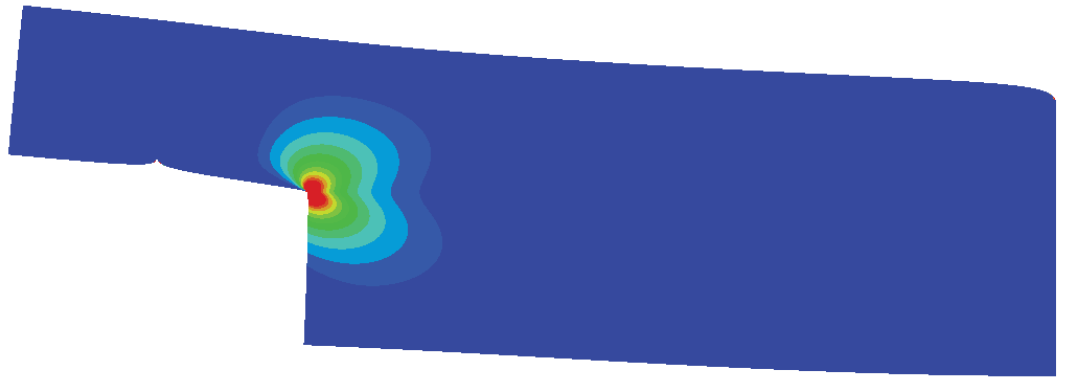




LUND
UNIVERSITY



BJÖRKBALKAR MED URTAG VID UPPLAG

Numerisk och experimentell analys

AXEL OLOFSSON och HUGO PERSSON

Structural
Mechanics

Master's Dissertation

DEPARTMENT OF CONSTRUCTION SCIENCES
DIVISION OF STRUCTURAL MECHANICS

ISRN LUTVDG/TVSM--26/5287--SE (1-97) | ISSN 0281-6679

MASTER'S DISSERTATION

BJÖRKBALKAR MED URTAG VID UPPLAG

Numerisk och experimentell analys

AXEL OLOFSSON och HUGO PERSSON

Supervisor: **HENRIK DANIELSSON**, Associate Professor, Division of Structural Mechanics, LTH.

Assistant Supervisor: **JOHANNES JONASSON**, Lic in Eng, Division of Structural Mechanics, LTH.

Examiner: Professor **ERIK SERRANO**, Division of Structural Mechanics, LTH.

Copyright © 2026 Division of Structural Mechanics,
Faculty of Engineering LTH, Lund University, Sweden.

Printed by V-husets tryckeri LTH, Lund, Sweden, June 2026 (PI).

For information, address:

Division of Structural Mechanics,
Faculty of Engineering LTH, Lund University, Box 118, SE-221 00 Lund, Sweden.

Homepage: www.byggmek.lth.se

Abstract

Birch is a wood species which, despite its good mechanical properties, is not used to any great extent for load-bearing structures. One reason is the lack of knowledge regarding the material's fracture behavior, which has made the design of birch structures complicated and existing regulations difficult to apply. In this thesis, the fracture properties of birch have been investigated in greater detail, primarily focusing on beams with notches at the supports.

The work has included both numerical analysis and experimental testing. Several different calculation methods have been used and compared. The mean stress method and the initial crack method are two applied approaches based on fracture mechanics and finite element analysis. In addition, hand-calculation methods such as Gustafsson's method have been used. The theoretically calculated results were compared with test results obtained from three-point bending tests of notched beams. In order to evaluate and compare the results, calculations and tests were carried out for both birch and spruce. Four different beam heights (25, 50, 100, and 200 mm) were investigated with the aim of broadening the analysis and attempting to capture the phenomenon of size effect. For spruce, all four beam heights were tested experimentally, while for birch, due to limitations in the availability of material, only the two smallest beam heights were tested. However, theoretical calculations were performed for all four beam heights for both spruce and birch.

The investigation shows that the birch beams have a significantly greater load-bearing capacity than the corresponding spruce beams for the application considered in this work. Modeling, calculations, and experimental results all indicate that the load-bearing capacity of the birch beams was approximately twice that of the spruce beams. The phenomenon of size effect was observed, and the ability of the calculation methods to account for this effect was evaluated.

Finally, the current design rules in Eurocode 5 were examined with regard to the design of notched beams. Analysis of the regulations shows that when applied to birch, the load-bearing capacity is underestimated, and therefore an adjustment of the design rules would be necessary. One alternative for revision of the rules is to modify the factor k_n . However, there remains some uncertainty regarding how such a correction should be made.

Sammanfattning

Björk är ett träslag som trots sina goda mekaniska egenskaper, inte används i speciellt stor utsträckning för bärande konstruktioner. En av anledningarna är bristande kunskap inom träslagetets beteende vid brott, vilket har lett till att dimensioneringen av björkkonstruktioner är komplicerad och regelverk är svåra att följa. I detta examensarbete har björkens brottegenskaper undersökts närmare, huvudsakligen med fokus på balkar med urtag vid upplag.

Arbetet har innefattat både numerisk analys och experimentella försök. Flera olika beräkningsmetoder har använts och jämförts mot varandra. Medelspännings- och initiala sprick-metoden är två tillämpade metoder som är baserade på brottmekanik och finita elementberäkningar. Dessutom har handberäkningsmetoder såsom Gustafssons metod använts. De teoretiskt framräknade resultaten har jämförts med praktiska provningsresultat erhållna från trepunktsböjning av balkar med urtag. För att kunna värdera och jämföra resultat har beräkning och provning utförts för både björk och gran. Fyra olika balkhöjder (25, 50, 100 och 200 mm) har undersökts med syftet att göra analysen bredare samt försöka fånga upp fenomenet storlekseffekt. För gran har samtliga fyra balkhöjder provats experimentellt medan för björk har, på grund av begränsning av material, endast de två minsta balkhöjderna provats. Dock har det genomförts teoretiska beräkningar på alla fyra balkhöjder, både för gran och björk.

Undersökningen visar att balkar av björk har en betydligt högre bärförmåga än motsvarande balkar av gran, för den aktuella tillämpningen. Både modellering, beräkning samt experimentella resultat tyder på att björkbalkarnas kapacitet är cirka dubbelt så stor. Fenomenet storlekseffekt konstateras där beräkningsmetodernas förmåga att ta hänsyn till effekten utvärderas.

Slutligen undersöks gällande regelverk Eurokod 5, med avseende på dimensionering av balkar med urtag. Analys av reglerna visar att vid tillämpning på björk underskattas bärförmågan och därmed skulle en justering av dimensioneringsreglerna behöva göras. Ett alternativ till justering är att korrigera faktorn k_n . Det råder dock viss osäkerhet kring hur korrigeringen bör göras.

Förord

Detta examensarbete är den avslutande delen av våra studier på civilingenjörsprogrammet i Väg- och vattenbyggnad på Lunds Tekniska Högskola. Arbetet har utförts under våren 2026 på avdelningen för Byggnadsmekanik.

Vi vill rikta ett stort tack till vår handledare Henrik Danielsson och vår biträdande handledare Johannes Jonasson för allt stöd vi fått i detta arbete, med allt från FE-modellering till provuppställning. Vi vill även rikta ett stort tack till Markus Detter från TU Wien för stöttning vid tillverkningen av provkroppar.

Lund, Maj 2026

Axel Olofsson & Hugo Persson

Notation

Latinska bokstäver

a - Spricklängd
 a_0 - Spricklängd
 b - Bredd
 C - Eftergivlighet
 E - Elasticitetsmodul
 E_I - Elasticitetsmodul för mod 1
 E_{II} - Elasticitetsmodul för mod 2
 E_x - Elasticitetsmodul i längsriktningen
 E_y - Elasticitetsmodul i tvärriktningen
 F_c - Uppsprickningslast
 F_{\max} - Maxlast
 f_t - Draghållfasthet
 f_v - Skjuvhållfasthet
 G - Energifrigörelsehastighet
 G_C - Kritisk energifrigörelsehastighet
 G_I - Energifrigörelsehastighet för mod 1
 G_{IC} - Kritisk energifrigörelsehastighet för mod 1
 G_{II} - Energifrigörelsehastighet för mod 2
 G_{IIC} - Kritisk energifrigörelsehastighet för mod 2
 G_{III} - Energifrigörelsehastighet för mod 3
 G_f - Specifik brottenergi
 G_{xy} - Skjuvmodul
 h - Total tvärsnittshöjd
 h_{ef} - Effektiv tvärsnittshöjd
 i - Urtagets lutning
 k - Formfaktor
 K_I - Spänningsintensitetsfaktor för mod 1
 K_{IC} - Kritisk spänningsintensitetsfaktor för mod 1
 K_{II} - Spänningsintensitetsfaktor för mod 2
 K_{IIC} - Kritisk spänningsintensitetsfaktor för mod 2
 k_b - Formfaktor
 k_h - Formfaktor
 k_l - Formfaktor
 k_n - Materialparameter
 k_v - Korrektionsfaktor
 l_{ch} - Karakteristisk längd
 P_c - Kritisk last
 r - Avstånd från sprickspets
 V - Volym
 V_f - Tvärkraft

x_0 - Medelspänningslängd

Δx - Elementstorlek

Grekiska bokstäver

α - Förhållande mellan effektiv och total tvärsnittshöjd

β - Förhållandet mellan sträckan från upplag till urtag och total tvärsnittshöjd

ν_{xy} - Poissons tal

σ - Normalspänning

σ_{yy} - Normalspänning tvärs fiberriktningen

τ - Skjuvspänning

τ_{xy} - Skjuvspänning

Innehåll

Abstract	I
Sammanfattning	III
Förord	V
Notation	VII
Innehåll	IX
1 Introduktion	1
1.1 Bakgrund	1
1.2 Mål	1
1.3 Metod	2
1.4 Avgränsningar	2
2 Materialegenskaper för trä	3
2.1 Uppbyggnad och struktur	3
2.2 Mekaniska egenskaper	4
2.3 Gran	5
2.4 Björk	5
3 Linjärelastisk brottmekanik	7
3.1 Typer av sprickpropagering	7
3.2 Sprickorienteringar	8
3.3 Energifrigörelsehastighet och brottenergi	8
3.4 Spänningsfältet vid en sprickspets	9
3.5 Begränsningar med LEFM	10
3.6 Medelspänningsmetoden	11
3.7 Initiala sprick-metoden	13
4 Eurokod 5 - balkar med urtag	15
4.1 Gustafssons metod	15
4.2 Dimensionering enligt Eurokod	15
4.3 Framtagning av k_n	17
4.4 Storlekseffekter	18
5 Metod	21
5.1 Geometri	21
5.2 Materialparametrar	22
5.3 Provning	23

5.3.1	Provningsserier	23
5.3.2	Tillverkning av provkroppar	25
5.3.3	Provuppställning	26
5.4	Modellering	29
5.4.1	Medelspänningsmetoden	29
5.4.2	Initiala sprick-metoden	30
5.4.3	Jämförelse av modelltyper	31
5.4.4	Konvergensstudie av elementstorlek	34
5.5	Handberäkningsmetoder	38
5.5.1	Beräkning enligt Eurokod	38
5.5.2	Beräkning enligt Gustafsson-metoden	39
6	Resultat	41
6.1	Provningar	41
6.1.1	Sprickbildning	41
6.1.2	Uppsprickningslast	41
6.1.3	Densitet och fuktkvot	49
6.2	Modellering	50
6.2.1	Medelspänningsmetoden	50
6.2.2	Initiala sprick-metoden	53
6.2.3	Jämförelse av modelleringsmetoder	56
6.3	Beräkningar enligt Gustafsson och Eurokod 5	57
6.3.1	Gustafsson-metoden	57
6.3.2	Eurokod	59
6.3.3	Summering av resultat	59
6.4	Storlekseffekt	62
6.5	Jämförelse mellan gran och björk	64
6.6	Faktor k_n	65
7	Diskussion	69
7.1	Experimentella resultat	69
7.2	Utvärdering av resultat	70
7.3	Anpassning av dimensioneringsregler	72
8	Slutsatser och framtida studier	75
8.1	Förslag på framtida studier	76
	Litteratur	77
	Bilagor	78
	A Ritningar	79
	B Provuppställning	81
	C LVDT	85
	D Scanning	93

1 Introduktion

1.1 Bakgrund

Användningen av trä som byggnadsmaterial har ökat de senaste åren. Dominerande träslag i konstruktioner har länge varit barrträ, framförallt gran, men under senare tid har intresset för lövträslag såsom björk ökat. Dagens kunskaper inom träkonstruktioner är huvudsakligen baserade på barrträ. För att bättre kunna utnyttja björkens egenskaper krävs det att fler undersökningar och efterforskningar görs på träslaget.

Björk är ett hårdare träslag som har flera fördelaktiga mekaniska egenskaper. Jämfört med gran har björk generellt både högre styvhet och hållfasthet [1]. Även energin som krävs för att brott ska uppstå är betydligt större. Dock medför dessa fördelar att risken för sprödbrott ökar, vilket kan vara negativt ur konstruktionssynpunkt. Ett exempel på utsatt konstruktion är balkar med urtag, där dragspänningar vinkelrätt fiberriktningen och skjuvspänningar uppstår, vilket kan leda till uppsprickningsbrott vid relativt låga yttre laster.

Dimensioneringsregler och ekvationer, enligt Eurokod 5, bygger i stor utsträckning på materialets hållfasthet. Bestämning av bärförmågan görs genom beräkning av maximal tillåten spänning för materialet. För en del tillämpningar justeras dock hållfasthetsvärden med korrektionsfaktorer, som exempelvis tar hänsyn till storlekseffekter. Storlekseffekter innebär att den formella hållfastheten (d.v.s bärförmåga per areaenhet) minskar relativt hållfastheten, i takt med att storleken på konstruktionen ökar. Korrektionsfaktorerna är ofta empiriskt bestämda efter egenskaper för gran. För att erhålla bättre dimensioneringsregler för konstruktioner av björk behöver dessa faktorer undersökas närmare.

1.2 Mål

Detta examensarbete har som övergripande mål att öka kunskaperna om brottegenskaper hos träslaget björk när det utsätts för dragspänningar vinkelrätt fiberriktningen samt skjuvspänningar. Inverkan av storlekseffekter kommer också att analyseras närmare. Arbetet innefattar numeriska analyser med finita elementmetoden (FEM) och provningar av balkar med urtag vid upplag.

En annan målsättning är att undersöka huruvida dimensioneringsregler enligt Eurokod 5 är tillämpbara på björk. Arbetet innefattar experimentella tester på både björk och gran för att kunna jämföra materialen. Erhållna resultat jämförs också med beräknade värden enligt Eurokod 5. Vidare undersöks även om dimensioneringsreglerna kan korrigeras för att bättre anpassas till materialegenskaper för björk.

1.3 Metod

Metodiken för examensarbetet är i ett första steg att genomföra experimentella tester för björk respektive gran. Provpuppställningen motsvaras av den i Eurokod 5 för balkar med urtag vid upplag. Testerna genomfördes med varierande balkhöjd på provkropparna för att få en bättre förståelse för fenomen som till exempel storlekseffekt. Fyra olika balkhöjder undersöktes: $h = 25, 50, 100$ och 200 mm. Resultaten från provningar jämfördes med resultat från numerisk modellering i Abaqus, baserade på linjärelastisk brottmekanik. Beräkningar enligt ekvationer från Eurokod 5 genomfördes också för att bedöma om de är applicerbara även på björk eller om det krävs justeringar i standarden. Majoriteten av testerna utfördes för båda träslagen med syfte att jämföra resultaten. Eftersom provpuppställningen motsvarar fallet i Eurokod 5 bör resultaten för gran överensstämma med de faktorer som är bestämda där.

Förutom experimentella försök och numeriska beräkningar kommer en litteraturstudie att göras. Relevant litteratur och tidigare forskning på ämnet kommer att analyseras och utgåas ifrån. Generativ AI har främst använts som stöd genom inbyggd rättstavningskontroll. AI användes också för att översätta sammanfattningen till engelska med syftet att skapa ett första utkast till avsnittet Abstract. Utkastet har därefter kontrollerats och korrigerats.

1.4 Avgränsningar

Detta examensarbete har följande avgränsningar:

- Endast balkar med 90 graders urtag undersöks.
- De geometriska parametrarna α och β hålls konstanta till 0.5 för alla undersökta balkar.
- För björk har enbart de två minsta balkhöjderna ($h = 25$ och 50 mm) provats experimentellt.
- Numeriska beräkningar begränsas till tvådimensionella linjärelastiska analyser.
- Upplagsvillkoren som studeras är endast en balk som är fritt upplagd där urtaget är vid upplag.
- Materialet i beräkningar antas vara linjärelastiskt och därmed tas ingen hänsyn till icke-linjära beteenden eller lokal plasticering.

2 Materialegenskaper för trä

I detta avsnitt presenteras översiktliga egenskaper för trä som material. Det är främst de mekaniska egenskaperna som är i fokus, eftersom det är dessa som är av intresse för vidare utredning. Nedan presenteras först trä översiktligt för att sedan göra en fördjupning i gran respektive björk.

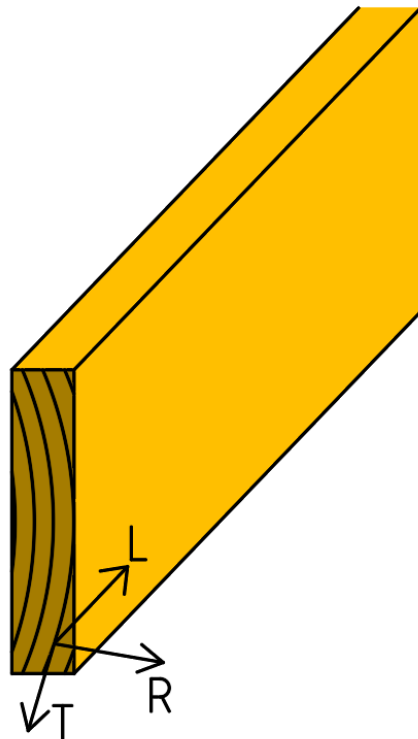
2.1 Uppbyggnad och struktur

Byggnadsmaterialet trä är ett organiskt material som erhålls genom bearbetning av skogens träd. Dess egenskaper och struktur kan därmed härledas till trädets levnadsstadier och utveckling. Ett växande trä behöver främst hantera vertikala laster, tryckspänningar, i sin längdriktning [2]. Genom evolution har därför träd utformats för att vara som starkast i just denna riktning. Förutom vertikala laster utsätts träd ofta för vindlast. För att hantera vindlasternas påverkan är trädets form rund och har relativt goda egenskaper i böjning.

Då träd är ett levande material uppstår det naturliga defekter. Med defekter menas oregelbundenheter i materialet som begränsar de mekaniska egenskaperna. Den största effekten utgörs av kvistar [2]. Trädet låter i sin topp och krona grenar växa ut. Detta för att öka ytan där löv respektive barr kan växa och sedan ta upp solljus, som är essentiellt för fotosyntesen. Grenarna behöver växa ut från stammen, vilket innebär att fiberriktningen ändras lokalt. I ett växande skede påverkar inte detta hållfastheten, men när trädets stam har bearbetats till olika byggnadsmaterial kommer kvisten att ha stor påverkan. Anledningen är att vid kvistar är inte längre fiberriktningen kontinuerlig, vilket ger reduktion av styrkan, framförallt i stammens riktning. Förutom kvistar finns det andra defekter som kan förekomma. Det kan till exempel vara att fiberriktningen är aningen vinklad och inte kontinuerligt rak. Även hålrum eller liknande defekter kan förekomma. Med anledning av dessa defekter behöver större säkerhetsmarginaler tas vid dimensionering av träkonstruktioner. Dessutom sorteras och delas träet in i olika virkesklasser baserat på dess kvalitet och kapacitet.

2.2 Mekaniska egenskaper

Trä är ett ortotropt material vilket innebär att det har olika mekaniska egenskaper i tre, mot varandra vinkelräta, riktningar. Dessa riktningar benämns som radiell-, tangentiell- samt longitudinell riktning [3]. Den longitudinella riktningen (fibreriktningen) är den riktning som fibrerna har och denna riktning motsvaras av trädets längdriktning, riktningen som trädet växer. Den tangentiella riktningen är parallell med årsringarna i horisontalplanet (se Figur 2.1). Riktningen vinkelrätt den tangentiella i horisontalplanet är definierad som den radiella.



Figur 2.1: Illustration av longitudinell (L), radiell (R) och tangentiell (T) riktning i trä.

Fibreriktningen är, som tidigare nämnt, den starkaste riktningen. Parallellt med fibreriktningen klarar träet både stora tryck- och dragspänningar. För en provkropp utan defekter, såsom kvistar, är spänning/töjningsförhållandet i princip linjärt vid dragbelastning [2]. För tryckbelastning ser spänningsförhållandet lite annorlunda ut, med anledning av plasticering.

För belastning vinkelrätt fibreriktningen är hållfastheten betydligt lägre jämfört med parallellt fibreriktningen [2]. För tryckbelastning vinkelrätt fibreriktningen kommer kapaciteten vara större än för drag men ändå betydligt mindre än för belastning parallellt fibreriktningen.

Skjuvhållfastheten varierar också med riktningen. I planet parallellt med fibreriktningen är hållfastheten som störst. I planet vinkelrätt mot fibreriktningen är kapaciteten ungefär halverad. Skjuvning i detta plan benämns som rullskjuvning.

Sprödhet är en term som beskriver ett materials beteende vid brott. Vid ett sprött brott brister materialet hastigt, utan förvarning i form av stora deformationer eller stor nedböjning. Nästan ingen plastisk deformation sker vid sprödbrott. För trä är begreppet sprödhet särskilt relevant. Hur sprött ett material är kan inom brottmekanik beskrivas med tre faktorer: styvhet (E), hållfasthet (f_t) samt specifik brottenergi (G_f) [1]. Som mått på sprödheten används ofta den karakteristiska längden (l_{ch}).

$$l_{ch} = \frac{E \cdot G_f}{f_t^2} \quad (2.1)$$

2.3 Gran

De vanligaste barrträden som används i byggindustrin i Sverige är tall och gran. Enligt [4] utgör gran nästan 40 procent av Sveriges totala virkesförråd. Granen har egenskaper som gör den lämplig som byggnadsmaterial. Träslaget har bra hållfasthet relativt sin densitet. Detta tillsammans med att det är förhållandevis mjukt har gjort gran till ett förstaval vid produktion av t.ex. konstruktionsvirke och balkar. Granen växer också ofta rakt och relativt snabbt, vilket ytterligare har gjort den mer åtråvärd.

2.4 Björk

Det vanligaste lövträdslaget är björk. Björken finns i hela landet och utgör nästan 13 procent av Sveriges totala virkesförråd [5]. I dagsläget används björk mestadels inom pappersindustrin samt som massaved. Under senare tid har intresset för att använda björk som byggnadsmaterial ökat. Anledningen är, förutom att tillgången är relativt god, att träslaget har eftertraktade mekaniska egenskaper. Dock används björken fortfarande i väldigt begränsad omfattning i bärande konstruktioner. Anledningen är främst begränsningar i regelverk, vilka grundar sig i att kunskaper om materialet är begränsade.

Björk är ett hårt träslag och jämfört med gran har det en högre hållfasthet och styvhet [1]. Brottenergin är avsevärt större, vilket också är en fördel vid många tillfällen. En nackdel är dock att risken för sprödbrott är högre, speciellt vid dragspänningar vinkelrätt fiberriktningen. Björk kan också ha sämre beständighet än gran, eftersom björk är mer känsligt för röta [5].

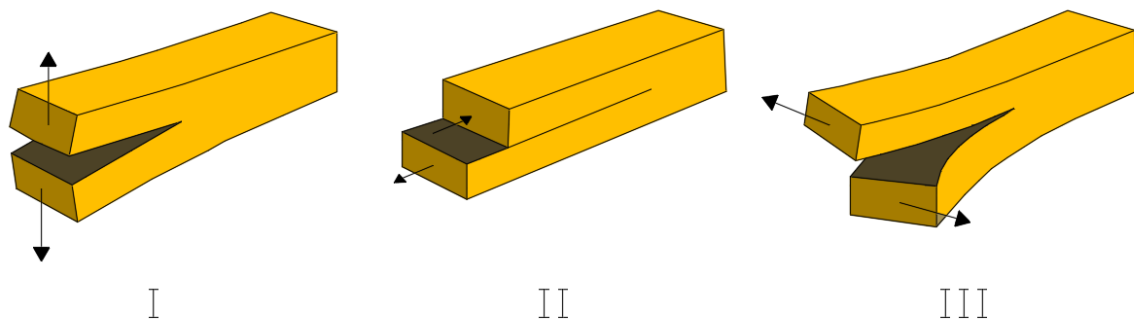
3 Linjärelastisk brottmekanik

Brottmekanik är en teori baserad på ett materials beteende vid brott. Brott avser här sprickbildning eller sprickpropagering. Ett material anses gå till brott när kontakt mellan delar i materialkroppen förloras [6]. När materialet delar sig, uppstår nya fria ytor. Brott i ett material styrs av tre olika faktorer: typ av material, typ av last, samt defekter och svagheter. Konventionell linjärelastisk brottmekanik (LEFM) baseras på att det redan finns en befintlig spricka som kan propagera. Dessutom antas materialet ha ett idealt linjärelastiskt beteende, med obegränsad hållfasthet.

