.16623	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 11	42.47292	2.2548		0.43689	Rational Fraction Polynomial-Z

Mätning mitt på bjälklag som foggjutits, avjämnats och innerväggar monterats



Mode	Damped Frequency (Hz)	Dampi...	Description	Complexity	Parameter Estimation Method
<input checked="" type="checkbox"/>					
<input checked="" type="checkbox"/> 1	8.78964	16.332...		0.30802	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 2	16.68661	11.712...		0.02888	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 3	26.44476	12.971...		0.11547	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 4	33.12387	9.20964		0.08245	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 5	40.44533	8.18035		0.08152	Rational Fraction Polynomial-Z

Mätning i kanten av bjälklag som foggjutits, avjämnats och innerväggar monterats.



Mode	Damped Frequency (Hz)	Dampi...	Description	Complexity	Parameter Estimation Method
<input checked="" type="checkbox"/> 1	12.43192	12.831...		0.00974	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 2	15.17991	11.189...		0.05765	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 3	23.77584	9.88931		0.06842	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 4	27.2156	11.574...		0.06937	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 5	36.28771	7.12916		0.39026	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 6	41.83058	6.54697		0.13483	Rational Fraction Polynomial-Z
<input checked="" type="checkbox"/> 7	44.67145	13.659...		0.15984	Rational Fraction Polynomial-Z