Teorin för brottmekanik används i praktiken för dimensionering av vissa specifika konstruktioner enligt Eurokod 5 [1]. Exempel på konstruktioner är balkar med urtag samt balkar med förband som för in last vinkelrätt mot balkaxeln/fiberriktningen. Ekvationerna är dock anpassade för att förenkla beräkningsgången samt vara lik övriga dimensioneringsmetoder i Eurokoden och det framgår inte att det egentligen är brottmekanik som används.

3.1 Typer av sprickpropagering

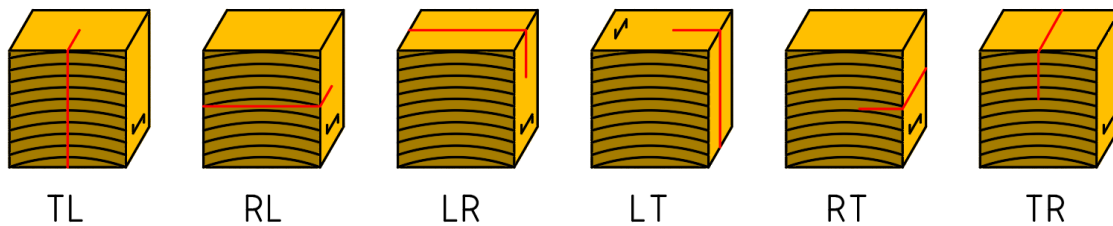
Inom brottmekanik har tre olika typer av sprickfall definierats [6]. Dessa tre fall är illustrerade i Figur 3.1 och hänvisas till enligt mod I, mod II och mod III. Det som avgör skillnaden mellan de olika fallen är hur sprickan belastas i förhållande till sprickplanet, vilken riktning lasten har. För mod I sker dragspänningar vinkelrätt mot sprickplanet vilket medför att sprickan utvidgas vertikalt, öppnas. Vid mod II sker belastning i form av skjuvspänningar i sprickplanet. Det tredje alternativet är mod III och innebär belastning av skjuvspänningar i planet med riktning vinkelrätt mot sprickpropageringsriktningen. Ytterligare kan flera av typerna ske samtidigt, och därmed blir inte en tydlig mod definierande.



Figur 3.1: Illustration av sprickmod I, II och III.

3.2 Sprickorienteringar

Det finns sex olika typer av sprickorienteringar för trä [1]. Detta grundar sig i att eftersom materialet trä är ortotrop finns det tre olika sprickplan med två olika riktningar för sprickutvecklingen vardera. För att underlätta förståelsen har beteckningarna L, R och T införts för fiber- (longitudinell), radiell- respektive tangentiellriktning. Bokstäverna kombineras två och två där den första bokstaven betecknar normalriktningen för sprickplanet och den andra bokstaven utgör i vilken riktning sprickan växer. I Figur 3.2 nedan illustreras samtliga sex sprickorienteringar med tillhörande beteckning.



Figur 3.2: Illustration av samtliga sprickorienteringar och dess respektive beteckning.

Vid belastning av en balk med urtag vid upplag kommer dragspänningar vinkelrätt fibrerna uppstå. I detta fall är två typer av sprickorienteringar aktuella, TL och RL [1]. Det är således dessa två situationer som kommer studeras närmare. Dessutom är träs kapacitet lägst i dessa två fall. Observera att detta endast gäller för konstruktionsvirke samt limträbalkar. För andra fall (KL-trä och LVL) kan andra sprickorienteringar vara aktuella.

3.3 Energifrigörelsehastighet och brottenergi

Inom linjärelastisk brottmekanik (LEFM) studeras vid vilken belastning som en befintlig spricka propagerar. Analys av sprickpropagering kan göras med energibetraktelser och så kallad energifrigörelsehastighet, G , som beskriver förändringen (minskningen) av en kropps potentiella energi vid ökning av den befintliga sprickytans area [6]. Värdet av G bestäms för en given last av kroppens och sprickans geometri, upplagsvillkor samt materialets styvhetsegenskaper (och är proportionell mot lastvärdet i kvadrat). Ett sprickpropageringsvillkor kan formuleras enligt:

$$G = G_C \quad (3.1)$$

där G_C är den kritiska energifrigörelsehastigheten, som beskriver materialets motstånd mot sprickpropagering och som inom LEFM betraktas som en materialegenskap. Värdet på G_C är dock beroende av sprickplanets orientering och aktuell uppsprickningsmod.

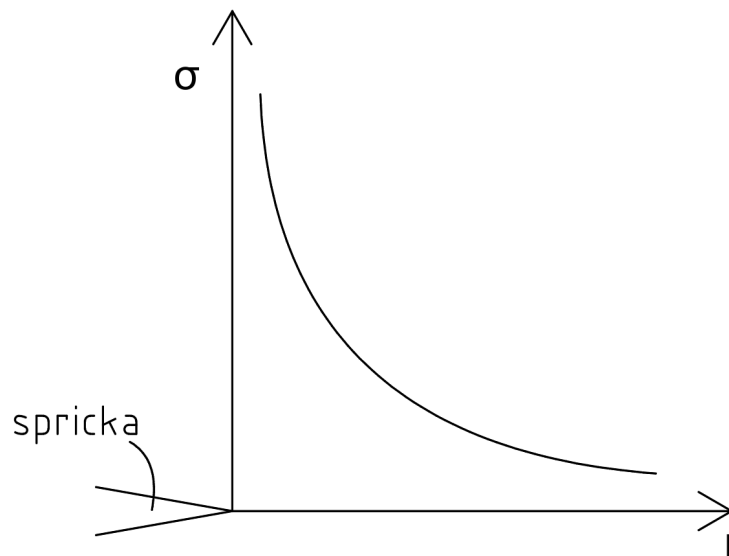
Vid belastning kan konstruktionen utsättas för flera olika moder, se Figur 3.1. Detta innebär att total energifrigörelsehastighet får bidrag från flera moder. Det kan vara möjligt att skilja på bidrag från respektive mod, enligt

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (3.2)$$

För att beskriva ett materials brotteeenskaper kan också brottenergi användas, som betecknas med G_f . Brottenergi är ett mått på hur mycket energi som krävs för att öka sprickarean med en areaenhet [1]. Därmed ger brottenergi ett mått på hur väl materialet kan motstå sprickbildning. Brottenergin G_f och den kritiska energifrigörelsehastigheten definieras inte exakt likadant men för ett idealt elastiskt material gäller $G_f = G_C$ [6]. Detta antagande antas gälla genom hela rapporten och för att öka förståelsen kommer fortsättningsvis ordet brottenergi även användas som benämning på den kritiska energifrigörelsehastigheten.

3.4 Spänningsfältet vid en sprickspets

I området nära en sprickspets i ett linjärelastiskt material uppstår spänningskoncentrationer och teoretiskt går spänningarna mot oändligheten vid spetsen av en skarp spricka [6]. I Figur 3.3 illustreras spänningen vinkelrätt sprickplanet för belastning i mod I. Spänningens storlek är proportionell mot $1/\sqrt{r}$, där r är avståndet från sprickspetsen.



Figur 3.3: Principiell figur för spänningsfältet i närheten av en spricka.

Spänningsfältet kring sprickspetsen kan, trots sin singularitet uttryckas både numeriskt och ibland också analytiskt för respektive mod. Dessa ekvationer är relativt komplicerade och presenteras därför inte här. Däremot blir första termen i dessa ekvationer dominerande när avståndet till sprickspetsen är litet [7] och spänningstillståndet kan därmed med relativt god noggrannhet beskrivas enbart med denna. Från dessa ekvationer kan de så kallade spänningsintensitetsfaktorerna definieras enligt

$$K_I = \lim(\sigma_{yy}(2\pi r)^{1/2}) \text{ då } r \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

$$K_{II} = \lim(\tau_{xy}(2\pi r)^{1/2}) \text{ då } r \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

för mod I respektive mod II, där variabeln r beskriver avståndet till sprickspetsen i sprickans utbredningsplan. Det finns motsvarande spänningsintensitetsfaktor för mod III men denna är inte relevant här då enbart tvådimensionella spänningstillstånd beaktas.

För spänningsintensitetsfaktorerna kan, precis som för energifrigörelsehastigheten (ekvation 3.1), ett sprickpropageringsvillkor ställas upp enligt

$$K_I = K_{IC} \quad (3.5)$$

$$K_{II} = K_{IIC} \quad (3.6)$$

där K_{IC} och K_{IIC} är de kritiska spänningsintensitetsfaktorerna för mod I respektive II.

3.5 Begränsningar med LEFM

Linjärelastisk brottmekanik har flera fördelar, bland annat enkelhet vid beräkning och modellering [8]. Teorin kan för många fall tillämpas med hjälp av handberäkningar eller med en enkel FEM-programvara. Det linjära betraktelsesättet gör analysen lik många andra typer av konstruktionsberäkningar, vilket kan underlätta förståelsen. Ytterligare en fördel är att teorin mestadels ger goda uppskattningar av brottbeteendet och därmed kapaciteten.

LEFM har dock flertalet begränsningar [6]. En begränsning i teorin är att inget material har ett idealt linjärelastiskt beteende. Trots detta kan goda resultat erhållas om rätt geometriska förutsättningar finns. Förutsättningarna gäller främst den s.k. brottprocesszonen (FPZ). Brottprocesszonen är området framför sprickspetsen där materialet bryts ner och skadas innan faktisk sprickpropagering sker. LEFM antar att brottprocesszonen är oändligt liten i förhållande till kroppens storlek [8]. Detta innebär att för små kroppar kan linjärelastisk brottmekanik ge sämre överensstämmelse med provningsresultat avseende sprickpropageringslast eftersom FPZ är relativt stor. Ytterligare en begränsning är att det antas att lokala spänningskoncentrationer samt materialhållfastheter kan vara oändligt stora, vilket inte överensstämmer med verkligheten.

För att bättre behandla konstruktioner där LEFM är begränsande, t.ex. små provkroppar, kan icke-linjär brottmekanik användas. Denna teori behandlas dock inte i denna rapport.

3.6 Medelspänningsmetoden

Konventionell spänningsanalys och ett brottkriterium baserat på jämförelse mellan maximal spänning och materialets hållfasthet kan inte tillämpas på kroppar med skarpa sprickor, eftersom spänningen vid sprickans spets teoretiskt blir oändligt stor. Det finns dock metoder som möjliggör användning av ett spänningsbaserat brottvillkor och som även är konsekvent med sprickpropageringsvillkor enligt LEFM. En sådan metod är medelspänningsmetoden, som beskrivs i [9]. Medelspänningsmetoden bygger på att istället för att betrakta spänningen i en punkt så betraktas medelspänningen inom en area (eller en volym). Eftersom medelspänningen är begränsad, även om spänningen vid sprickspetsen går mot oändligheten, kan ett medelspänningsbaserat kriterium användas som sprickpropageringskriterium. Medelspänningsmetoden kan tillämpas både på kroppar med och utan skarpa sprickor. För en tvådimensionell analys av en kropp med bredden b kan medelspänningsmetoden tillämpas enligt beskrivningen nedan.

Metoden tar avstamp i två kriterier, ett relaterat till spänning och ett från LEFM, baserat på sprickpropagering. Norris kriterium (ekvation 3.7) används som spänningsbaserat brottkriterium och kriteriet enligt Wu (ekvation 3.8) används för sprickpropagering.

$$\left(\frac{\sigma}{f_t}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{f_v}\right)^2 = 1.0 \quad (3.7)$$

Första termen i Norris-kriteriet beaktar dragspänning vinkelrätt fibrerna där σ är spänningen och f_t är hållfastheten. Andra termen motsvarar skjuvspänning där τ är spänningen och f_v hållfastheten. För kriteriet enligt Wu behandlar första och andra termen bidrag från mod I respektive mod II.

$$\frac{K_I}{K_{IC}} + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}}\right)^2 = 1.0 \quad (3.8)$$

I spänningskriteriet (ekvation 3.7) ersätts drag- och skjuvspänningarna med medelspänningar över en area som motsvaras av bredden b multiplicerat med längden x_0 . Längden x_0 bestäms genom att anta att bärförmågan från ekvation 3.7 (med beaktande av medelspänningar) ska vara lika stor som den bärförmåga som beräknas för fallet med en stor spricka och med kriterium enligt ekvation 3.8 [9].

Med utgångspunkt från spänningsintensitetsfaktorerna (ekvation 3.3 och 3.4) kan medeldrag- och medelskjuvspänningen framför sprickan beskrivas med ekvation 3.9 och 3.10. Dessa samband gäller för små x_0 .

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2K_I^2}{\pi x_0}} \quad (3.9)$$

$$\bar{\tau} = \sqrt{\frac{2K_{\text{II}}^2}{\pi x_0}} \quad (3.10)$$

Genom att använda uttrycken för medelspänningarna enligt ekvation 3.9 och 3.10 i det spänningsbaserade kriteriet enligt ekvation 3.7 kan medelspänningslängden x_0 bestämmas. Den kan uttryckas både med spänningsintensitetsfaktorer och hållfasthetsvärden (ekvation 3.11), men även med hjälp av styvhetsegenskaper, hållfasthetsvärden och energikvantiteter (ekvation 3.12).

$$x_0 = \frac{2}{\pi} \frac{K_{\text{I}}^2}{f_{\text{t}}^2} \left(1 + \frac{(K_{\text{II}}/K_{\text{I}})^2}{(f_{\text{v}}/f_{\text{t}})^2} \right) \quad (3.11)$$

$$x_0 = \frac{2}{\pi} \frac{E_{\text{I}} G_{\text{IC}}}{f_{\text{t}}^2} \frac{E_x}{E_y} \left(\frac{G_{\text{IIC}}}{G_{\text{IC}}} \right)^2 \frac{1}{4k^4} \left[\sqrt{1 + 4k^2 \sqrt{\frac{E_y}{E_x} \frac{G_{\text{IC}}}{G_{\text{IIC}}}} - 1} \right]^2 \left[1 + \frac{k^2}{(f_{\text{v}}/f_{\text{t}})^2} \right] \quad (3.12)$$

Kvoten k motsvarar förhållandet mellan mod I och II i blandad mod, se ekvation 3.13. För tillämpningar på tvådimensionella spänningstillstånd är mod III inte relevant. E_{I} och E_{II} är effektiva elasticitetsmoduler för mod I och II enligt ekvation 3.14 respektive 3.15.

$$k = \frac{K_{\text{II}}}{K_{\text{I}}} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{E_{\text{I}}} = \frac{1}{E_x} \sqrt{\frac{E_x}{2E_y}} \sqrt{\sqrt{\frac{E_x}{E_y} + \frac{E_x}{2G_{xy}} - \nu_{yx} \frac{E_x}{E_y}}} \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{E_{\text{II}}} = \frac{1}{E_x} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\sqrt{\frac{E_x}{E_y} + \frac{E_x}{2G_{xy}} - \nu_{yx} \frac{E_x}{E_y}}} \quad (3.15)$$

För fallet med enbart mod I ($k = 0$) kan ekvation 3.12 förenklas enligt 3.16 [8].

$$x_0 = \frac{2E_{\text{I}} G_{\text{IC}}}{\pi f_{\text{t}}^2} \quad (3.16)$$

Medelspänningsmetoden antas generellt överskatta kapaciteten för mindre balkar, både jämfört med övriga LEFM-metoder och experimentella resultat [9]. Anledningen är att eftersom längden x_0 är oberoende av storleken på balken kommer brottprocesszonen (FPZ) vara stor i relation till balkens geometri, vilket gör att belastningskapaciteten överskattas vid beräkning. Däremot, för en stor spricka i en stor provkropp (d.v.s när x_0 är liten i förhållande till sprickans längd), antas medelspänningsmetoden överensstämma med resultat från övriga LEFM-metoder.

Det finns andra varianter av medelspänningsmetoden där istället för att härleda ett uttryck för medelspänningslängden, används en förutbestämd och konstant medelspänningslängd x_0 . Ett exempel på en sådan variant beskrivs i [10] och slutsatsen från artikeln är att även denna variant av metoden lämpar sig bra för uppskattning av kapaciteten. Följande undersökningar i detta examensarbete kommer dock enbart behandla ursprungsmetoden där medelspänningslängden beräknas fram enligt beskrivningen ovan.

3.7 Initiala sprick-metoden

Förutom medelspänningsmetoden kan initiala sprick-metoden också användas [9]. Beskrivningen nedan bygger på antagandet om tvådimensionell analys för plan spänning av en kropp med bredden b . Metoden innebär att en spricklängd ($a_0 = x_0/2$) bestäms och denna spricklängd används som utgångspunkt för fortsatta beräkningar. Ett vanligt sätt är att sedan använda sig av kompliansmetoden [8]. Kompliansmetoden innebär att skillnaden i eftergivlighet mellan två eller flera modeller studeras. För detta fall, med initiala sprick-metoden, studeras två olika spricklängder med den tidigare bestämda spricklängden som utgångspunkt. Större spricklängd medför ett mindre styvt system, mer eftergivligt. Ett mer eftergivligt system genererar större deformation för konstant last och därmed en minskad potentiell energi. Den frigjorda energin (minskningen av den potentiella energin) per ökad area sprickyta vid propagering kan ställas i relation till den energi som krävs för sprickpropagering, enligt ekvation 3.1. Den frigjorda energin kan uttryckas som ändringen av kompliansen, C , med avseende på spricklängden, a . Baserat på en sådan energibetraktelse kan, för ett system som belastas av en enskild punktlast P , ett uttryck för den kritiska lasten P_c formuleras enligt

$$P_c = \sqrt{2bG_c \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)^{-1}} \quad (3.17)$$

För att ta hänsyn till inverkan från både mod I och II behöver ett viktat värde för brottenergin beräknas. Det kan göras på olika sätt, men där förhållandet mellan spänningarna, faktor k , enligt ekvation 3.13 utnyttjas. Värdet för G_C kan sedan tas fram med ekvation 3.18 [9]. Precis som för medelspänningsmetoden antas inte mod III förekomma.

$$G_C = G_{IC} + G_{IIC} = \left[-\frac{K_{IIC}^2}{2K_{IC}k^2} + \sqrt{\frac{K_{IIC}^4}{4K_{IC}^2k^4} + \frac{K_{IIC}^2}{k^2}} \right]^2 \left(\frac{1}{E_I} + \frac{k^2}{E_{II}} \right) \quad (3.18)$$

Värdena för de kritiska spänningsfaktorerna kan erhållas enligt nedan.

$$K_{IC} = \sqrt{E_I G_{IC}} \quad (3.19)$$

$$K_{IIC} = \sqrt{E_{II} G_{IIC}} \quad (3.20)$$

Enligt [9] förväntas metoden med en initial spricka underskatta kapaciteten. Detta gäller särskilt för mindre balkar. Anledningen till att det generellt blir en underskattning av kapaciteten är att metoden härleds baserat på teorin för en inre spricka. Då detta fall innefattar en spricka från ytterkanten på urtaget borde spricklängden beräknas aningen kortare, vilket ger en större last.

4 Eurokod 5 - balkar med urtag

4.1 Gustafssons metod

Dagens gällande regelverk ([11]) för dimensionering av balkar med urtag bygger på Gustafssons metod [12]. Gustafssons metod är en teori som har utvecklats av Per Johan Gustafsson och bygger på LEFM. Metoden utgår från sprickpropageringskriteriet enligt ekvation 3.17 och materialets brottenergi G_c . Brottenergin innefattar egentligen bidrag från både mod I och II men en förenkling görs där brottenergin enbart antas komma från mod I [13]. Detta antagande innebär en förenkling på ”säkra sidan” eftersom G_{IC} generellt är lägre än G_{IIC} . Eftergivligheten beskrivs med hjälp av balkteori och genom omskrivningar kan ekvation 4.1 ställas upp, där V_f är tvärkraften vid sprickpropagering.

$$\frac{V_f}{b\alpha h} = \frac{\sqrt{G_{IC}/h}}{\sqrt{0.6(\alpha - \alpha^2)/G_{xy} + \beta\sqrt{6(\frac{1}{\alpha} - \alpha^2)/E_x}}} \quad (4.1)$$

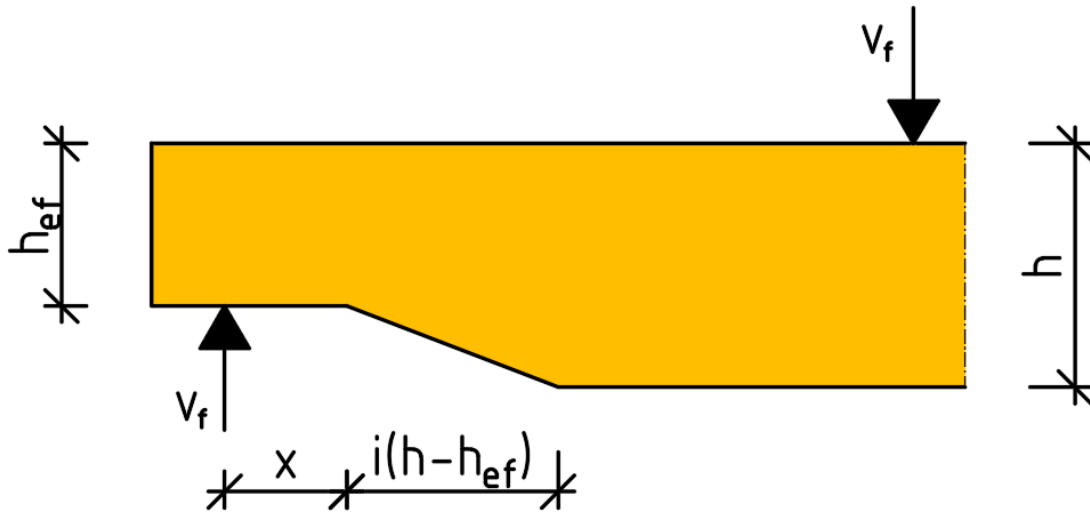
Förutom brottenergin och tvärkraften innehåller ekvationen ovan de geometriska parametrarna α och β . Dessa parametrar beskrivs närmare i efterföljande avsnitt. Ytterligare innehåller ekvation 4.1 materialparametrarna skjuvmodulen G_{xy} och elasticitetsmodulen E_x samt de geometriska storheterna balkbredd b och balkhöjd h .

4.2 Dimensionering enligt Eurokod

Standarden som reglerar dimensionering av träkonstruktioner är Eurokod 5 [11]. I denna finns det ett specifikt avsnitt om balkar med urtag vid stöd. Tillvägagångssättet vid dimensionering går ut på att kontrollera att skjuvspänningarna inte överstiger skjuvhållfastheten. Kravet som behöver uppnås visas i ekvation 4.2 nedan.

$$\tau_d = \frac{1.5V_f}{bh_{ef}} \leq k_v f_v \quad (4.2)$$

Hållfastheten är reducerad med en korrektionsfaktor k_v . Denna beräknas på två olika sätt beroende på om urtaget är på under- eller översidan av balken. När urtaget är på ovansidan sätts faktorn till 1.0, vilket innebär att ingen reduktion av hållfastheten görs. Anledningen är att det blir tryckspänningar vinkelrätt fibrerna och därmed minskas inte kapaciteten. För urtaget på undersidan kommer istället dragspänningar att uppstå, och därmed kommer kapaciteten att minska. Faktorn k_v beräknas enligt ekvation 4.3 nedan, där h är balkhöjden och x är avståndet från upplagets centrum till urtagets kant. Figur 4.1 illustrerar uppställningen där ingående parametrar är utsatta.



Figur 4.1: Balk med urtag där ingående geometriska parametrar är definierade enligt Eurokod 5.

$$k_v = \frac{k_n \left(1 + \frac{1.1 \cdot i^{1.5}}{\sqrt{h}} \right)}{\sqrt{h} \left(\sqrt{\alpha(1-\alpha)} + 0.8 \frac{x}{h} \sqrt{1/\alpha - \alpha^2} \right)} \leq 1.0 \quad (4.3)$$

Eurokod behandlar också sneda urtag genom att införa parametern i . I detta arbete behandlas endast raka urtag med vinkeln 90 grader, vilket innebär att denna faktor kan förkortas bort (eftersom $i=0$ för rätvinkliga urtag).

$$k_v = \frac{k_n}{\sqrt{h} \left(\sqrt{\alpha(1-\alpha)} + 0.8 \frac{x}{h} \sqrt{1/\alpha - \alpha^2} \right)} \leq 1.0 \quad (4.4)$$

Värdet för α är kvoten mellan den effektiva höjden och totalhöjden. Med den effektiva höjden menas totalhöjden minus urtagets höjd, se Figur 4.1.

$$\alpha = \frac{h_{ef}}{h} \quad (4.5)$$

β anger förhållandet mellan avståndet från upplaget till urtagskanten och totalhöjden, se ekvation 4.6.

$$\beta = \frac{x}{h} \quad (4.6)$$

Återstående parameter i ekvation 4.4 är k_n . Denna varierar för olika materialtyper, och Eurokod anger bestämda värden för tre olika typer.

$$k_n [\text{mm}^{1/2}] = \begin{cases} 4.5 \text{ för LVL} \\ 5 \text{ för massivt trä} \\ 6.5 \text{ för limträ} \end{cases} \quad (4.7)$$

Värdena är framtagna för att göra dimensioneringsprocessen enklare och mer lik övrig metodik.

4.3 Framtagning av k_n

Teorin för dimensionering av balkar med urtag bygger på brottmekanik och Gustafsson-metoden, som beskrivits ovan. Brottenergi samt andra parametrar har dock ersatts med korrektionsfaktorn k_n . Hur specifika värden för denna faktorn har bestämts undersöks nedan. Faktorerna är baserade på gran, och därför används motsvarande materialegenskaper vid härledningen nedan.

Gustafssons metod har varit utgångspunkten där flera parametrar har försökts förkortas bort. Ekvationen enligt 4.1 multipliceras med 1.5 på varje sida om likhetstecknet med syftet att få vänsterledet att motsvara maximal skjuvspänning för en parabelformad skjuvspänningsfördelning över den effektiva tvärsnittshöjden.

$$\tau_d = 1.5 \cdot \frac{V_f}{b\alpha h} = \frac{1.5 \cdot \sqrt{G_{IC}/h}}{\sqrt{0.6(\alpha - \alpha^2)/G_{xy} + \beta\sqrt{6(1/\alpha - \alpha^2)/E_x}}} \quad (4.8)$$

Därefter förkortas bråket i högerledet med $\sqrt{0.6}$. Detta innebär vid omskrivning att ekvationen nu ser ut enligt 4.9.

$$\tau_d = 1.5 \cdot \frac{V_f}{b\alpha h} = \frac{1.5 \cdot \sqrt{G_{IC}/(h \cdot 0.6)}}{\sqrt{(\alpha - \alpha^2)/G_{xy} + \beta\sqrt{10/E_x}\sqrt{(1/\alpha - \alpha^2)}}} \quad (4.9)$$

Ytterligare förlängs bråket med \sqrt{h} samt $\sqrt{G_{xy}}$ som är skjuvmodulen i fiberriktningen.

$$\tau_d = 1.5 \cdot \frac{V_f}{b\alpha h} = \frac{1.5 \cdot \sqrt{G_{IC}G_{xy}/0.6}}{\sqrt{h}\sqrt{(\alpha - \alpha^2) + \beta\sqrt{10G_{xy}/E_x}\sqrt{(1/\alpha - \alpha^2)}}} \quad (4.10)$$

Förhållandet mellan skjuvmodulen (G_{xy}) och elasticitetsmodulen i fiberriktningen (E_x) är enligt [12]: $G_{xy} = E_x/15.625$. Detta innebär att faktorn nedan kan skrivas om, se ekvation 4.11.

$$\sqrt{10G_{xy}/E_x} = \sqrt{10 \cdot 0.064} = 0.8 \quad (4.11)$$

Insättning i ekvation 4.10 ger nu resultat enligt nedan, där β hämtas från ekvation 4.6.

$$\tau_d = 1.5 \cdot \frac{V_f}{b\alpha h} = \frac{1.5 \cdot \sqrt{G_{IC}G_{xy}/0.6}}{\sqrt{h}\sqrt{(\alpha - \alpha^2) + 0.8\beta\sqrt{(1/\alpha - \alpha^2)}}} \quad (4.12)$$

Vid jämförelse med ekvation från Eurokod (se 4.4 ovan) är faktor k_n lika med täljaren i bråket på högersidan samt hållfastheten i skjuvning.

$$k_n = 1.5 \cdot \sqrt{\frac{G_{IC} \cdot G_{xy}}{0.6}} / f_v \quad (4.13)$$

Genom att bestämma värden för k_n har faktorer såsom elasticitetsmodul, skjuvmodul och brottenergi eliminerats ur ekvationen. Kvar finns ett samband mellan skjuvspänning och hållfasthet samt geometriska parametrar. Värdet för korrektions k_n är beroende av skjuvmodulen, hållfastheten samt brottenergin. Att anta att endast mod I ger bidrag till G_C är en förenkling på den säkra sidan [12].

Givna värden för k_n som hittas i Eurokod härleds från provningar där brottenergin för gran har undersökts [12]. Genom att undersöka brottenergin för björk är det tänkbart att andra värden för k_n erhålls. Detta kan leda till en bättre, mer effektiv och anpassad dimensionering av konstruktioner i björk. Dock är inte ekvation 4.7 helt korrekt för björk då kvoten enligt ekvation 4.11 inte är densamma som för gran.

4.4 Storlekseffekter

Den formella hållfastheten (i N/mm²) för ett konstruktionselement i trä varierar med elementets storlek (volymen), till skillnad från många andra material. I de flesta fall minskar den formella hållfastheten med ökande storlek [2]. Detta fenomen kallas för storlekseffekten. Dess påverkan har genom hållfasthetsprovningar konstaterats, och utifrån testresultat har korrektionsfaktorer definierats med avsikt att ta hänsyn till fenomenet vid dimensionering.

Storlekseffekter kan exempelvis beskrivas baserat på Weibullteori [2]. Weibullteori kallas ofta för "svagaste länken teori" vilket innebär att den svagaste delen blir den definierade för kapaciteten. Det antas att materialet är sprött samt att defekterna är slumpmässiga, både i form av storlek och fördelning. Ekvation 4.14 nedan visar förhållandet mellan hållfasthet (f) och volym (V) baserat på Weibullteori, där k är en formfaktor.

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1/k} = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{1/k_b} \cdot \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/k_h} \cdot \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{1/k_l} \quad (4.14)$$

Ekvationen ovan kan reduceras till att enbart bero på balkhöjden. Detta genom att anta att bredden inte påverkar avsevärt, då bredden vanligtvis inte varierar särskilt mycket. För att fortfarande ta hänsyn till längden används en kombinerad formfaktor för både höjd och längd. Den förenklade ekvationen visas nedan, där k_h är den kombinerade formfaktorn.

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/k_h} \quad (4.15)$$

Storlekseffekter härleds till att ju större volym, desto större är risken för att en eventuell defekt finns. Defekter utgör träets svagaste punkt och blir därmed avgörande för kapaciteten. Eftersom fenomenet snarare har med volymen av materialet att göra kallas det ibland också för volymeffekten.

Vid dragspänningar vinkelrätt mot fibrerna är volymeffekten ansenlig [2]. Därmed är storlekseffekten aktuell för fallet med balkar med urtag. Den nominella bärförmågan måste reduceras för att inte bärförmågan ska överskattas. För detta fall kan det vara mer användbart att använda linjärelastiskt brottmekanik för att beskriva storlekseffekter. Enligt LEFM är bärförmågan proportionell mot inversen av roten av storleken på balken [14]. Eftersom dimensioneringen av träbalkar med urtag enligt Eurokod bygger på linjärelastisk brottmekanik tar man hänsyn till storlekseffekten i reduktionsfaktorn k_v genom parametern $1/\sqrt{h}$.

En begränsning i linjärelastisk brottmekanik är att sprickzonen måste vara liten i förhållande till balkhöjden för att beräkningarna ska gälla [13]. Vid för små balkhöjder blir sprickzonen för stor i förhållande till balkhöjden och bärförmågan kommer då att överskattas.

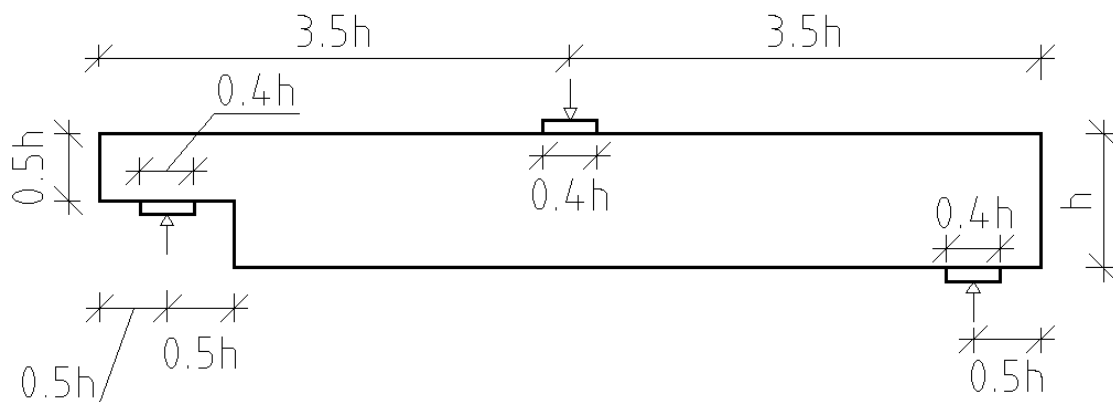
5 Metod

I detta examensarbete har försök och analyser av träbalkar med urtag vid upplag utförts. Balkarna som har testats bestod av träslagen gran och björk. Tre olika metoder användes för att undersöka balkarnas kapacitet. En praktisk provning i en provningsmaskin har varit grunden till undersökningen. Parallellt har modellering och beräkningar i finita element programvara utförts. Dessutom har beräkningar enligt gällande dimensioneringsregler, beskrivna i Eurokod 5, utförts som handberäkningar. Resultat från samtliga tre utvärderingsmetoder har jämförts och analyserats i kapitel 6.

Främst är det uppsprickningslasten, den yttre lasten som uppnås när en första spricka i materialet uppstår, som har beräknats och undersökts. Ibland benämns uppsprickningslasten förenklat även som brottlast.

5.1 Geometri

Fyra olika geometrier har undersökts, där höjden h är den primära ändringsfaktorn, se Figur 5.1. Övriga geometriska parametrar skalades efter höjden. Värdena för α och β hölls båda konstanta till 0.5. Vinkeln på urtaget för samtliga provkroppar var så nära 90 grader som möjligt. Det enda måttet som inte skalades är bredden som ansattes till 20 respektive 40 mm. Detta med anledning att 40 mm för de mindre provkropparna ansågs vara för tjockt i relation till höjden, medan 20 mm för de större provkropparna ansågs kunna ge instabilitetsproblem.



Figur 5.1: Provkropparnas geometri

De fyra höjderna som har undersökts är $h = 25, 50, 100$ respektive 200 mm. Vid beräkning och modellering har alla fyra höjderna undersökts för båda träslagen, gran och björk. Vid den praktiska provningen testades enbart björkbalkar med höjden $h = 25$ och 50 mm. Detta på grund av brist på material i erforderliga längder för de större balkhöjderna. Genom att undersöka fyra olika höjder där skillnaden är en dubbling, var tanken att fånga ett tillräckligt stort intervall för att kunna undersöka storlekseffekter.

För att undvika att spänningsfältet från pålastningen påverkar spänningsfördelningen kring urtaget, tillverkades provkropparna relativt långa. Baserat på flertalet tidigare studier, presenterade i [15], kunde en relativ längd bestämmas där spänningsfördelningen vid urtaget är opåverkad. Majoriteten av tidigare forskning har gjorts på provkroppar som har en kvot mellan höjd och längd på cirka $10 - 15$ procent. Baserat på detta användes en kvot på cirka 14 procent för provningarna i denna studie.

5.2 Materialparametrar

De två olika träslagens materialegenskaper skiljer sig åt. Vid både modellering och beräkning, men även vid bearbetning av provningsresultat, behövdes dessa egenskaper som inparametrar. Värden för dessa egenskaper undersöktes inte här utan hämtades från tidigare forsknings- och materialdata. Värden på materialdata för gran respektive björk, hämtades från [1] och summeras i Tabell 5.1 nedan. Skjuvhållfastheten f_v antogs vara $3f_t$ för både gran och björk enligt [9].

Tabell 5.1: Materialparametrar för både gran och björk, alla värden i MPa förutom v_{xy} som är enhetslös.

	E_x	E_y	v_{xy}	G_{xy}	f_t	f_v
Gran	10 991	435	0.48	682	3	9
Björk	16 300	620	0.51	910	7	21

Brottenergi är en relativ osäker parameter där väldefinierade värden inte existerar. Mellan olika oberoende försök och forskningsresultat skiljer sig värdet för G_C relativt mycket. Dessutom har dess storlek stor påverkan på övriga uppskattningar och beräkningsresultat. För att undersöka detta närmare har tre olika värden på G_C för respektive träslag använts.

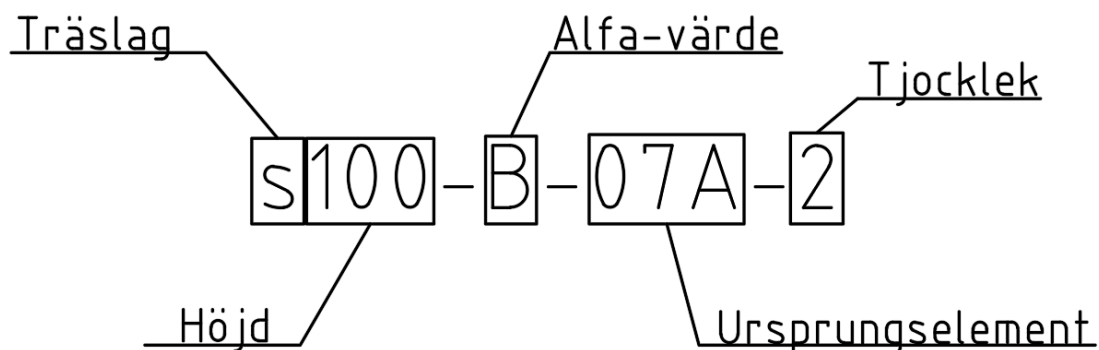
I rapporten [1] bestämdes med hjälp av provningar en brottenergi för gran till 188 J/m^2 . Denna siffra anses vara i underkant av intervallet. Intervallets övre gräns anses vara 300 J/m^2 som motsvarar värdet som används i [9]. Baserat på dessa intervallgränser har följande tre värden på G_C valts att undersökas närmare: $188, 240$ och 300 J/m^2 . För björk har tidigare forskning bland annat visat på en brottenergi på 460 J/m^2 [16], 580 J/m^2 [17] samt 700 J/m^2 [1]. Dessa tre värden har använts vid analys. G_C för mod II (G_{IIc}) antogs vara $3.5G_{IC}$ enligt [9].

5.3 Provning

I detta arbete har endast tre av fyra höjder undersökts vid praktisk provning, ($h = 25$, 100 samt 200 mm). Den fjärde höjden ($h = 50$ mm) har bara analyserats numeriskt. Anledningen är att parallellt med detta arbete har forskning och provningar gjorts av Johannes Jonasson och Markus Detter på just höjden $h = 50$ mm. Data från deras testresultat har använts som underlag i denna rapport.

Totalt har fyra provningsserier genomförts i detta arbete. Det innefattar gran med höjderna $h = 25$, 100 och 200 samt björk med höjden $h = 25$ mm. Varje provningsserie består av 6 stycken provkroppar med så identisk geometri som möjligt. Det innebär att totalt 24 provkroppar har testats.

För att skilja provkropparna åt har varje kropp tilldelats en specifik beteckning. Beteckningens uppbyggnad förklaras i Figur 5.2. Första bokstaven representerar träslaget, s för gran och b för björk. De efterföljande siffrorna motsvarar provkroppens totalhöjd (h) i mm. Den andra bokstaven betecknar α -värdet där B motsvarar 0.5. I den tredje delen av beteckningen visar siffrorna vilken träregel som provkroppen tillverkats utifrån. Ifall det finns flera provkroppar från samma träregel läggs det till en bokstav för att göra varje provkroppsbeteckning unik. Slutligen visar den sista siffran i beteckningen vilken tjocklek som använts. 1 motsvarar tjockleken 20 mm och 2 motsvarar 40 mm.



Figur 5.2: Förklaring av uppbyggnad för provkropparnas beteckning.

5.3.1 Provningsserier

Resultat från provningsserier för gran och björk med höjden $h = 50$ mm hämtas från provningar utförda av Jonasson och Detter. För dessa provningsserier används samma beteckningsuppbyggnad som beskrivits ovan. I Tabell 5.2 nedan summeras provningsserier utförda i detta arbete och i Tabell 5.3 summeras provningsserier från Jonasson och Detter.

Tabell 5.2: Data för provningsserier genomförda inom detta examensarbete.

Beteckning	Höjd	α	Element	Bredd	Sprickriktning
s25-B-02A-1	25	0.5	02A	20	TL/RL
s25-B-04A1-1	25	0.5	04A1	20	RL
s25-B-04A2-1	25	0.5	04A2	20	RL
s25-B-05A-1	25	0.5	05A	20	RL
s25-B-06B-1	25	0.5	06B	20	TL
s25-B-07A-1	25	0.5	07A	20	TL
b25-B-1D05-1	25	0.5	1D05	20	RL
b25-B-1D07A-1	25	0.5	1D07A	20	RL
b25-B-1D07B-1	25	0.5	1D07B	20	RL
b25-B-1D07C-1	25	0.5	1D07C	20	RL
b25-B-1D13A-1	25	0.5	1D13A	20	TL/RL
b25-B-1D13B-1	25	0.5	1D13B	20	RL/TL
s100-B-02A-2	100	0.5	02A	40	TL/RL
s100-B-04A-2	100	0.5	04A	40	RL
s100-B-04B-2	100	0.5	04B	40	RL
s100-B-05A-2	100	0.5	05A	40	RL/TL
s100-B-06B-2	100	0.5	06B	40	TL
s100-B-07A-2	100	0.5	07A	40	TL/RL
s200-B-01A-2	200	0.5	01A	40	TL
s200-B-01B-2	200	0.5	01B	40	TL
s200-B-03A-2	200	0.5	03A	40	TL/RL
s200-B-03B-2	200	0.5	03B	40	TL/RL
s200-B-06A-2	200	0.5	06A	40	TL
s200-B-07B-2	200	0.5	07B	40	TL

Tabell 5.3: Data för provningsserier genomförda av Johannes Jonasson och Markus Detter.

Beteckning	Höjd	α	Element	Bredd	Sprickriktning
s50-B-02A1-1	50	0.5	02A1	20	RL/TL
s50-B-04A1-1	50	0.5	04A1	20	RL/TL
s50-B-05A1-1	50	0.5	05A1	20	RL/TL
s50-B-05A2-1	50	0.5	05A2	20	TL/RL
s50-B-06B1-1	50	0.5	06B1	20	TL/RL
s50-B-07A1-1	50	0.5	07A1	20	TL/RL
b50-B-1D14A-1	50	0.5	1D14A	20	RL/TL
b50-B-3C02A-1	50	0.5	3C02A	20	TL
b50-B-3C03A-1	50	0.5	3C03A	20	TL/RL
b50-B-3C05A-1	50	0.5	3C05A	20	TL/RL
b50-B-3C06A-1	50	0.5	3C06A	20	TL/RL
b50-B-3C09A-1	50	0.5	3C09A	20	TL/RL

För att kunna bestämma årsringsorienteringen har alla provkropparnas ändträ scannats in. De inscannade bilderna finns bifogat i Bilaga D. Baserat på bilderna har sprickriktning för respektive provkropp bestämts och redovisas i Tabellerna 5.2 och 5.3, med beteckningar enligt Figur 3.2.

5.3.2 Tillverkning av provkroppar

Samtliga provkroppar har bearbetats ner från större träreglar till önskvärd storlek. Önskvärd tjocklek och höjd har uppnåtts genom planhyvling. Testobjekten har kapats till rätt längd med kap- och gersåg och urtagen har gjorts med hjälp av bandsåg. Samtliga kap och sågningar har utförts med så stor noggrannhet som möjligt. Urtagens placering har okulärt bestämts till områden där så få kvistar som möjligt funnits.

Provkropparna har förvarats i klimatrum för att erhålla jämna fukt- och temperaturförhållande. I klimatrummet har temperaturen varit konstant 20 grader med en relativ fuktighet på 60 procent. Genom att hålla en konstant fuktighet på 60 procent motverkas det att torrsprickor i träet uppstår. Torrsprickor kan annars påverka provningsresultatet. Provkropparna har förvarats i klimatrummet en lång tid innan provningarna påbörjades med anledning att provkropparna ska vara i jämvikt med klimatförhållandena i klimatrummet.

Efter tillverkning har flera mer noggranna mått uppmätts. Detta innefattar totalhöjd, effektiv höjd, urtagets höjd samt bredden. Syftet är att mer exakt kunna bestämma spänningarna samt att bestämma densiteten. Ytterligare har mer noggranna mått av den bortsågade delen vid urtaget uppmätts. Precis innan provning har provkropparna samt de mindre bortsågade bitarna vägts, och därifrån har densiteten kunnat bestämmas. Vid ett senare tillfälle har de bortsågade bitarna torkats i ugn, vilket medför att en torrdensitet kunnat bestämmas. Utifrån densitet och torrdensitet kunde en fuktkvot (u) vid tillfället för provning beräknas. Denna fuktkvot antas vara representativ för hela provkroppen.

$$u = \frac{\text{densitet} - \text{torrdensitet}}{\text{torrdensitet}} \quad (5.1)$$

5.3.3 Provuppställning

Vid experimentella försök är det viktigt att provuppställningen är så identisk som möjligt för varje provning. Problematiken med denna typ av undersökning är att eftersom provkropparnas storlek skiljer sig mycket, behövde fyra olika provuppställningar användas.

En gemensam nämnare för alla provningar är att samma programvara och förskjutningsavläsare har använts. Det som skiljer sig är upplags- och lastplattor samt lastcell. Upplagens storlek har skalats efter provkroppens storlek. Balkarnas placering i förhållande till upplagsplattor och lastinföringspunkt justerades för att uppnå så centrisk belastning som möjligt. Dessutom har balken kontrollerats så att den är både våg- och lodrät. En lastcell på 10 kN har använts för alla försök förutom för höjden $h = 200$ mm. Där användes en lastcell på 500 kN. För höjden $h = 200$ mm behövdes också en större upplagsbalk användas. På grund av tekniska problem tvingades två olika MTS-maskiner användas. I Figur 5.3 visas provuppställning för en provkropp med höjden $h = 100$ mm. Övriga två provuppställningar kan ses i Bilaga B.



Figur 5.3: Bild på provuppställning för en granbalk med höjden $h = 100$ mm.

För att bestämma tidpunkt för uppsprickning användes linjära förskjutningsavläsare (LVDT). Dessa givare placerades i stativ och trycktes mot aluminiumvinklar som limmats i över- respektive underkant på urtaget (se Figur 5.4). Genom att analysera skillnaden i förskjutning mellan de två givarna kunde uppsprickningens storlek samt tidpunkt bestämmas. Dessa resultat kan sedan jämföras med last-förskjutningskurvan för att tydligt avgöra när uppsprickningslasten uppstår.



Figur 5.4: Bild på uppställningen av LVDT-mätare för en granbalk med höjden $h = 100$ mm.

Resultat från provningarna har extraherats från programvaran och därefter behandlats och bearbetats. Både Matlab och Microsoft Excel har använts för illustrering och beräkning av resultaten.

5.4 Modellering

All modellering i detta projekt har utförts med hjälp av finita elementprogramvaran Abaqus. Första modelleringssteget i Abaqus innefattade att konstruera sökt geometri. Därefter definierades laster och upplagsvillkor. Efter formatering av elementnät gjordes finita elementberäkningar på kroppen. Från beräkningsresultaten utlästes sökta värden såsom spänningar och förskjutningar. Vid beräkningarna har element med kvadratisk interpolation av förskjutningar och reducerad integration använts (CPS8R).

Två olika tillämpningsmetoder för linjärelastiskt brottmekanik har använts: medelspänningsmetoden och initiala sprick-metoden. Teorin bakom båda metoderna är beskriven i avsnitt 3 ovan, medan tillvägagångssättet vid modellering och analys för respektive metod utvecklas nedan. Gemensamt för båda metoderna är att en enhetslast används vid modellering.

Förutom att två olika metoder har använts, har också flera olika modelltyper undersökts med syftet att utvärdera vilken modelltyp som lämpar sig bäst för denna undersökning. Bedömningen baseras på om modelltypen ger goda och tillförlitliga resultat samtidigt som beräkningstiden är så kort som möjligt, vilket ökar effektiviteten. Modellerna som har undersökts har främst skillnader i upplagsvillkor samt utformning (t.ex. symmetri).

För att kunna jämföra resultaten har geometrin för modellerna konstruerats enligt Figur 5.1 för att motsvara de faktiska provkropparna. För höjden $h = 25$ och 50 mm har bredden $b = 20$ mm använts medan för höjden $h = 100$ och 200 mm har bredden $b = 40$ mm modellerats. Inparametrar för beräkningarna är hämtade ur Tabell 5.1. Ytterligare har olika värden på G_C använts för att undersöka dess påverkan på resultatet.

5.4.1 Medelspänningsmetoden

Första steget vid medelspänningsmetoden är att bestämma medelspänningslängden x_0 . Detta gjordes som en iterativ process genom att först uppskatta ett utgångsvärde för kvoten ($k = \bar{\tau}/\bar{\sigma}$) mellan normal- och skjuvspänningen, baserat på tidigare data från [9]. Det uppskattade värdet tillsammans med andra antagna materialparametrar gav en uppskattning av x_0 ur ekvation 3.12. Därefter kunde medelspänningar över denna längd bestämmas. Medelspänningarna kan bestämmas på olika sätt. Här användes värdena för normal- respektive skjuvspänningarna i noderna längs linjen x_0 , erhållna ur Abaqus. Abaqus beräknar värden för spänningar i noder genom att medelvärdesbilda spänningar som interpolerats fram från de till noden angränsande elementen. Från dessa värden beräknades medelvärden för normal- respektive skjuvspänning. Medelvärdena avser medelspänningar ($\bar{\sigma}$) och ($\bar{\tau}$) över medelspänningslängden x_0 . Ekvation 3.13 gav sedan en ny, framräknad, kvot k mellan spänningarna och sedan togs ett nytt x_0 fram. Processen upprepades tills att x_0 konvergerade. Maximalt tre iterationer krävdes för att bestämma x_0 .

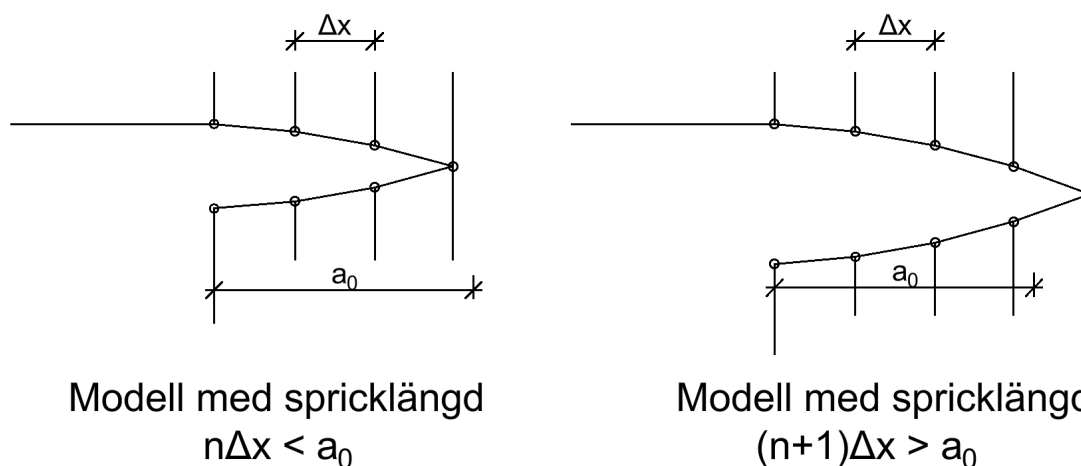
Med det bestämda x_0 togs motsvarande medelspänningar fram. Dessa sattes in i Norris spänningskriterium (ekvation 3.7). Eftersom spänningarna motsvarade enhetslastens påverkan kan man, tillsammans med att kriteriet skulle vara uppfyllt, ta fram en förstoringfaktor. Denna förstoringfaktor motsvarar då uppsprickningslasten.

5.4.2 Initiala sprick-metoden

Precis som för medelspänningsmetoden är första steget för initiala sprick-metoden att bestämma förhållandet mellan spänningarna $k = \bar{\tau}/\bar{\sigma}$. Av praktiska skäl valdes det att använda samma metod som för medelspänningsmetoden, genom att iterera och använda sig av en medelspänningslängd x_0 . Utifrån x_0 kunde kvoten k mellan spänningarna beräknas och sedan kunde ett värde för brottnenergin G bestämmas enligt ekvation 3.18. Spricklängden a_0 bestämdes enligt ekvation 5.2 baserat på erhållet x_0 .

$$a_0 = x_0/2 \quad (5.2)$$

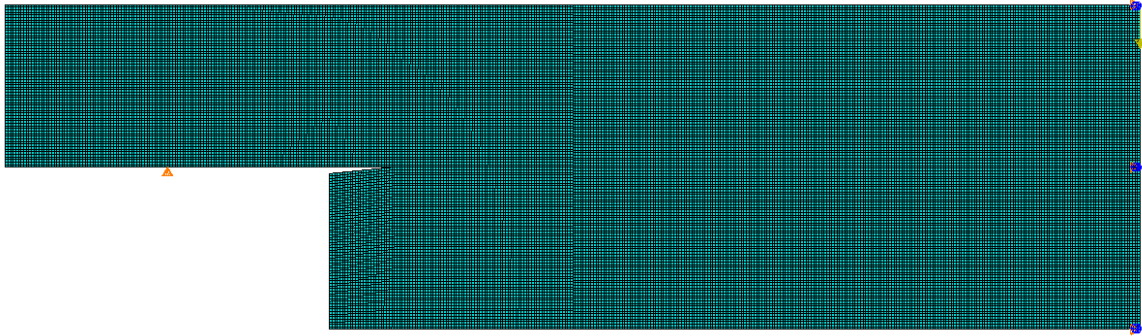
Nästa steg vara att konstruera två modeller med spricklängden a_0 som utgångspunkt. En modell med en spricklängd motsvarande en elementlängd mindre än a_0 samt en modell med en spricklängd på en elementlängd mer. I Figur 5.5 nedan illustreras principen för de två respektive spricklängderna.



Figur 5.5: Tillvägagångssätt för modellering med initiala sprick-metoden, illustrerad för $n=3$.

I programvaran modellerades sprickan som en glipa genom att släppa upp lämpligt antal noder för att motsvara eftertraktad spricklängd. För att erhålla goda resultat anpassades elementstorleken efter spricklängden. Enligt [9] bör kravet enligt ekvation 5.3 uppfyllas. Kravet uppfylldes för samtliga beräkningar. Exempel på modell med tillhörande elementnät illustreras i Figur 5.6 nedan där $h = 100$ mm och spricklängden är 10 mm.

$$\Delta x < 0.5a_0 \quad (5.3)$$

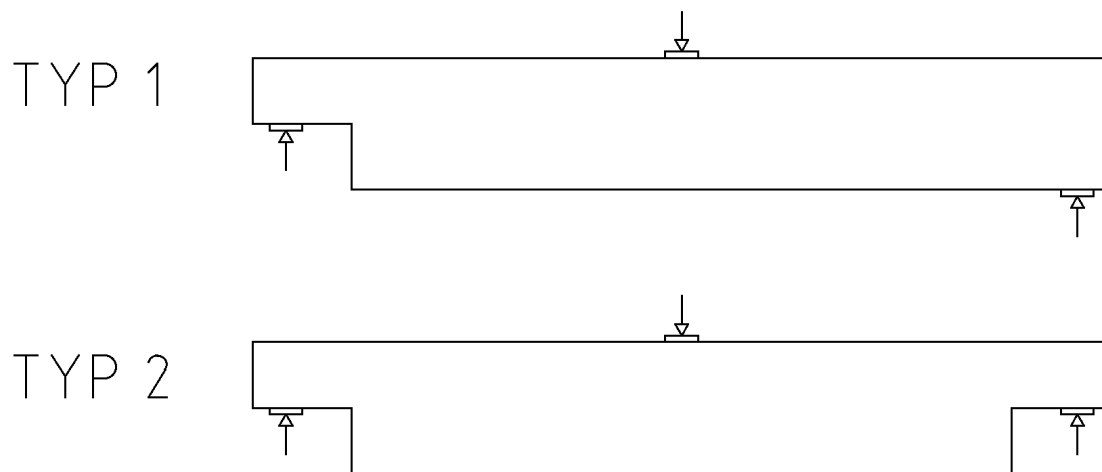


Figur 5.6: Exempel på beräkningsmodell från Abaqus för $h = 100$ mm med initiala sprick-metoden (spricklängd = 10 mm).

Lasten placerades som en koncentrerad punktlast enligt modelltyp 4 (se Figur 5.8). Förskjutningen i lastens angreppspunkt utlästes ur Abaqus. Differensen mellan förskjutningarna i lastangreppspunkten från de två modellerna (med olika spricklängd) användes därefter för att beräkna eftergivligheten (kompliansen) C , eftersom en enhetslast användes för båda beräkningarna. Uppsprickningslasten kunde sedan beräknas ur ekvation 3.17 där ändringen av kompliansen ($\partial C/\partial a$) bestämdes som $\Delta C/\Delta a$, där Δa är skillnaden i spricklängd mellan de två beräkningarna.

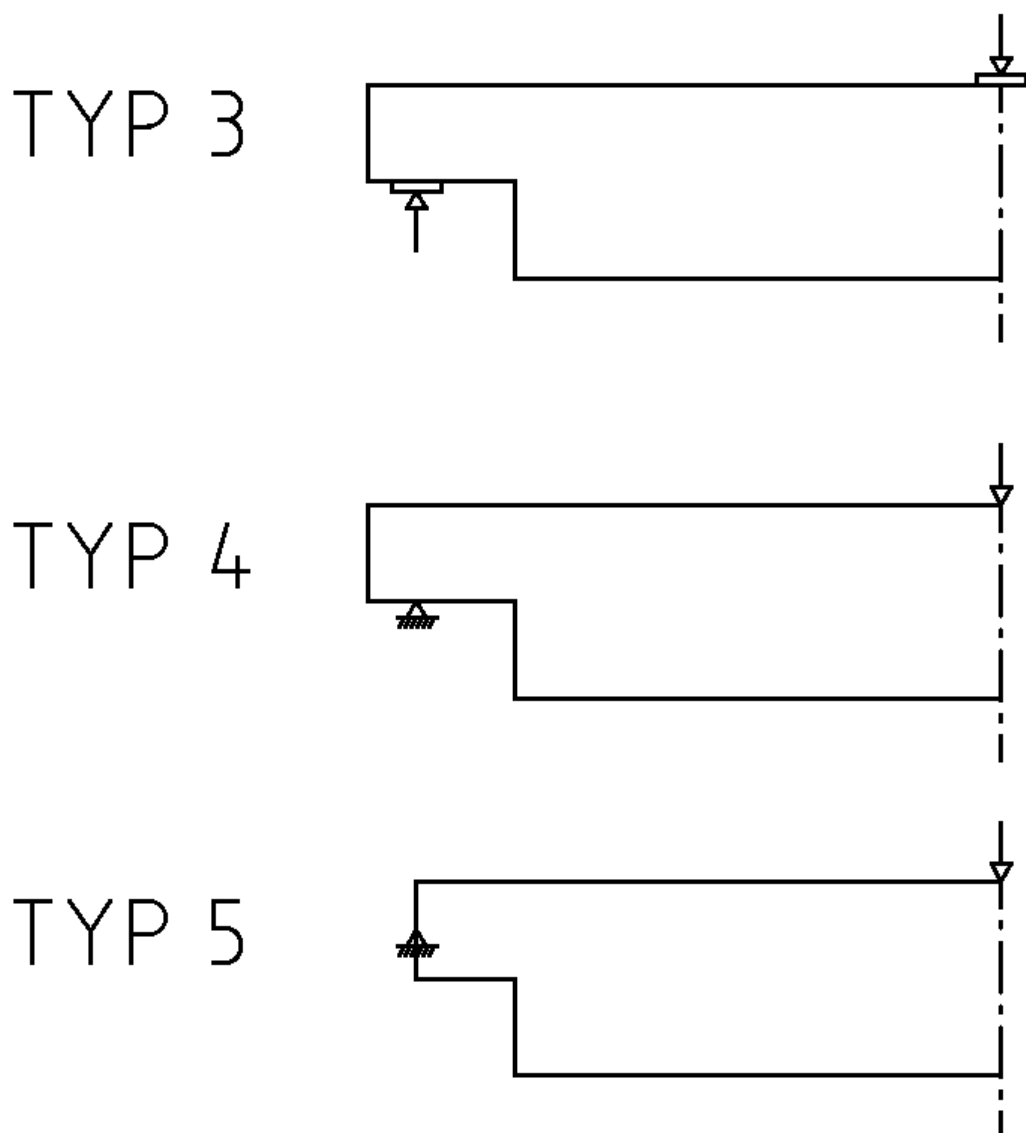
5.4.3 Jämförelse av modelltyper

Fem olika modelltyper har undersökts och jämförts. De två första alternativen är ganska lika varandra och illustreras i Figur 5.7. För båda typerna modelleras provkroppens fullständiga geometri utan symmetriplan. Det som skiljer varianterna åt är att den ena modelleras med urtag på båda sidor medan den andra bara har urtag på ena sidan. Fallet med enbart urtag på ena sidan är den modelltyp som är mest lik den faktiska provuppställningen. Båda alternativen nedan har samma upplagsvillkor med styva plattor. Dessa plattor har egenskaper likt stål och placeras som upplag vid urtaget samt ovanpå balken där lasten appliceras. Plattorna har kontakt med balken med *tie – constraints* och plattan vid urtaget antas vara ledat infäst i en nod, i centrum på undersidan. Ledad innebär fri rotation samt fri förskjutning i horisontalled, medan förskjutning i vertikalled är förhindrad. Lasten som appliceras på ovasidan ansattes till värdet 1.0, en s.k. enhetslast. Det högra upplaget modellerades också med platta och antas vara ett fixt upplag vilket innebär att både horisontal- och vertikalförskjutningar förhindras men upplaget är fritt att rotera.



Figur 5.7: Illustration av modelltyp 1 och 2.

Övriga tre modelleringsvarianter har alla symmetriplan, se Figur 5.8. Detta är därmed en förenkling av provuppställningens utseende då symmetri antas. Förenklingen innebär praktiskt att modelleringen blir enklare då symmetrivillkor kan antas längs symmetrilinjen, centrumlinjen, där lasten placeras. Ytterligare blir storleken på modellen mindre, vilket innebär att ett finare elementnät kan användas. Därmed minskas beräkningstiden.



Figur 5.8: Illustration av modelltyp 3, 4 och 5.

Det som skiljer de tre olika modellerna i Figur 5.8 åt är upplagsförhållandena. Alla tre typerna har en enhetslast placerad i symmetriplanet. Skillnaden är att typ 3 har (precis som typ 1 och 2) styva plattor vid upplaget samt vid lastens angreppspunkt, medan typ 4 inte har det. För typ 4 appliceras last och upplag därmed direkt på kroppen. För typ 5 modellerades lasten på samma sätt som för typ 4, i en nod, men där det vänstra upplaget har förflyttats till centrum på den effektiva höjden och placerats i en punkt. Dessutom gjordes ytan stel (med *coupling constraint*) för att uppfylla antagandet att plana ytor förblir plana. För att ge symmetriplanet egenskaper som får balken att efterlikna verkligheten, förhindras förskjutning i x -led samt rotationer längs hela symmetrilinjen.

I Tabell 5.4 summeras modelleringsresultat från beräkningar för respektive modelltyp. Det som har undersökts är en balk med geometri enligt Figur 5.1 med höjden $h = 100$ mm och bredden $b = 22$ mm. Materialparametrar enligt Tabell 5.1 användes tillsammans med brottenergin 188 J/m^2 .

Tabell 5.4: Jämförelse av uppsprickningslast för olika modelltyper, värden i N.

	Typ 1	Typ 2	Typ 3	Typ 4	Typ 5
Medelspänningsmetoden	3045	3045	3044	3046	3080
Initiala sprick-metoden	2691	2690	2691	2692	2725

Resultaten visar att modelltyperna 1-4 ger nästintill identiska värden för uppsprickningslasten för de respektive metoderna. Detta gäller både för medelspänningsmetoden och initiala sprick-metoden. För modelltyp 5 kan en liten avvikelse urskiljas för medelspännings och initiala sprick-metoden jämfört med övriga modeller. Vid handberäkning med Gustafssons metod erhålls värdet 3150 N för alla modelltyperna. Detta värde ligger relativt nära alla modelltyperna, men närmast typ 5.

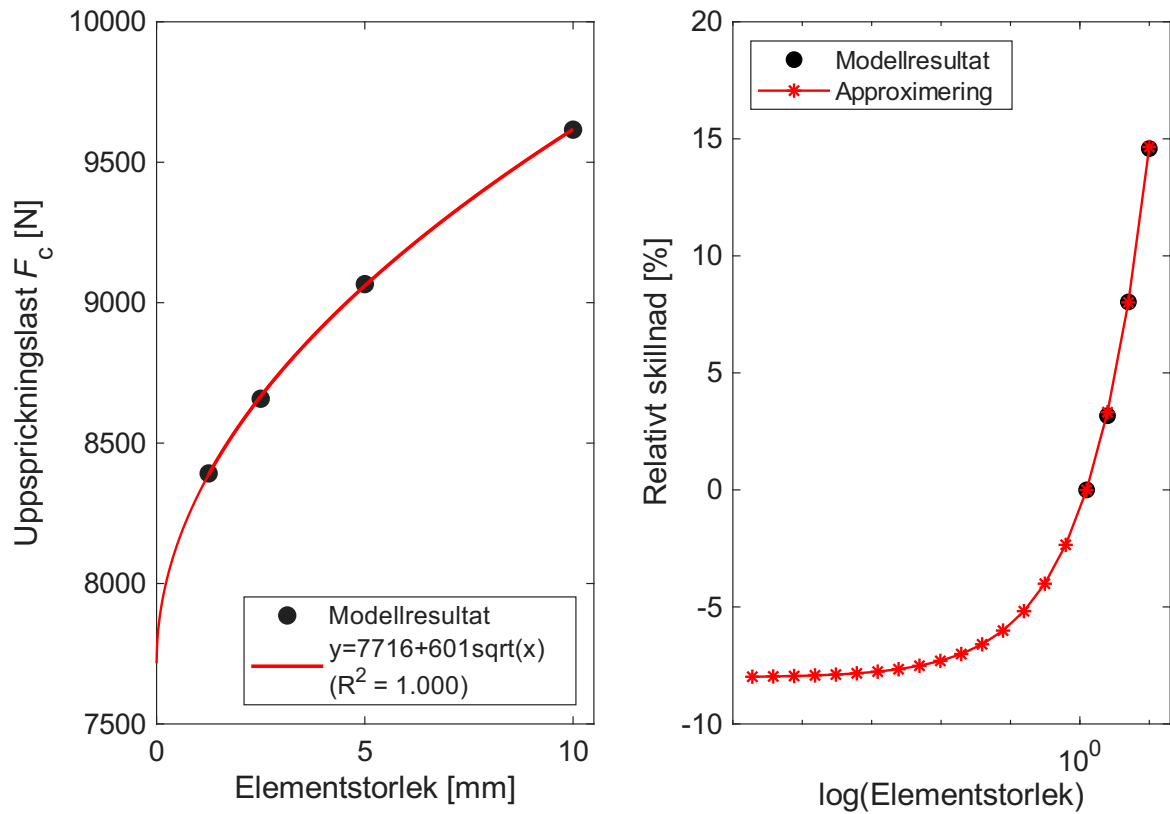
Baserat på resultaten ovan kommer följande undersökningar i detta arbete använda modelltyp 4, trots att modelltyp 1 är mest lik den verkliga uppställningen. Anledningen till varför typ 4 anses vara mest lämplig är att den är enklast att modellera. På grund av symmetrin behöver enbart halva geometrin konstrueras och därmed kan en mindre elementstorlek användas. Den mindre elementstorleken ger mer noggranna och därmed bättre resultat. Modelleringen förenklas ytterligare tack vare att inga upplagsplattor behöver modelleras.

5.4.4 Konvergenstudie av elementstorlek

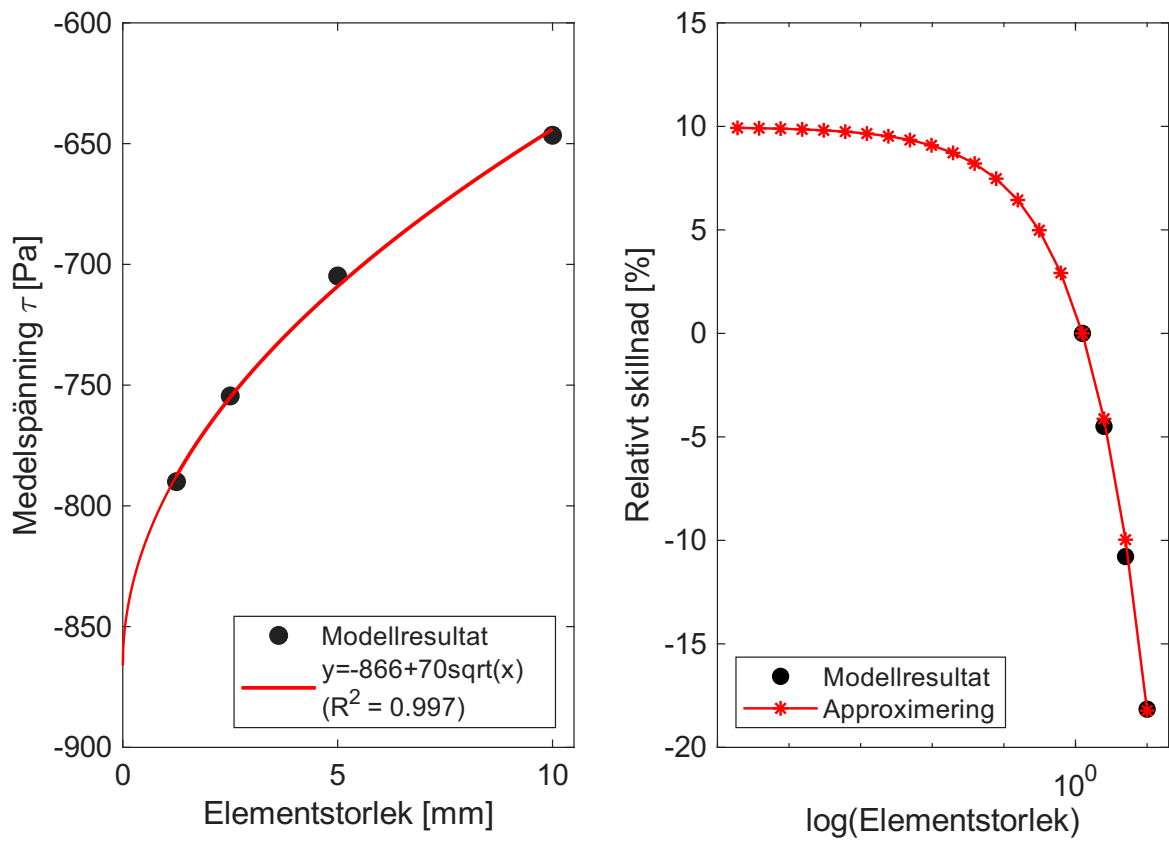
För att kontrollera att resultatet som fås från modellerna är tillförlitligt görs en konvergenstudie av elementstorleken på den största provkroppen eftersom de absoluta elementstorlekarna är störst i den modellen. De elementstorlekar som testas är 1.25, 2.5, 5.0 och 10.0 mm. Medelskjuvspänning, medelnormalspänning och uppsprickningslast enligt medelspänningsmetoden beräknas för varje elementstorlek och därefter görs en kurvanpassning med en minsta kvadratmetod för ickelinjära funktioner till dess punkter med uttrycket $y = a + b\sqrt{h}$, där a och b är konstanter och h är elementstorleken. Både modellresultat för de givna elementstorlekarna och kurvanpassningen plottas nedan i Figur 5.9 - 5.11. Figurerna visar att resultaten konvergerar långsamt vilket innebär att ett mycket fint elementnät hade krävts för att erhålla små skillnader (under 1-2 procent) i förhållande till det approximativt uppskattade värdet för en elementstorlek som närmar sig noll. För att få ett relativt fel på mindre än 1 procent hade en elementstorlek på 0.009765625 mm krävts. På grund av begränsningar av modellstorleken för den aktuella licensen i Abaqus är den minsta elementstorleken som kan användas 1.25 mm , vilket ger en modell med 76 800 element och 232 331 noder. De röda stjärnorna i diagrammen representerar en halvering i elementstorlek.

Beräkningen i de högra delfigurerna beräknas enligt ekvation 5.4 där index i representerar olika elementstorlekar och index n representerar den minsta elementstorleken som har modellerats.

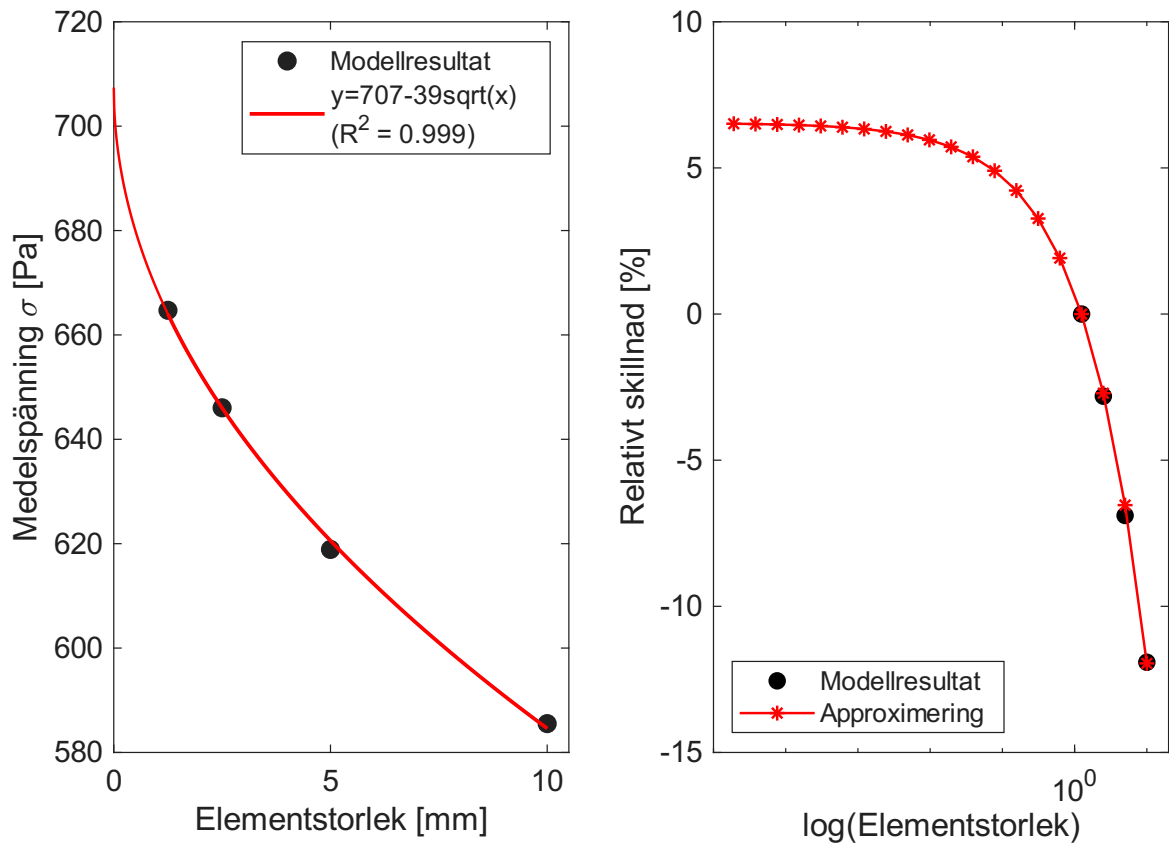
$$\text{Relativt skillnad} = (y_i - y_n)/y_n \quad (5.4)$$



Figur 5.9: Konvergenstudie för uppsprickningslast enligt medelspänningsmetoden.

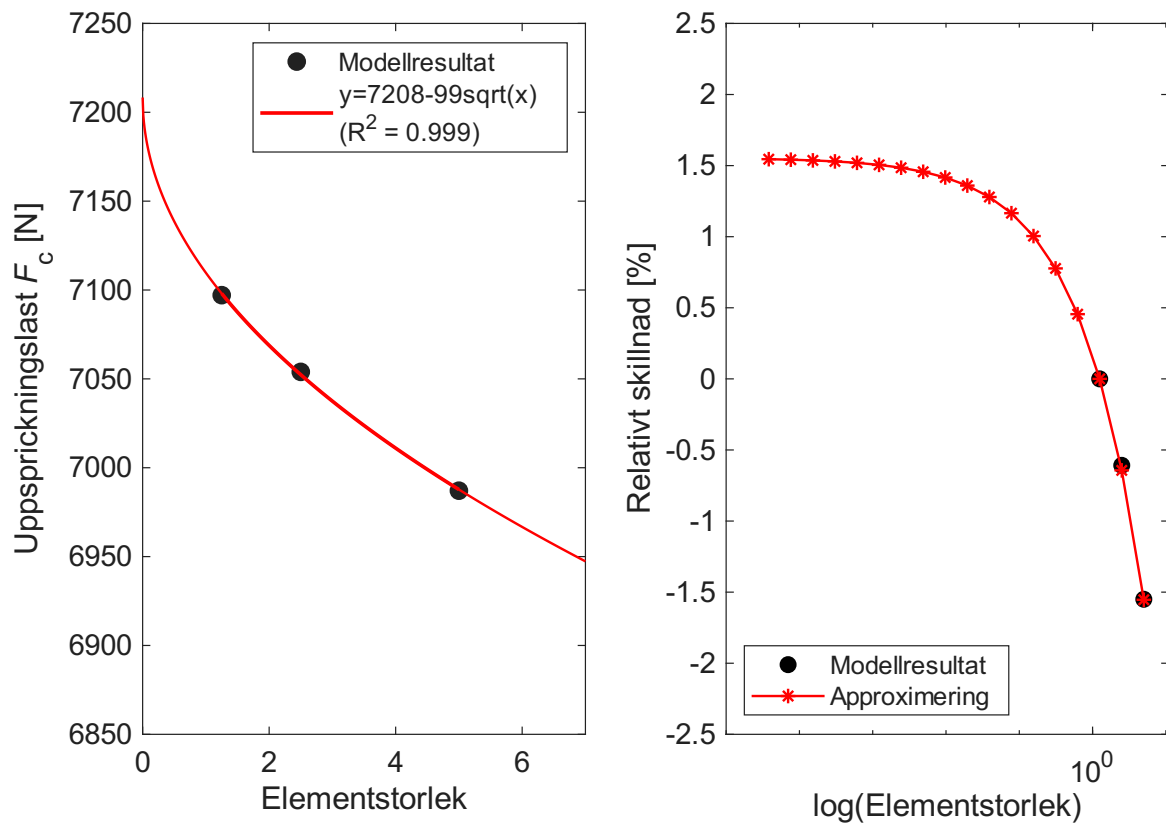


Figur 5.10: Konvergenstudie för medelskjuvspänning.



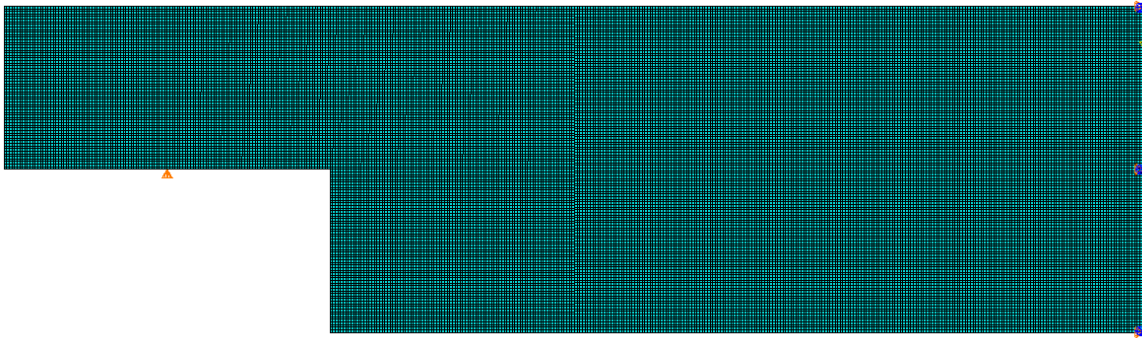
Figur 5.11: Konvergenstudie för medelnormalspänning.

Utöver konvergenstudien ovan gjordes också en konvergenstudie för uppsprickningslasten enligt initiala sprick-metoden. I denna studie gjordes beräkningar för tre elementstorlekar, 1.25, 2.5 och 5.0 mm, och därefter gjordes en kurvanpassning på samma sätt som ovan och detta visas i Figur 5.12 nedan. Figuren visar att uppsprickning slasten enligt initiala sprick-metoden inte är lika känslig för elementstorleken och ger redan vid de modellerade elementstorlekarna en spricklast inom några procent från den approximerade uppsprickningslasten då elementstorleken närmar sig noll. Vid jämförelse mellan den approximerade och den beräknade uppsprickningslasten för 1.25 mm elementstorlek ger modellen 1.5 procent för låg spricklast för initiala sprick-metoden medan modellen ger 8.0 procent för hög spricklast för medelspänningsmetoden.



Figur 5.12: Konvergenstudie för uppsprickningslast enligt initiala sprick-metoden.

I Figur 5.13 visas exempel på modell som använts vid analys ($h = 100$ mm). Storleken på elementen i modellen är skalade efter höjden. Samma elementstorlek används över hela modellen. Främsta anledningen är att modelleringssättet blir mer rationellt och tydligt. Minsta storleken på element som är möjlig att använda med studentlicens är 1.25 mm för $h = 200$ mm, och då blir elementstorlekarna 0.15625, 0.3125, 0.625 och 1.25 mm för respektive höjd $h = 25, 50, 100$ och 200 mm. Elementstorleken är viktigast kring urtaget, där sprickbildningen antas uppstå. Detta med anledning av att det är här spänningskoncentrationen finns och här beräkningsresultat extraheras. Speciellt stor påverkan har det på medelspänningsmetoden.



Figur 5.13: Exempel på beräkningsmodell från Abaqus för $h = 100$ mm med medelspänningsmetoden.

5.5 Handberäkningsmetoder

Två olika handberäkningsmetoder har använts och jämförts. Både gällande dimensioneringsregler enligt Eurokod 5 (ekvation 4.2) samt Gustafssons grundekvation (ekvation 4.1) har applicerats.

5.5.1 Beräkning enligt Eurokod

Vid beräkning enligt Eurokod har ekvationer från avsnitt 4 ovan använts. Vid vanlig dimensionering i praktiken hämtas hållfasthetsvärden från tabeller med reducerade värden. Reduceringarna beror på säkerhetsfaktorer och marginaler och baseras ofta på 5-procentfraktiler medan värden enligt Tabell 5.1 motsvarar antagna medelvärden. Eftersom korrektionsfaktorn k_n är härledd ur dessa reducerade värden behöver beräkning därför göras i enlighet med samma materialvärden. I Tabell 5.5 summeras använda hållfasthetsvärden för gran baserade på konstruktionsvirke med kvalitet C24 ([18]). Observera att värdena fortfarande är karakteristiska och ska vid praktisk dimensionering reduceras ytterligare.

För björk hämtas materialparametrar också från [18]. Här finns dock bara samlade värden för lövträslag. Virkeskvaliteten är inte på förhand känd, men björkbitarna som är använda vid provningarna kommer från samma regler som tidigare testats i böjning, se [19]. Där har böjhållfastheten provats och medelvärdet för 5-procentfraktilen bestämts till 38.9 MPa. Närmsta klass enligt Eurokod [18] är D40. Därmed används vid följande beräkningar materialparametrar som motsvarar klass D40. Värdena för dessa parametrar summeras också i Tabell 5.5.

Tabell 5.5: Materialparametrar för både gran och björk enligt Eurokod, alla värden i MPa.

	E_x	E_y	G_{xy}	f_t	f_v
Gran (C24)	11 000	370	690	0.4	4.0
Björk (D40)	13 000	870	810	0.6	4.2

Materialparametern k_n , som har beskrivits i avsnitt 4.3 ovan har använts på två olika sätt. Först genom att använda dimensioneringsreglerna enligt Eurokod tillsammans med de bestämda värdena enligt ekvation 4.7 för att beräkna uppskattade uppsprickningslaster. Senare användes ekvation 4.13 för att ta fram nya mer anpassade värden för parametern k_n . Detta gjordes både för gran och björk.

5.5.2 Beräkning enligt Gustafsson-metoden

Förutom handberäkning enligt Eurokod har beräkning enligt Gustafssons grundekvation 4.1 också gjorts. Detta med syftet att ytterligare ha en metod att jämföra med. Eftersom Eurokods dimensioneringsregler är baserade på denna metod bör hypotetiskt resultaten överensstämma. Dessutom kan skillnader i resultat metoderna emellan, medföra att bättre förståelse för parametern k_n erhålls.

6 Resultat

6.1 Provningar

6.1.1 Sprickbildning

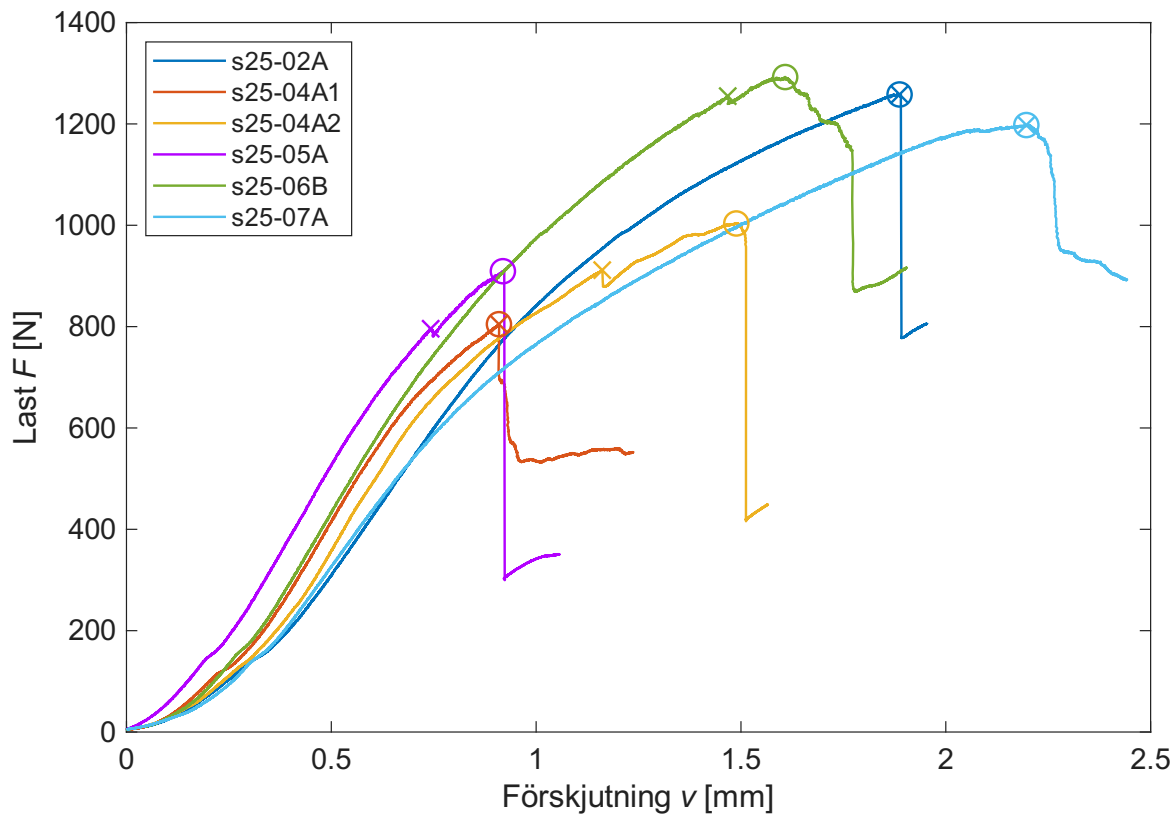
Från provningarna erhålls värden som motsvarar förskjutning av LVDT-mätarna, vilka mäter storleken på öppningen enligt mod I. Genom att beräkna skillnaden och rita upp denna i ett diagram kan det på ett enkelt sätt illustreras när uppsprickning samt sprickpropageringen sker. När kurvan visar en stor och plötslig ökning av förskjutningen antyder detta att en spricka har initierats eller att en befintlig spricka har propagerat. Därefter ökar förskjutningsskillnaden men inte lika abrupt som tidigare. Alla figurer med LVDT-förskjutningar visas i Bilaga C.

6.1.2 Uppsprickningslast

Från provningen erhålls även värden för lasten från lastcellen samt förskjutning i höjddled från givare på MTS-maskinen. Genom att rita lasten som funktion av förskjutningen erhålls diagram för respektive höjd enligt Figur 6.1–6.6. Värdet som lasten har precis innan den abrupt sjunker motsvarar uppsprickningslasten. Genom att då jämföra last-förskjutningsdiagrammet med förskjutningsskillnaden från LVDT:erna kan avvikelser i diagrammen jämföras och därmed kan uppsprickningslasterna identifieras tydligare. Uppsprickningslasten är lastnivån mitt på balken då första sprickan initieras vid urtagets hörn och denna betecknas F_c . Maximal last som uppnås under provningen, maxlasten F_{\max} , överensstämmer inte alltid med uppsprickningslasten.

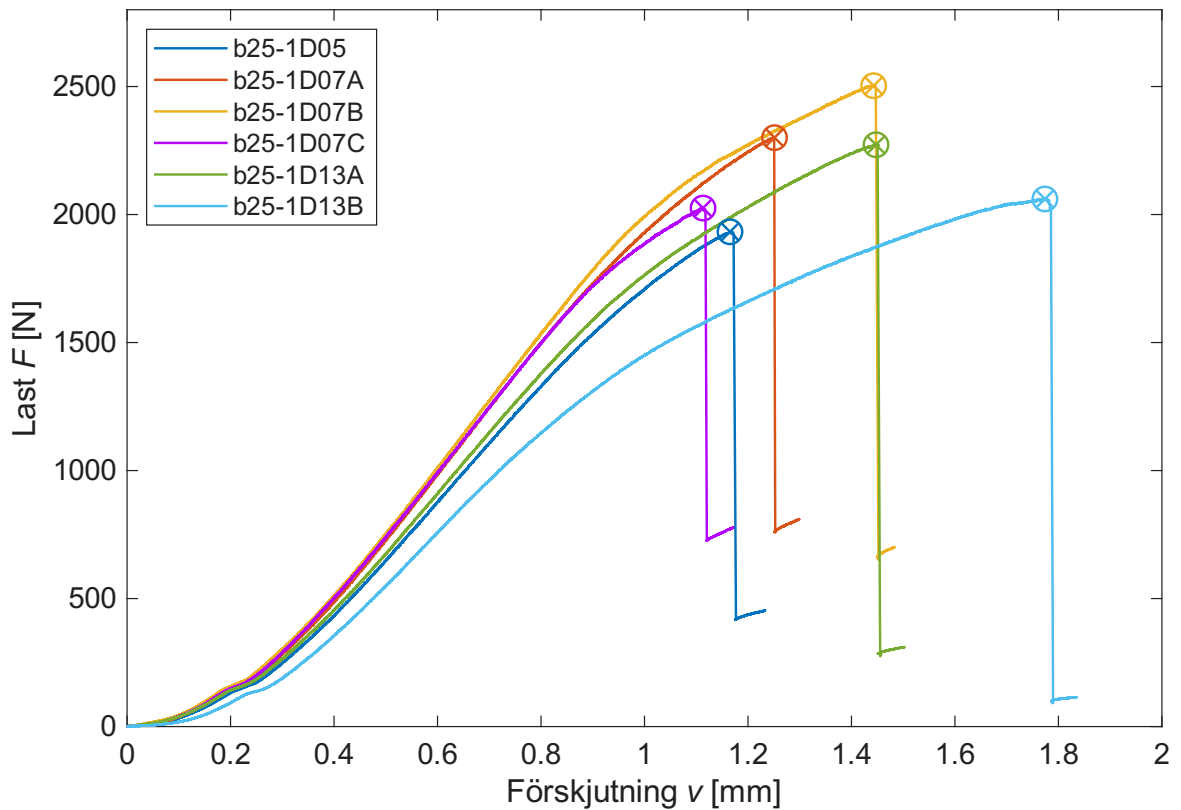
I Bilaga C visas respektive provseries last-förskjutningsdiagram i relation till LVDT-mätning. Genom analys av dessa kurvor har uppsprickningslaster bestämts och sammanställts för respektive provkropp i Tabell 6.1 och 6.2. LVDT-data saknas för höjden $h = 50$ mm, på grund av att Jonasson och Detter inte har gjort dessa mätningar vid sina provningar.

I Figur 6.1–6.6 markeras bedömd uppsprickningslast F_c med kryss (x) samt uppmätt maxlast F_{\max} med en cirkel (O). För majoriteten av provkropparna motsvarar uppsprickningslasten också den maximala lasten. Under respektive figur nedan kommenteras eventuella avvikelser samt om maxlasten och uppsprickningslasten inte sammanfaller. Ytterligare beskrivs några observationer från provningstillfället.



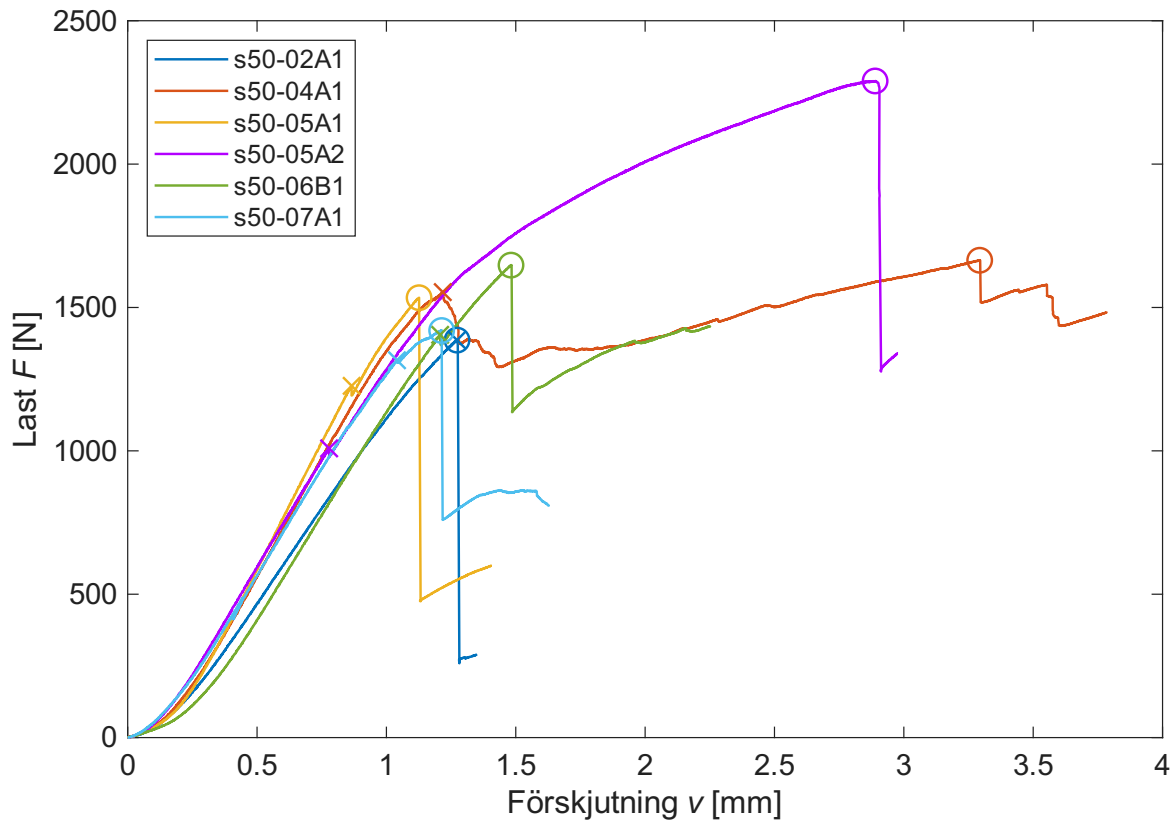
Figur 6.1: Last-förskjutningsdiagram från provningsserierna i gran med balkhöjden $h = 25$ mm. "x" markerar uppsprickningslasten och "o" markerar maxlasten.

För hälften av provkropparna i gran med höjden $h = 25$ mm uppnås en högre last efter första spricklasten. Visuellt fanns inga större skillnader mellan provkropparna. Dock kunde tendens till lokal intryckning vid lastplattan (lastens angreppspunkt ovanpå balken) ses. Många av graferna har ett icke-linjärt beteende i början (se Figur 6.1) vilket kan härledas till små glapp och eventuella snedställningar av uppställningen. När lastpåföringen och upplag kommer i fullständig kontakt med provkroppen övergår responsen till ett mer linjärt beteendet. Dock tyder samtliga grafer på ett delvis icke-linjärt beteende mot slutet av provningen, strax innan uppsprickningslasten. I fortsättningen när icke-linjärt beteende diskuteras syftas det på det generella beteendet och inte det initiala. Vid provningstillfället upplevdes några av brotten som relativt sega jämfört med övriga provningsserier.



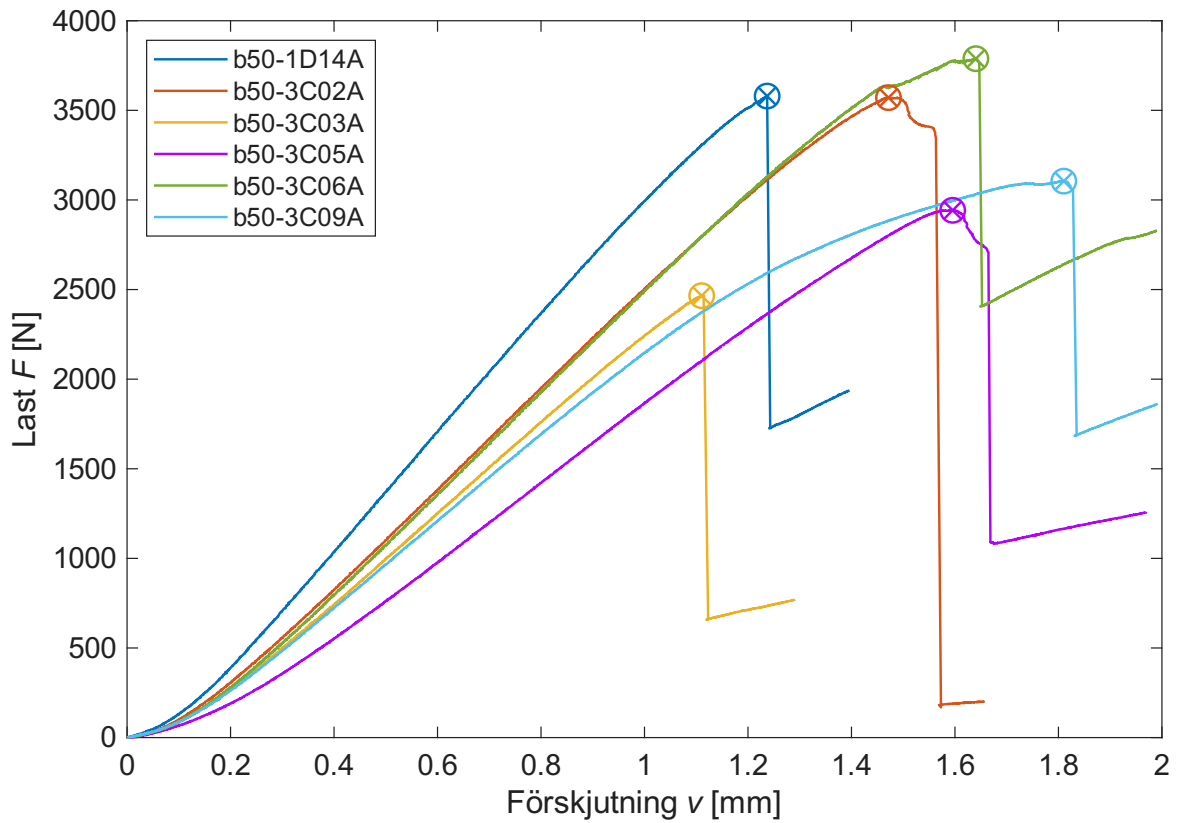
Figur 6.2: Last-förskjutningsdiagram från provningsserierna i björk med balkhöjden $h = 25$ mm. "x" markerar uppsprickningslasten och "o" markerar maxlasten.

Alla provningarna för björk gav tydliga uppsprickningslast. Samtliga brott var mycket spröda. Vid provning var flera av brotten så abrupta att plattorna som LVDT:erna fästes mot, släppte i limningen och slogs av. Graferna i figuren tyder även här på ett delvis icke-linjärt beteende. Dock kunde även här ses viss tendens till lokal intryckning vid lastpåföringspunkten.



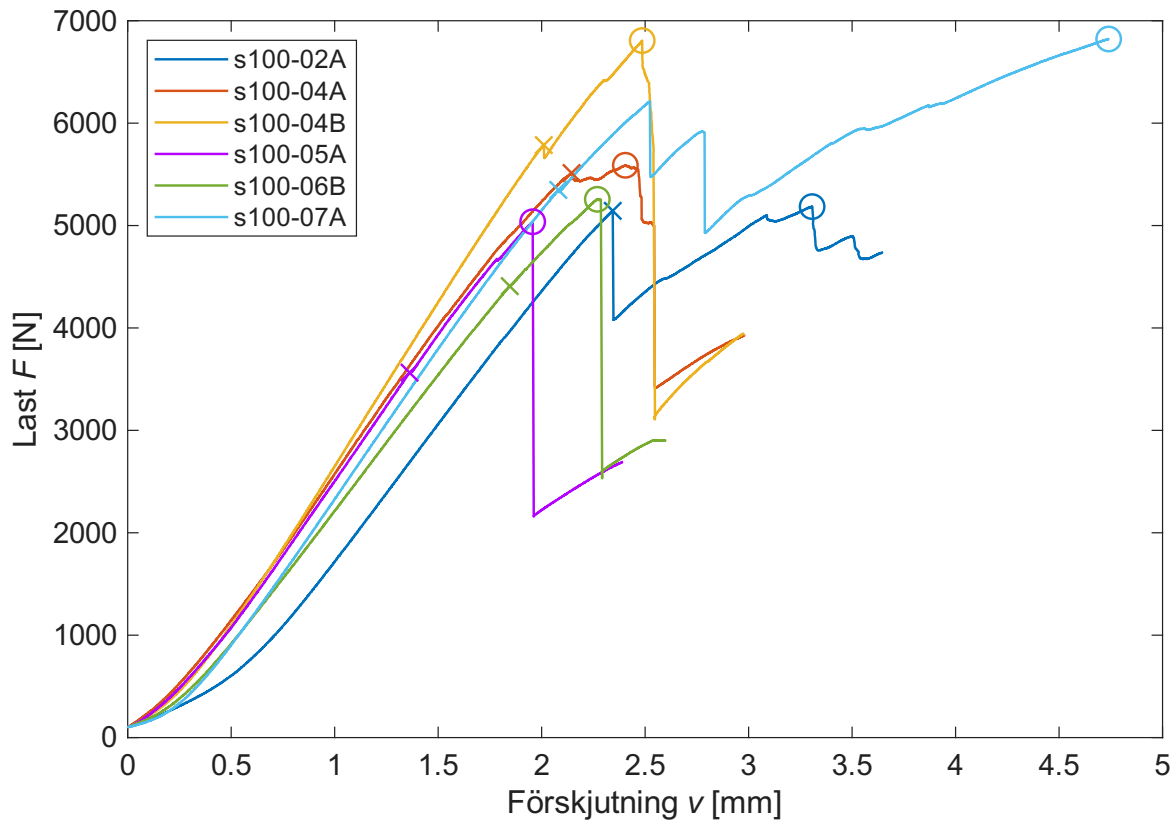
Figur 6.3: Last-förskjutningsdiagram från provningsserierna i gran med balkhöjden $h = 50$ mm. "x" markerar uppsprickningslasten och "o" markerar maxlasten.

Provningarna för höjden $h = 50$ mm är, som beskrivits tidigare, utförda av Jonasson och Detter. Därför presenteras här inga observationer från provningstillfället, utan endast analys av erhållen data. En tydlighet som, precis som för gran med höjden $h = 25$ mm, visas i Figur 6.3 är att maxlasten inte sammanfaller med bedömd uppsprickningslast. Flera av provkropparna har också en relativt stor maxlast i förhållande till uppsprickningslast, speciellt 05A2. Denna provkropp hade inga visuellt märkbara defekter såsom kvistar men hade högst densitet i denna provserie. Dock kunde en liten lokal intryckning vid lastplattan ses. Uppsprickningslasten för provserierna med $h = 50$ mm har bestämts av Jonasson och Detter och de har inte använt sig av metoden med LVDT. I övrigt kan tendenser till ett icke-linjärt beteende ses i figuren.



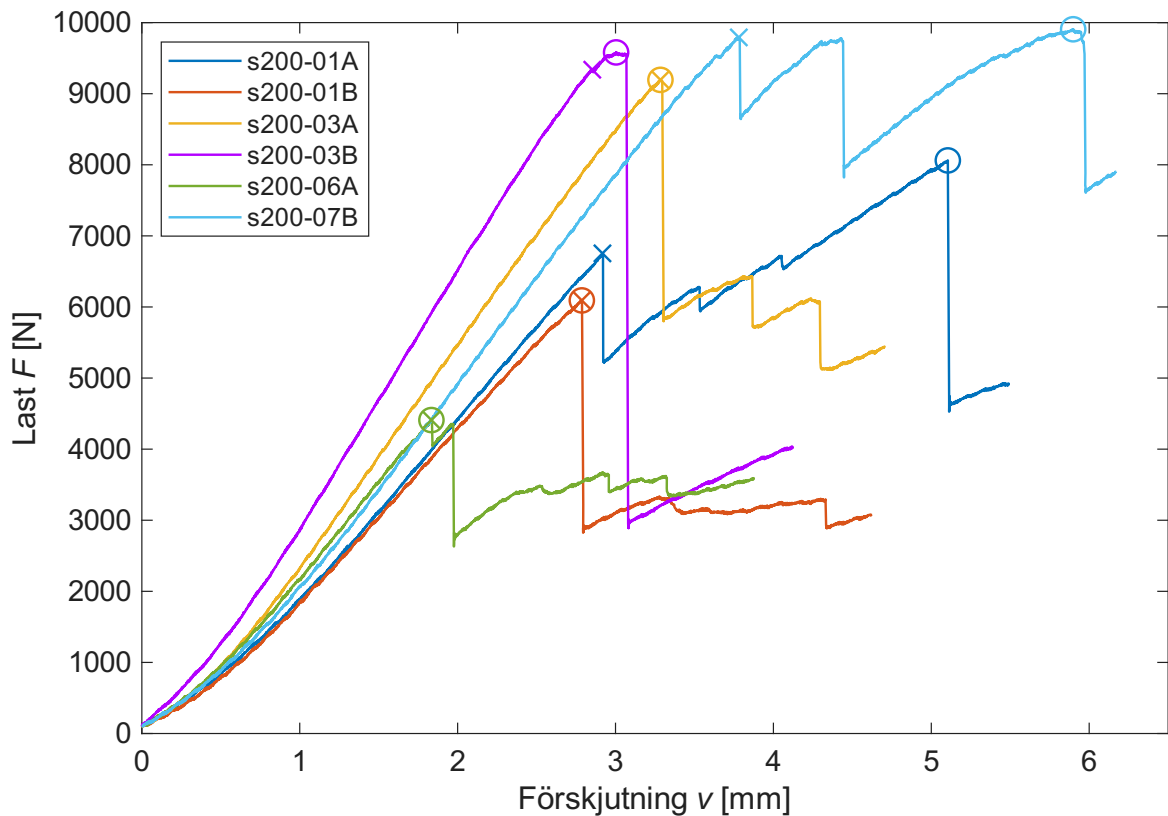
Figur 6.4: Last-förskjutningsdiagram från provningsserierna i björk med balkhöjden $h = 50$ mm. "x" markerar uppsprickningslasten och "o" markerar maxlasten.

Precis som för björkserien med de mindre provkropparna är alla brotten tydliga och spröda. Maxlast och uppsprickningslast sammanfaller för alla provkropparna. Noterbart är att graferna i figuren fortfarande har tendens till ett icke-linjärt beteende.



Figur 6.5: Last-förskjutningsdiagram från provningsserierna i gran med balkhöjden $h = 100$ mm. "x" markerar uppsprickningslasten och "o" markerar maxlasten.

För höjden $h = 100$ mm börjar ett mer tydligt linjärt beteende att kunna urskiljas. Uppmätta maxlaster avviker fortfarande en del från bedömd uppsprickningslast. För provkropparna 02A och 07A ansågs sprickan ha propagerat tillräckligt långt, vid eller innan maxlasten uppnåddes, för att spänningsfältet kring den pålagda lasten skulle kunna påverka resultatet. Detta skulle kunna vara en anledning till att en högre maxlast uppnås.



Figur 6.6: Last-förskjutningsdiagram från provningsserierna i gran med balkhöjden $h = 200$ mm. "x" markerar uppsprickningslasten och "o" markerar maxlasten.

Den avslutande provserien, med de största provkropparna, har ett tydligt linjärt beteende upp till uppsprickningslasten. Dessutom sammanfaller hälften av maxlasten och bedömda uppsprickningslasten. Men för t.ex. provkropp 01A uppnåddes en högre last efter uppsprickning. Observerat under provning av denna provkropp var att lastkapaciteten ökade igen efter uppsprickning i takt med att sprickpropageringen närmade sig en stor kvist. Noterbart är här också att provkropp 06A hade en relativt liten uppsprickningslast, till och med mindre än nästan alla provkroppar med höjden $h = 100$ mm. Visuellt kunde inga defekter för provkroppen identifieras, densiteten var nära medelvärdet för provningsserien men provkroppen hade den högsta fuktkvoten.

Tabell 6.1: Uppsprickningslast för provningsserier genomförda i detta examensarbete.

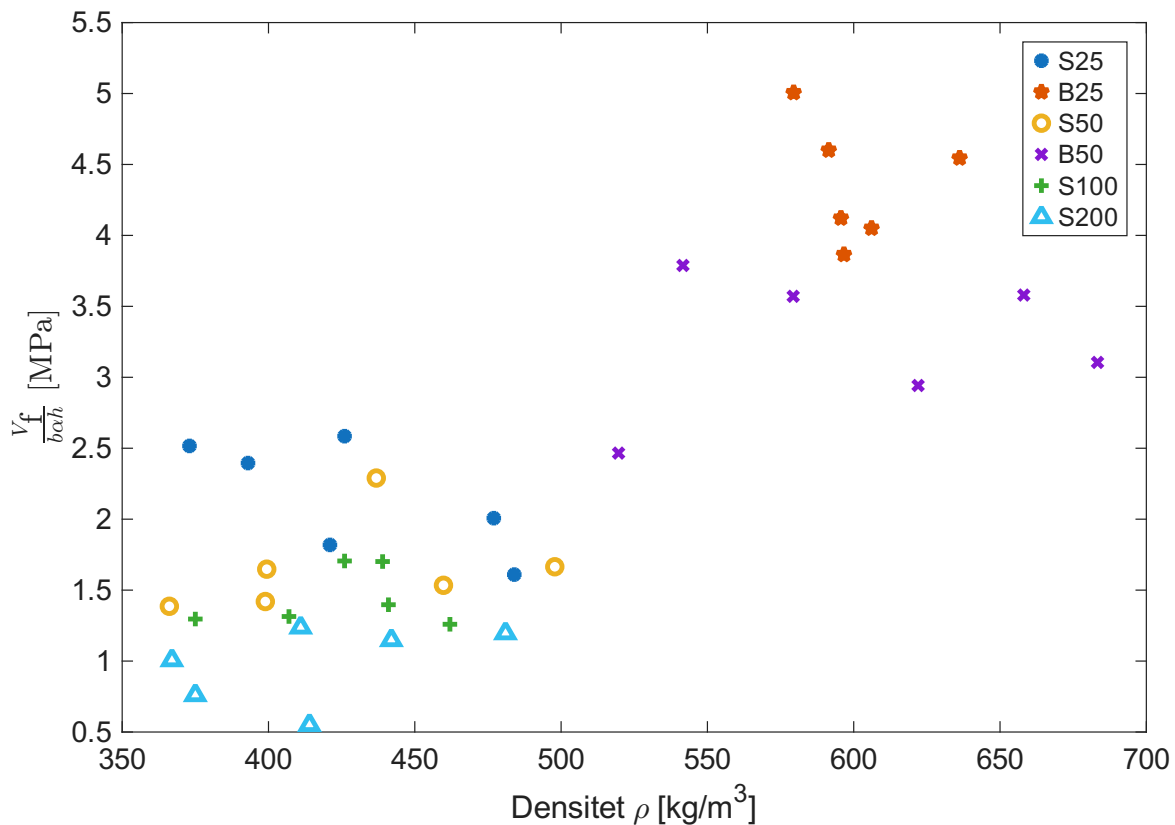
Beteckning	F_c [N]	F_{max} [N]	Densitet [kg/m ³]	Fuktkvot [%]
s25-B-02A-1	1258	1258	373	15.1
s25-B-04A1-1	805	805	484	16.8
s25-B-04A2-1	912	1004	477	13.2
s25-B-05A-1	796	909	421	14.8
s25-B-06B-1	1255	1292	426	14.6
s25-B-07A-1	1198	1198	393	14.9
Medelvärde	1037	1078	429	14.9
Variationskoefficient [%]	21.6	18.6	10.3	7.7
b25-B-1D05-1	1933	1933	597	11.9
b25-B-1D07A-1	2300	2300	591	11.7
b25-B-1D07B-1	2503	2503	597	11.9
b25-B-1D07C-1	2025	2025	606	12.1
b25-B-1D13A-1	2273	2273	636	12.0
b25-B-1D13B-1	2061	2061	596	11.8
Medelvärde	2182	2182	601	11.9
Variationskoefficient [%]	9.8	9.8	3.2	1.2
s100-B-02A-2	5144	5185	375	15.1
s100-B-04A-2	5513	5589	441	15.1
s100-B-04B-2	5786	6808	439	15.1
s100-B-05A-2	3564	5037	462	15.1
s100-B-06B-2	4408	5256	407	15.0
s100-B-07A-2	5348	6822	426	15.4
Medelvärde	4960	5782	425	15.1
Variationskoefficient [%]	16.7	14.2	7.2	0.9
s200-B-01A-2	6754	8061	367	14.8
s200-B-01B-2	6092	6092	375	14.6
s200-B-03A-2	9195	9195	442	15.4
s200-B-03B-2	9337	9581	481	15.2
s200-B-06A-2	4409	4409	414	15.5
s200-B-07B-2	9792	9906	411	14.9
Medelvärde	7597	7874	415	15.1
Variationskoefficient [%]	28.6	27.8	10.2	2.4

Tabell 6.2: Uppsprickningslast för provningsserier genomförda av Johannes Jonasson och Markus Detter.

Beteckning	F_c [N]	F_{max} [N]	Densitet [kg/m ³]	Fuktkvot [%]
s50-B-02A1-1	1386	1386	366	15.1
s50-B-04A1-1	1554	1665	498	15.1
s50-B-05A1-1	1227	1534	460	14.6
s50-B-05A2-1	1009	2290	437	14.7
s50-B-06B1-1	1405	1648	399	14.6
s50-B-07A1-1	1316	1420	399	14.5
Medelvärde	1316	1657	426	14.8
Variationskoefficient [%]	14.1	19.9	11.3	1.8
b50-B-1D14A-1	3580	3580	658	11.7
b50-B-3C02A-1	3571	3571	579	11.2
b50-B-3C02A-1	2466	2466	520	11.5
b50-B-3C03A-1	2942	2942	622	11.3
b50-B-3C06A-1	3788	3788	542	11.2
b50-B-3C09A-1	3105	3105	683	11.6
Medelvärde	3242	3242	601	11.4
Variationskoefficient [%]	15.3	15.3	10.8	1.9

6.1.3 Densitet och fuktkvot

Som beskrivits i kapitel 5 har densitet och fuktkvot bestämts för samtliga provkroppar. Ett medelvärde för densiteten från provkropp samt dess bortsågade del från urtag, har beräknats. Då provkropparna har två olika bredder plottas den effektiva skjuvspänningen som en funktion av densiteten, se Figur 6.7. Den effektiva skjuvspänningen är uppsprickningslasten dividerad med bredden samt den effektiva höjden.



Figur 6.7: Effektiva skjuvspänningar som funktion av densiteten

Baserat på Figur 6.7 ses inget entydigt samband mellan densiteten och den effektiva skjuvspänningen. Därmed inte heller något tydligt samband mellan densiteten och uppsprickningslasten. Fuktkvot för samtliga granbitar ligger runt 14-16 procent medan björkprovkropparna har en lägre fuktkvot på runt 11-12 procent.

6.2 Modellering

6.2.1 Medelspänningsmetoden

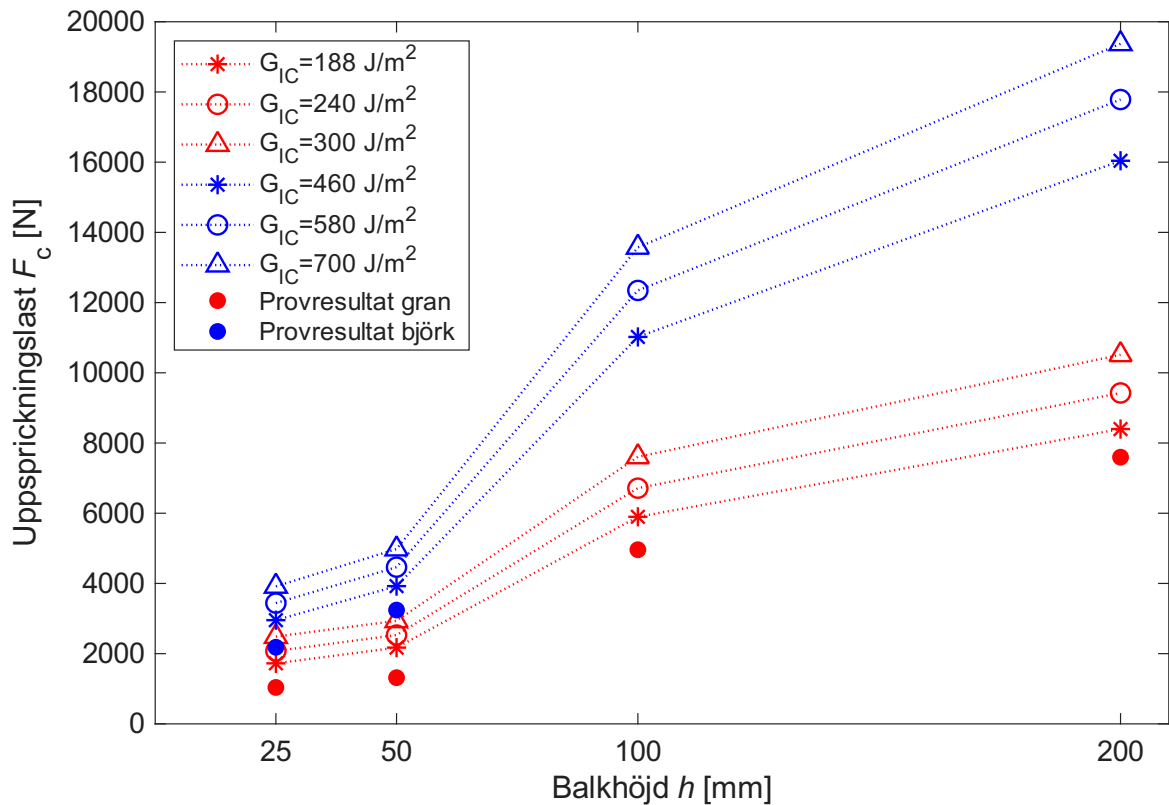
Beräkningssättet för medelspänningsmetoden beskrivs i avsnitt 5.4.1. I Tabell 6.3 och 6.4 nedan redovisas beräknade uppsprickningslaster för respektive höjd med tre olika brottenergi. Värden för kvoten $k = \bar{\tau}/\bar{\sigma}$ mellan medelspänningarna samt det viktade värdet av G_C från mod I och II och medelspänningslängden x_0 presenteras. Dessutom tas kvoten mellan beräknad ($F_{c,ber}$) och uppmätt ($F_{c,exp}$) uppsprickningslast fram. Uppsprickningslasterna ritas som grafer i Figur 6.8 men de streckade linjerna är endast ett stöd för att hålla isär resultat med olika brottenergi.

Tabell 6.3: Uppsprickningslast för gran enligt medelspänningsmetoden.

Höjd [mm]	G_{IC} [J/m ²]	G_{IIC} [J/m ²]	k [-]	G_C [J/m ²]	x_0 [mm]	$F_{c,ber}$ [N]	$F_{c,exp}$ [N]	$F_{c,ber}/F_{c,exp}$ [-]
25	188	658	1.9	233	11.7	1724	1037	1.7
	240	840	2.2	313	15.1	2076		2.0
	300	1050	2.6	417	19.2	2486		2.4
50	188	658	1.4	217	11.6	2172	1316	1.7
	240	840	1.6	282	14.8	2530		1.9
	300	1050	1.7	361	18.6	2936		2.2
100	188	658	1.3	211	11.6	5898	4960	1.2
	240	840	1.3	271	14.8	6714		1.4
	300	1050	1.4	342	18.5	7606		1.5
200	188	658	1.2	209	11.6	8398	7597	1.1
	240	840	1.2	267	14.8	9426		1.2
	300	1050	1.2	335	18.5	10514		1.4

Tabell 6.4: Uppsprickningslast för björk enligt medelspänningsmetoden.

Höjd [mm]	G_{IC} [J/m ²]	G_{IIC} [J/m ²]	k [-]	G_C [J/m ²]	x_0 [mm]	$F_{c,ber}$ [N]	$F_{c,exp}$ [N]	$F_{c,ber}/F_{c,exp}$ [-]
25	460	1610	1.6	539	7.4	2954	2182	1.4
	580	2030	1.7	695	9.3	3440		1.6
	700	2450	1.8	861	11.3	3918		1.8
50	460	1610	1.3	519	7.3	3924	3242	1.2
	580	2030	1.4	660	9.2	4464		1.4
	700	2450	1.4	805	11.2	4980		1.5
100	460	1610	1.2	511	7.3	11022		
	580	2030	1.2	647	9.2	12346		
	700	2450	1.3	784	11.1	13574		
200	460	1610	1.1	506	7.3	16040		
	580	2030	1.2	640	9.2	17784		
	700	2450	1.2	774	11.1	19372		



Figur 6.8: Uppsprickningslast enligt medelspänningsmetoden för olika värden på G_{IC}

Baserat på resultaten ovan överskattar medelspänningsmetoden kapaciteten jämfört med provningsresultaten. Detta gäller för samtliga värden på G_C och för både björk och gran. Därmed överensstämmer resultaten med påståendet från tidigare, att medelspänningsmetoden generellt kan förväntas överskatta kapaciteten jämfört med provningsresultaten [9], se även avsnitt 3.6. Figur 6.8 ovan visar också, att desto högre G_C desto mer överskattas kapaciteten jämfört med de praktiska provningsresultaten.

I Tabell 6.3 och 6.4 kan tydliga skillnader ses. För de två mindre provkropparna har björk betydligt lägre värde på $k = \bar{\tau}/\bar{\sigma}$ än gran. En anledning är att medelspänningslängden är kortare för gran än för björk. Dessutom är kvoten mellan beräknad och uppmätt uppsprickningslast (för de två mindre provkropparna $h = 25, 50$ mm) betydligt mindre för björk. Detta innebär att medelspänningsmetoden ger en bättre uppskattning för björk än för gran. För gran minskar kvoten tydligt med ökande balkhöjd. Därmed blir metoden bättre anpassad för större provkroppar.

6.2.2 Initiala sprick-metoden

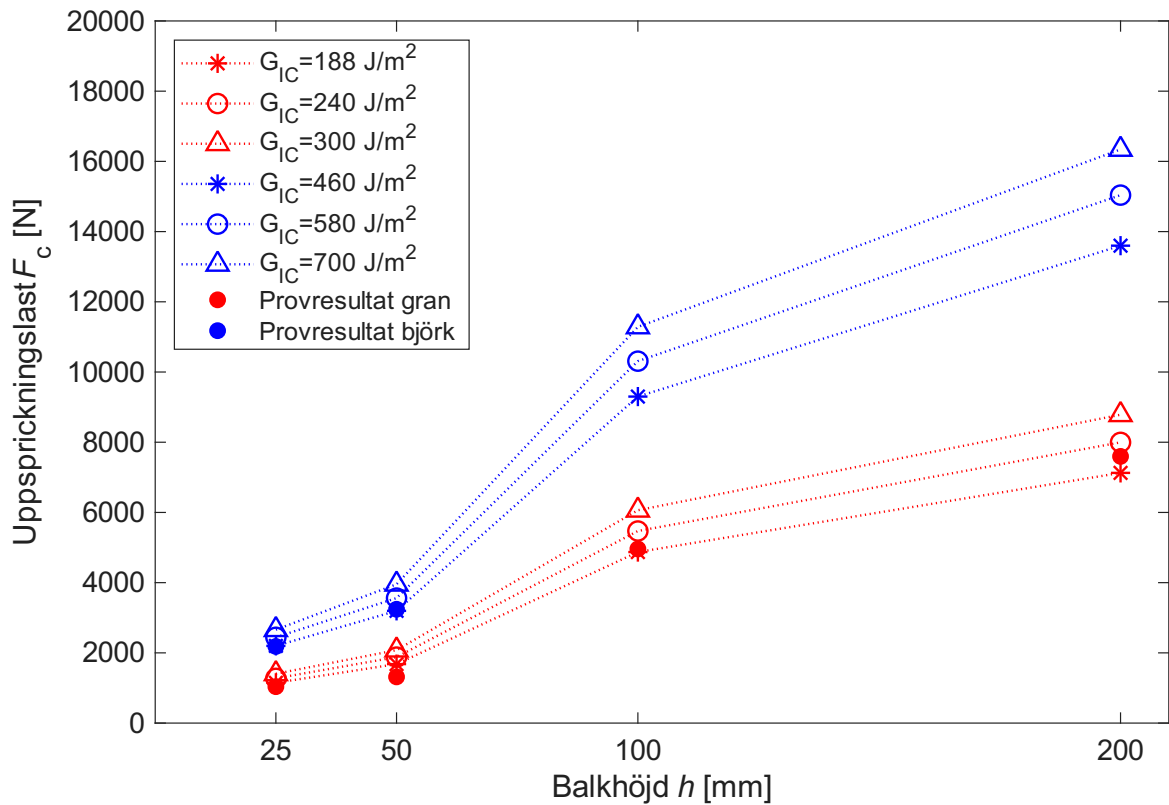
Tillvägagångssättet som används för beräkning enligt initiala sprick-metoden beskrivs i avsnitt 5.4.2. Precis som för medelspänningsmetoden har tre olika brottenergier analyserats. Resultaten summeras i Tabell 6.5 och 6.6 nedan. I Figur 6.9 illustreras uppsprickningslasterna tillsammans med medelvärden från provningsresultaten. Även i denna figur är de streckade linjerna ett stöd för att hålla isär olika resultat.

Tabell 6.5: Uppsprickningslast för gran enligt initiala sprick-metoden.

Höjd [mm]	G_{IC} [J/m ²]	G_{IIC} [J/m ²]	k [-]	G_C [J/m ²]	x_0 [mm]	$F_{c,ber}$ [N]	$F_{c,exp}$ [N]	$F_{c,ber}/F_{c,exp}$ [-]
25	188	658	2.0	238	11.8	1147	1037	1.1
	240	840	2.4	323	15.2	1275		1.2
	300	1050	2.9	436	19.4	1404		1.4
50	188	658	1.4	217	11.6	1680	1316	1.3
	240	840	1.6	284	14.9	1880		1.4
	300	1050	1.8	365	18.6	2079		1.6
100	188	658	1.2	208	11.6	4872	4960	1.0
	240	840	1.3	269	14.8	5471		1.1
	300	1050	1.3	340	18.5	6063		1.2
200	188	658	1.1	204	11.6	7127	7597	0.9
	240	840	1.1	262	14.8	7997		1.1
	300	1050	1.1	330	18.4	8783		1.2

Tabell 6.6: Uppsprickningslast för björk enligt initiala sprick-metoden.

Höjd [mm]	G_{IC} [J/m ²]	G_{IIC} [J/m ²]	k [-]	G_C [J/m ²]	x_0 [mm]	$F_{c,ber}$ [N]	$F_{c,exp}$ [N]	$F_{c,ber}/F_{c,exp}$ [-]
25	460	1610	1.6	542	7.4	2199	2182	1.0
	580	2030	1.8	704	9.3	2444		1.1
	700	2450	2.0	877	11.3	2661		1.2
50	460	1610	1.3	514	7.3	3197	3242	1.0
	580	2030	1.3	657	9.2	3561		1.1
	700	2450	1.6	832	11.2	3954		1.2
100	460	1610	1.1	502	7.3	9300		
	580	2030	1.1	637	9.2	10309		
	700	2450	1.2	773	11.1	11285		
200	460	1610	1.0	496	7.3	13599		
	580	2030	1.0	627	9.2	15039		
	700	2450	1.0	759	11.1	16341		

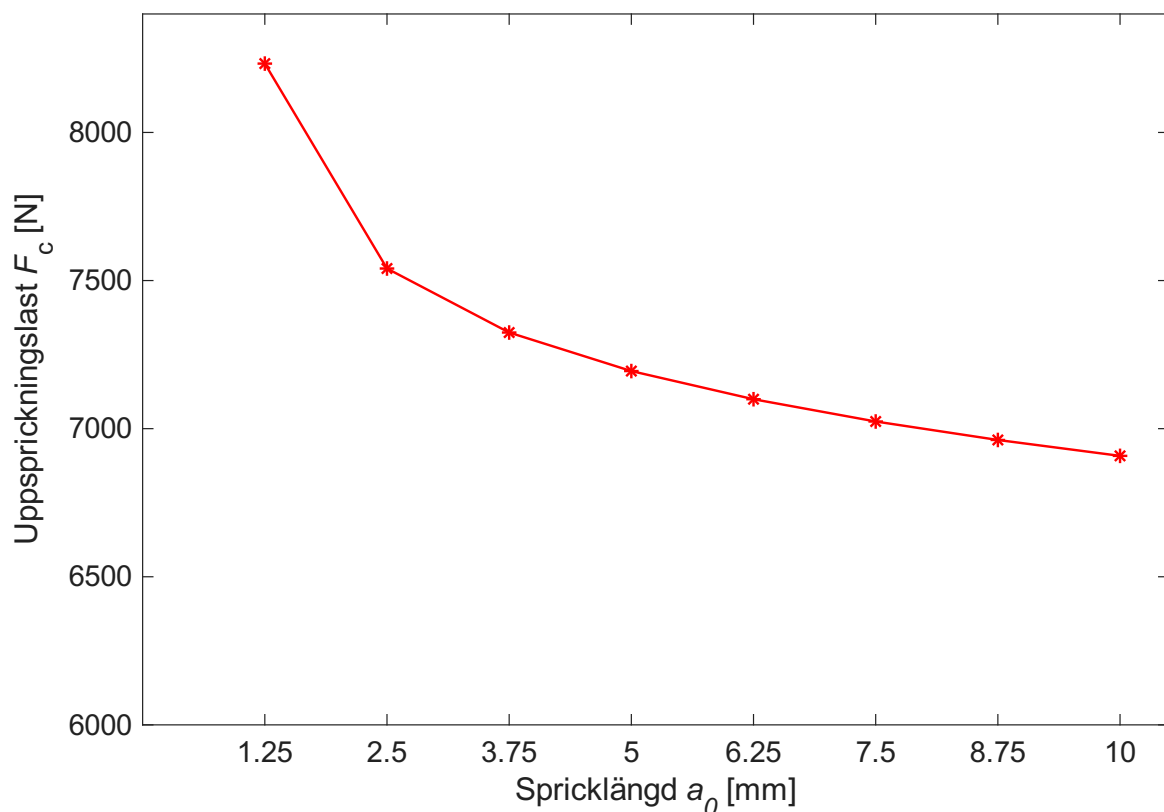


Figur 6.9: Uppsprickningslast enligt initiala sprick-metoden för olika värden på G_{IC}

I avsnitt 3.7 presenterades initiala sprick-metoden och enligt [9] förväntas denna metod generellt underskatta kapaciteten i förhållande till provningar. Resultaten illustrerade i Figur 6.9 ovan tyder på att så är inte alltid är fallet. Det är endast för de två större provkropparna i gran med $G_C=188 \text{ J/m}^2$ som påståendet stämmer. Övriga uppskattningar för gran ger en överskattning av kapaciteten vid jämförelse mot de praktiska provningsresultaten. Björk har bara provningsresultat från de två mindre höjderna och därför är samband svårare att avgöra. Beräkning med 480 J/m^2 underskattar kapaciteten en aning medan övriga högre värden för G_C leder till överskattningar.

Förhållandet mellan spänningarna $k = \bar{\tau}/\bar{\sigma}$ är, precis som för medelspänningsmetoden, mindre för björk än för gran. Eftersom medelspänningslängden tas fram på liknande sätt är detta ett förväntat resultat. Kvoten mellan beräknad och uppmätt uppsprickningslast är även här betydligt mindre för björk än för gran. För gran minskar denna kvot i takt med att balkhöjden ökar, vilket antyder att metoden blir bättre för större provkroppar.

Resultat från initiala sprick-metoden baseras helt på antagande om en initial spricklängd. För att kontrollera hur bra detta tillvägagångssätt är har en kontroll med kompliansmetoden utförts. Kontrollen har gjorts för den största provkroppen i gran, liknande beteende antas gälla både för björk och för mindre provkroppar. Kompliansmetoden innebär att istället för att enbart titta på två olika spricklängder har ett samband med uppsprickningslast som funktion av spricklängden tagits fram. Detta genom att modellera flera olika spricklängder, från 0 till 10 mm. Resultaten illustreras i Figur 6.10 nedan, där $G_c = 188 \text{ J/m}^2$. Spricklängden som använts vid beräkning med initial sprick-metoden är 5.8 mm.



Figur 6.10: Uppsprickningslast för S200 vid olika initiala spricklängder a_0

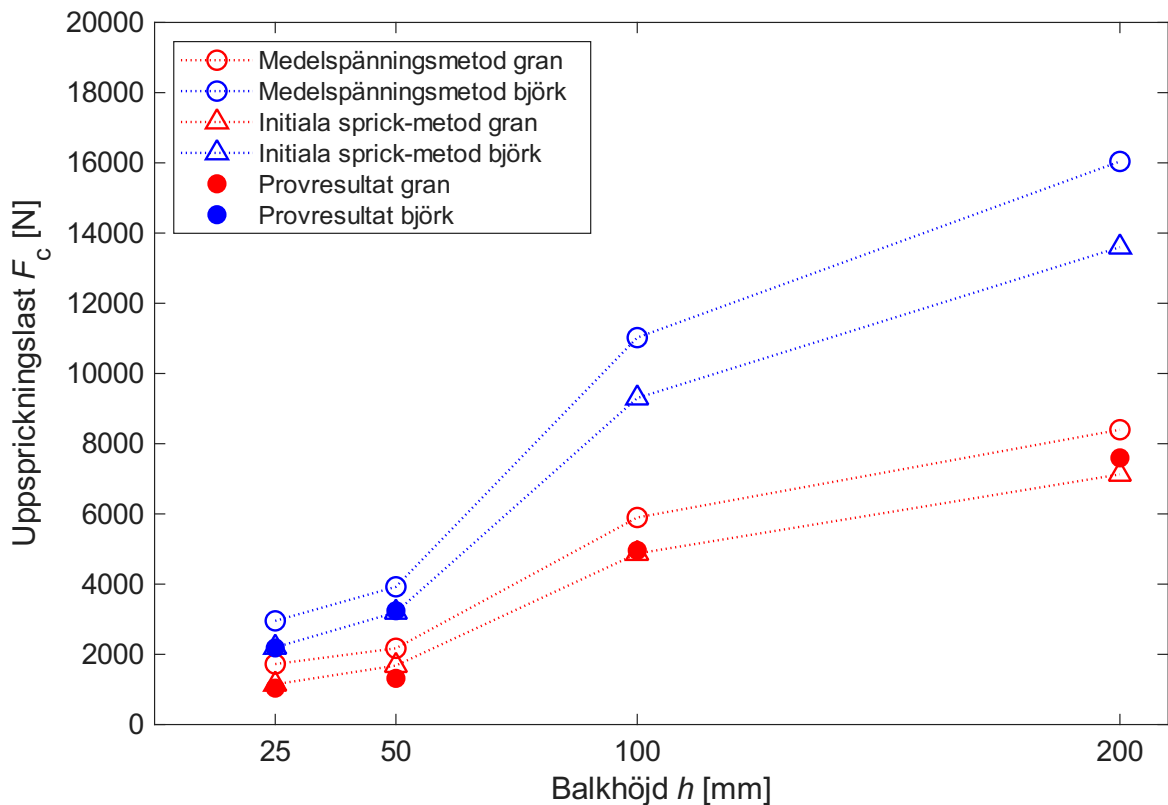
Grafen visar stor inverkan på brottlaster vid små spricklängder. Efterhand som spricklängden ökar planar grafen ut. I vilket område på grafen, inom vilket intervall för spricklängden, som mest tillförlitliga resultat erhålls är inte entydigt. Förutsatt att spricklängden är tillräckligt lång för att undvika osäkerheterna och de stora skillnaderna som visar sig i början på grafen, anses resultaten vara tillförlitliga. Därmed anses inverkan av den valda spricklängden $a_0 = 5.8$ mm vara relativt liten. Detta antagande antas även gälla för alla övriga provkroppar.

6.2.3 Jämförelse av modelleringsmetoder

För att jämföra metoderna med varandra har värden för uppsprickningslaster sammanställts i en gemensam Tabell 6.7. Här har värdena 188 J/m^2 och 460 J/m^2 på brottenergin använts för gran respektive björk. I Figur 6.11 illustreras värdena grafiskt.

Tabell 6.7: Jämförelse av uppsprickningslast, i N, för båda modelleringsmetoderna.

	Höjd [mm]	Medelspänning	Initiala sprick
Gran	25	1724	1147
	50	2172	1680
	100	5898	4872
	200	8398	7127
Björk	25	2954	2199
	50	3924	3197
	100	11022	9300
	200	16040	13599



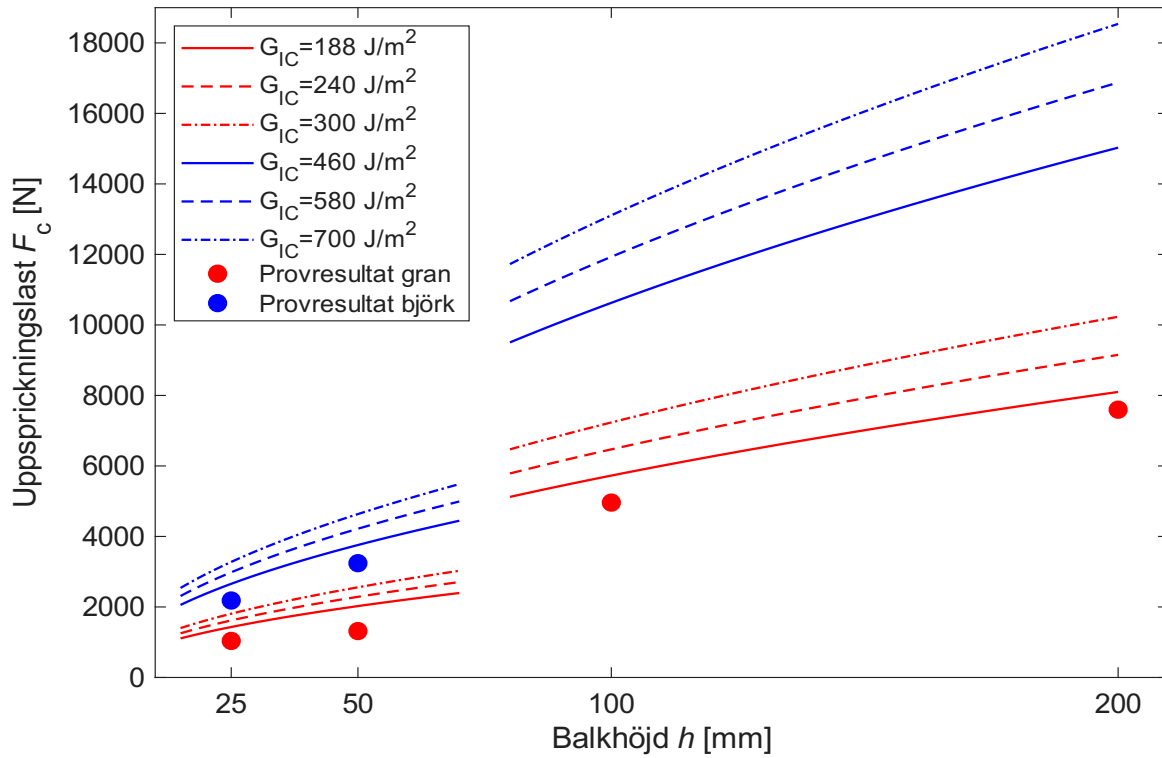
Figur 6.11: Jämförelse av uppsprickningslast för de numeriska metoderna och medelvärden för provningsresultat.

Anledningen till att dessa två G_C valts att användas vid jämförelsen är främst att båda är den lägre gränsen av intervallet. Dessutom är det dessa som ger bäst anpassning mellan resultat från provning och modellering. Hypotesen att medelspänningsmetoden ska överskatta och initiala sprick-metoden ska underskatta kapaciteten stämmer även relativt bra.

6.3 Beräkningar enligt Gustafsson och Eurokod 5

6.3.1 Gustafsson-metoden

Uppsprickningslasten för Gustafssons ekvation (ekvation 4.1) beräknas, till skillnad från tidigare, inte enbart för de fyra specifika höjderna. Eftersom metoden bygger på en handberäkningsekvation kan beräkningar på kontinuerliga värden för balkhöjden relativt enkelt utföras. Även här har olika värden på G_C undersökts. Resultaten redovisas i Figur 6.12 tillsammans med medelvärden från provningsresultaten. Geometriska faktorer följer beskrivning enligt Figur 5.1 och materialparametrar är hämtade ur Tabell 5.1. Linjernas diskontinuitet beror på skillnad i balkbredder mellan de två mindre och de två större provkropparna ($b = 20$ respektive 40 mm).



Figur 6.12: Uppsprickningslast enligt Gustafsson-metoden för olika värden på G_{IC} .

Precis som för medelspänningsmetoden överskattas kapaciteten en aning för samtliga brottenergier och träslag. Detta överensstämmer med andra tidigare utvärderingar av metoden som exempelvis Per Johan Gustafsson har gjort. Enligt Gustafsson blir vid beräkning med hans metod, resultaten generellt lite högre jämfört med resultat från praktiska provningar [13].

6.3.2 Eurokod

Uppsprickningslaster är precis som för Gustafsson-metoden också beräknade för kontinuerliga värden på balkhöjden. Dock används här andra inparametrar än övriga beräkningar. Dessa har tidigare presenterats i Tabell 5.5. Beräkning har följt tillvägagångssättet beskrivit i avsnitt 5.5.1 och resultaten summeras i Tabell 6.8. Beräkningarna baseras på ett karakteristiskt värde för skjuvhållfastheten. Anledningen är att i [18], anges enbart skjuvhållfasthetens karakteristiska värde.

Tabell 6.8: Uppsprickningslast, i N, enligt Eurokod 5.

Höjd	Gran	Björk
25	1296	1360
50	1832	1924
100	5182	5441
200	7329	7695

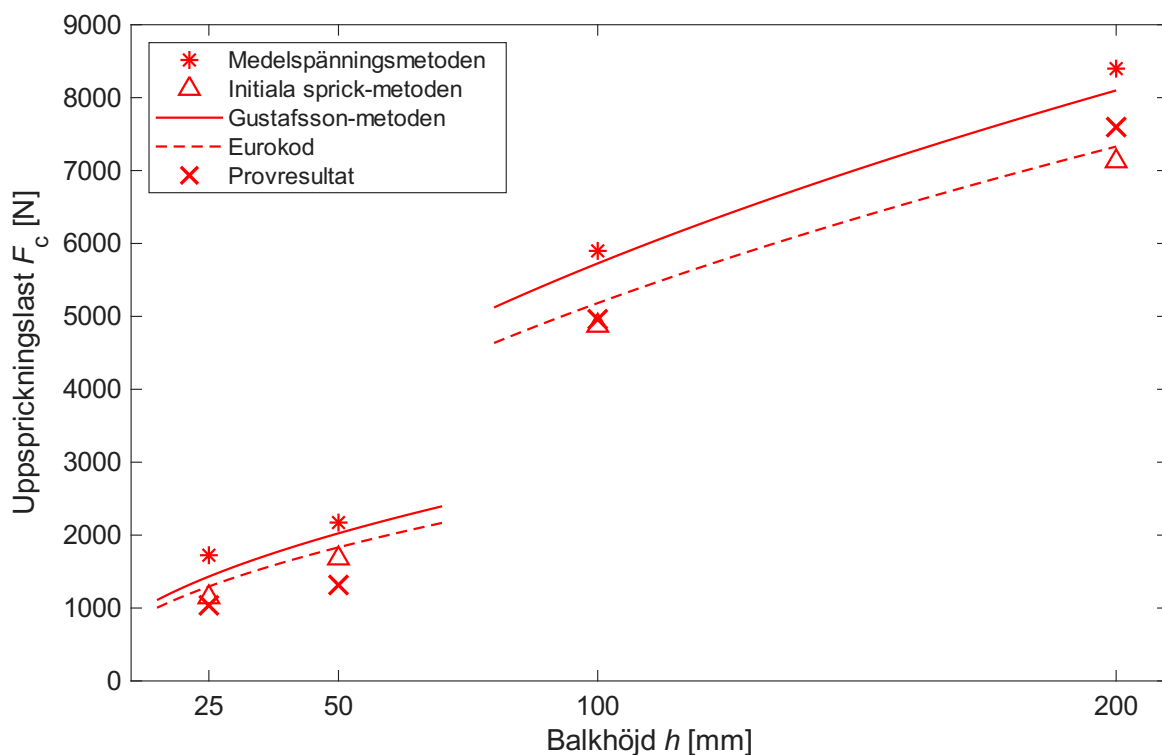
Till skillnad från övriga metoder har inte flera olika G_C analyserats. Detta eftersom brottenergin inte ingår i ekvationerna. Däremot är G_C inbakad i parametern k_n . Dess påverkan behandlas dock senare i avsnitt 6.6. Eftersom det är konstruktionsvirke som har provats har k_n satts till 5.0 enligt ekvation 4.7. Detta gäller både för gran och björk.

6.3.3 Summering av resultat

Resultat från provningarna jämförs nedan mot både modelleringsresultat och handberäkningsmetoder. Detta görs både i tabellform i Tabell 6.9 samt illustrativt i Figur 6.13 och 6.14. Värden erhållna ur beräkningar och modeller är baserade på en brottenergi på 188 J/m^2 för gran respektive 460 J/m^2 för björk. Det ska noteras att värdena för Eurokod sticker ut då dessa är beräknade baserade på andra, karakteristiska, materialparametrar.

Tabell 6.9: Jämförelse av uppsprickningslast för alla metoder. Uppsprickningslasten är angiven i N och höjderna i mm.

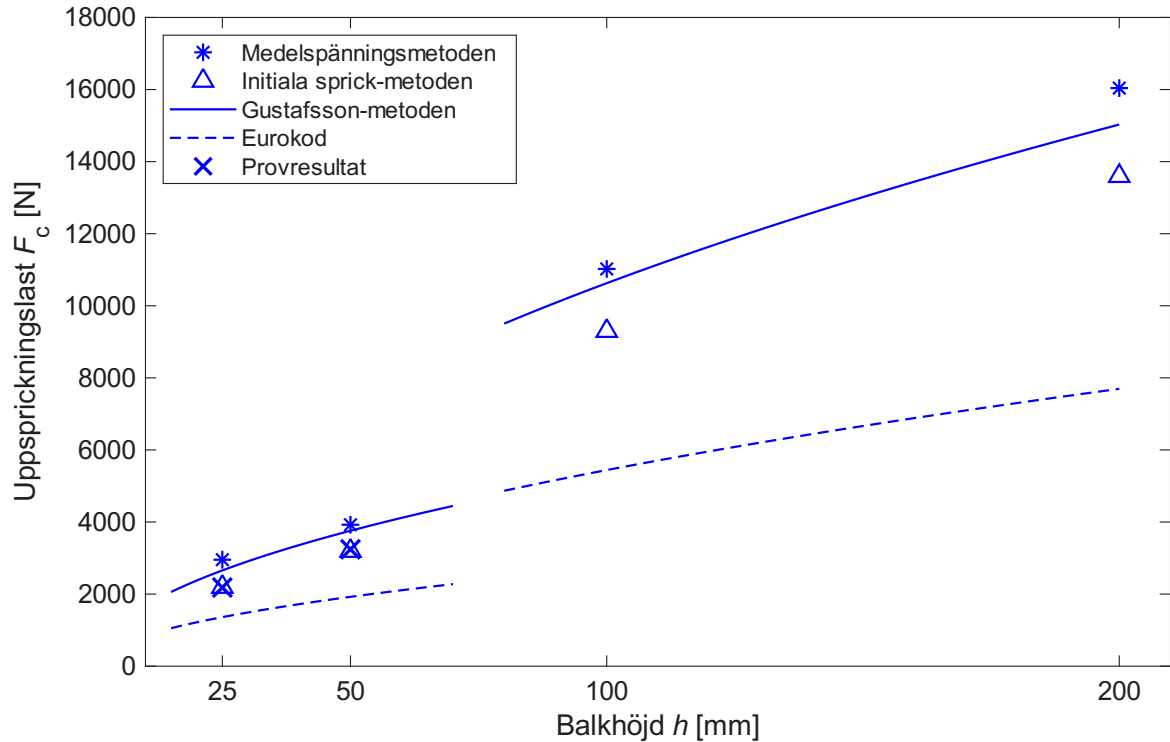
Träslag	Höjd	Medelspänning	Initiala sprick	Gustafsson	Eurokod	Provning
Gran	25	1724	1147	1432	1296	1037
	50	2172	1680	2025	1832	1316
	100	5898	4872	5727	5182	4960
	200	8398	7127	8099	7329	7597
Björk	25	2954	2199	2657	1360	2182
	50	3924	3197	3757	1924	3242
	100	11022	9300	10627	5441	
	200	16040	13599	15029	7695	



Figur 6.13: Jämförelse av uppsprickningslast för gran

I Figur 6.13 ovan kan ett tydligt samband i beteende för metoderna urskiljas. Generellt ger metoderna likartade resultat, med uppskattningar som ligger relativt nära varandra. Vid jämförelse med de praktiska provningsresultaten kan likheter ses. Metodernas framräknade värden ligger relativt nära de verkliga testresultaten. Detta gäller speciellt för de två större provkropparna, där provningsresultaten placerar sig inom intervallet för metodernas uppskattningar. De två mindre provkropsstorlekarna ligger

strax under metodernas uppskattning. Detta är dock förväntade resultat, då teorin för linjärelastisk brottmekanik är begränsande här. Beräkning för gran enligt Eurokod följer samma beteende som övriga metoder. Detta trots att en betydligt lägre skjuvhållfasthet används vid beräkning samt att karakteristiska värden används och jämförs mot medelvärden.



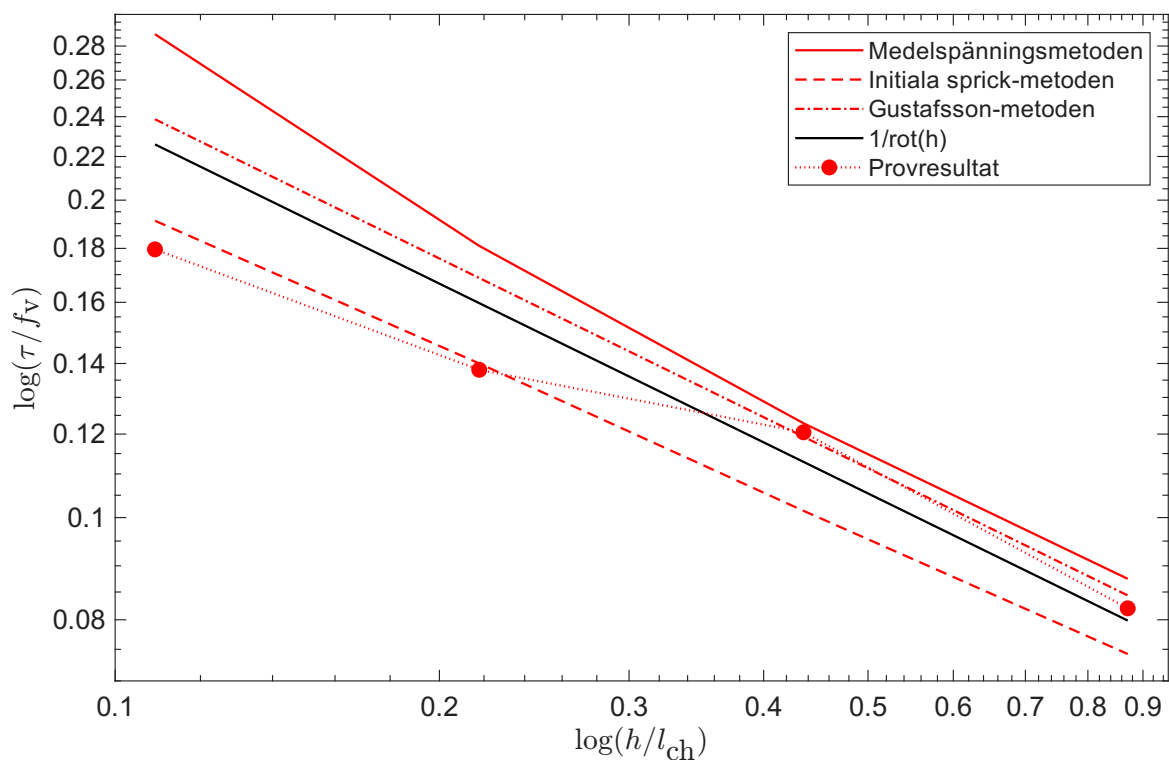
Figur 6.14: Jämförelse av uppsprickningslast för björk

För provningar av björkbalkar har båda modelleringsmetoderna samt Gustafssons metod snarlikt beteende, se Figur 6.14. De beräknade värdena ligger relativt nära varandra, dessutom har kurvorna liknande utseende. Metoden som skiljer sig tydligt är Eurokod. Detta är ett förväntat resultat, då metoden endast är anpassad utifrån materialparametrar och testresultat för gran. Förväntningen på Eurokods dåliga uppskattning är en av de bakomliggande anledningarna för att initiera detta examensarbete. Hur Eurokod bättre kan anpassas för björk undersöks närmare i avsnitt 6.6 och kapitel 7 nedan.

Eftersom data för provningar av björk endast finns för de två mindre höjderna är samband med de teoretiska metoderna svårare att urskilja. De två höjderna som är testade ligger dock nära uppskattningarna från medelspännings-, initial sprick- samt Gustafsson-metoden.

6.4 Storlekseffekt

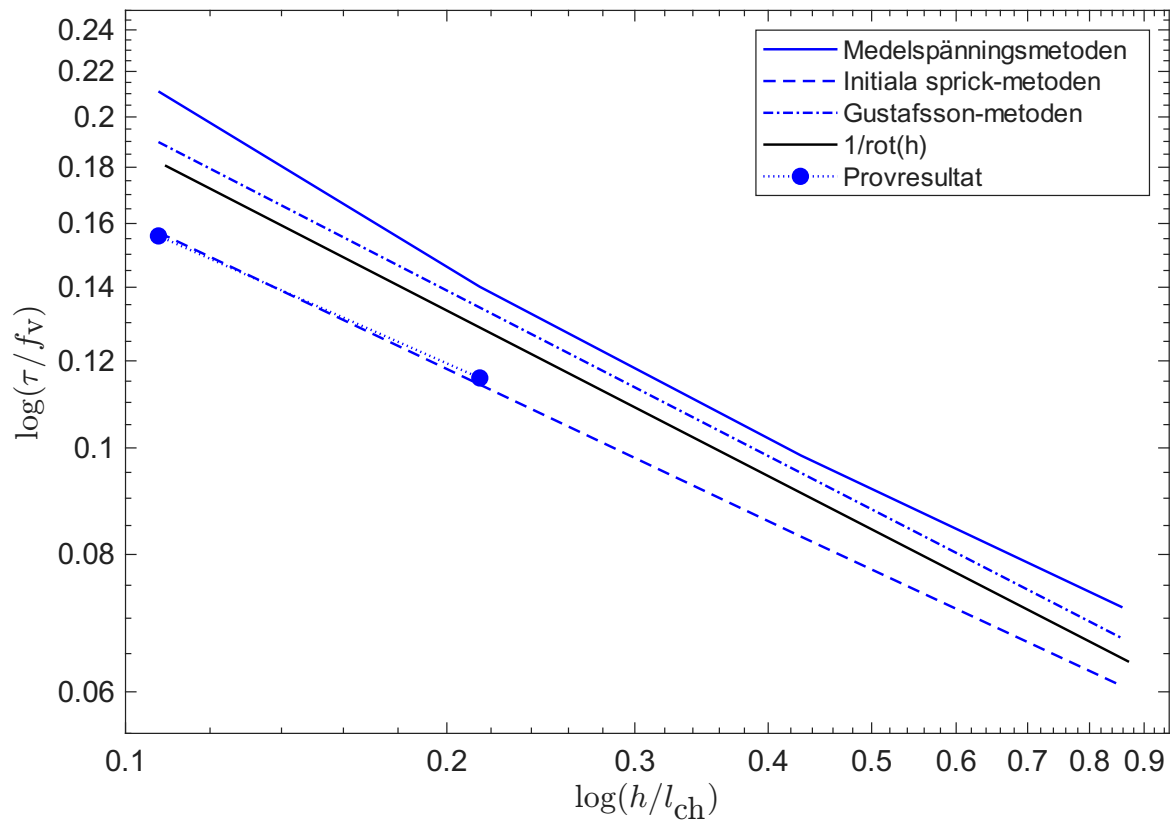
Ett av detta arbetets huvudsyften var att undersöka inverkan av balkhöjden på bärformågan för balkar med urtag. För att bäst illustrera sambandet används den dimensionslösa kvoten mellan nominell skjuvspänning vid brott $\tau = V_f/(b\alpha h)$ och skjuvhållfastheten f_v , som funktion av den dimensionslösa kvoten mellan total balkhöjd h och materialet karakteristiska längd l_{ch} (enligt ekvation 2.1). Dessutom logaritmeras båda axlarna. För linjärelastisk brottmekanik bör lutningen av respektive graf motsvaras av $1/\sqrt{h}$. Metoderna som jämförs är medelspänningsmetoden, initiala sprick samt Gustafssons. Storlekseffekten plottas för gran och björk i Figur 6.15 respektive Figur 6.16. Dessutom ritas en oberoende linje med lutningen $1/\sqrt{h}$ in i figurerna för att lättare kunna jämföra mot en referens.



Figur 6.15: Illustrerad storlekseffekt för gran

I Figur 6.15 ovan kan det ses att lutningen enligt Gustafssons metod sammanfaller med linjen $1/\sqrt{h}$. Detta är logiskt då Gustafssons grundekvation innehåller termen $1/\sqrt{h}$. Även lutningen för initiala sprick-metoden antar nästintill samma värde som lutningen $1/\sqrt{h}$. Metoden som står ut är medelspänningsmetoden, där värdet för den minsta provkroppen, $h = 25$ mm, avviker tydligt uppåt.

Medelvärden av provningsresultaten har inte lika entydigt beteende som de teoretiska ekvationerna och modellerna. För de två största provkropparna överensstämmer lutningen med beräkningsmetoderna. Dessutom placerar sig värdena i metodernas uppspända intervall. Däremot för de två mindre kropparna viker kurvan av neråt, ut från metodernas uppskattningsintervall. Dock för de två minsta kropparna sinsemellan är lutningen nästan densamma som den teoretiska.

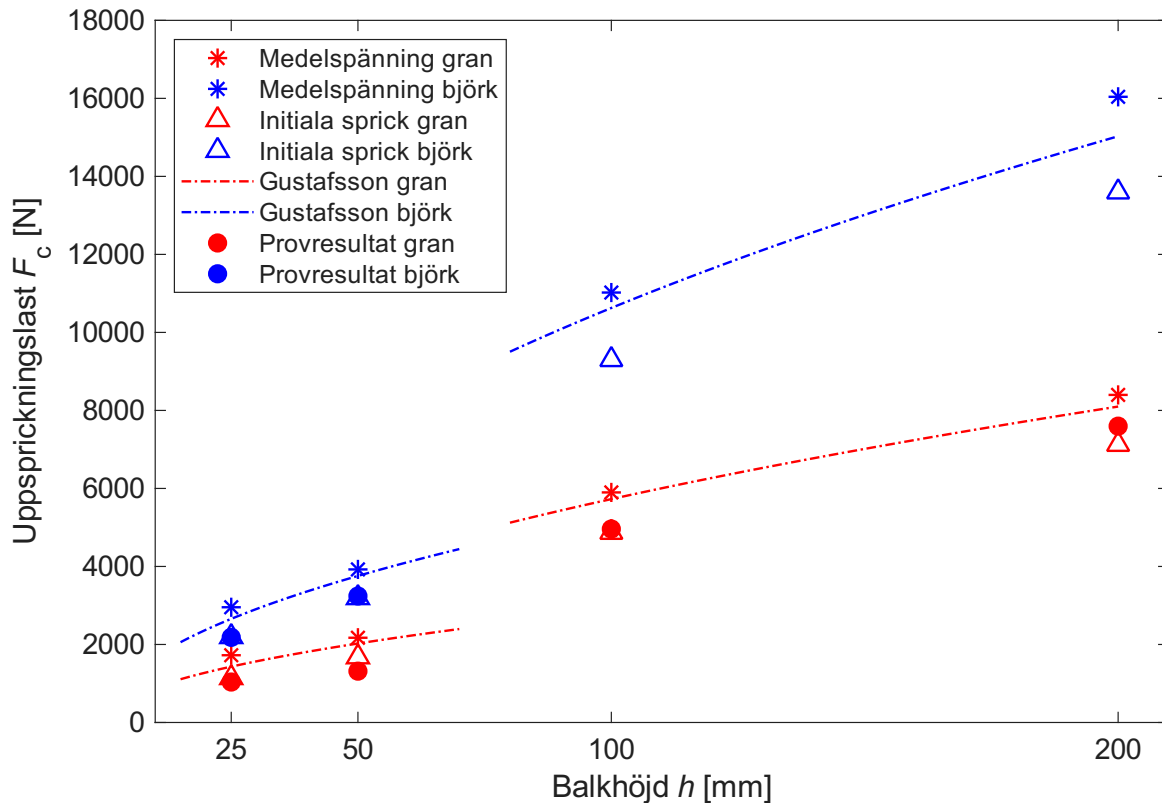


Figur 6.16: Illustrerad storlekseffekt för björk

Storleksdiagrammet för björk (Figur 6.16) ser ut på liknande sätt som för gran. Gustafsson och initiala sprick-metoden har en närapå identisk lutning som korresponderar med $1/\sqrt{h}$. Dessutom har medelspänningsmetoden samma beteende, där kurvan avviker uppåt för små provkroppar. Skillnaden för björk jämfört med gran är att provkropparnas resultat överensstämmer betydligt bättre med de teoretiska beräkningarna. Det ska dock tilläggas, återigen, att data från höjderna $h = 100$ och 200 mm saknas och därför kan inte analysen göras lika utförligt som för gran.

6.5 Jämförelse mellan gran och björk

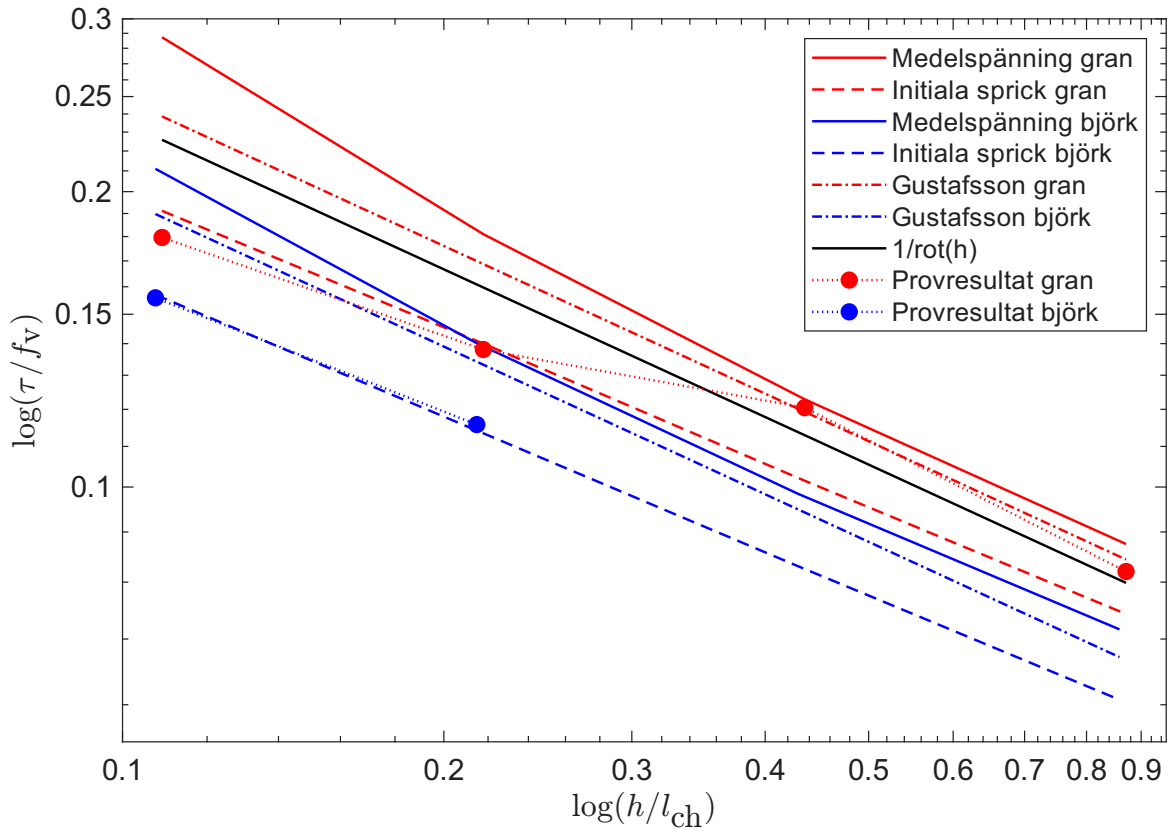
I detta avsnitt undersöks likheter och skillnader mellan de båda träslagen. Resultat som beskrivs ovan sammanställs här och jämförs mot varandra. I Figur 6.17 illustreras uppskattningar av uppsprickningslasten för båda modelleringsmetoderna samt Gustafssons metod tillsammans med provningsresultaten.



Figur 6.17: Jämförelse av uppsprickningslast för gran och björk

Tidigare i detta kapitel, när resultat från varje metod utvärderats individuellt, har likheter konstaterats mellan båda träslag och dess respektive värden. Utseendet och beteendet är likartat men storleksskillnaden är påtaglig. Generellt skiljer sig både de teoretiskt beräknade värdena och de praktiska resultaten en faktor två träslagen emellan. Björk har en dubbelt så hög kapacitet, en dubbelt så stor uppsprickningslast, jämfört med gran. Metodernas storleksordning mellan varandra följer också samma ordning för båda träslagen.

Förutom storleken på uppsprickningslasten skiljer sig också brottyperna en aning. Som beskrivet ovan, har björk generellt ett betydligt sprödare brott. Detta har konstaterats både genom analys av kraft-förskjutning samt LVDT-diagram, men även med observationer vid provning.



Figur 6.18: Jämförelse av storlekseffekt för gran och björk

I Figur 6.18 ritas samtliga kurvor för storlekseffekten i samma diagram. Då kan det tydligt ses att majoriteten av kurvorna har identisk lutning. Det är enbart medelspänningsmetoden för båda träslagen, som avviker aningen uppåt vid den minsta provkroppsstorleken.

6.6 Faktor k_n

Det konstaterades i avsnitt 6.3.3 att dimensioneringsreglerna i Eurokod 5 för balkar med urtag är dåligt anpassade för träslaget björk. En möjlig justering som tidigare lyfts fram (avsnitt 4.3) som en eventuell lösning är att anpassa värdet på faktorn k_n . Faktorn k_n har därför i avsnittet nedan beräknats på tre olika sätt. Först användes ekvation 4.13, där inparametrar är skjuvmodul (G_{xy}), skjuvhållfastheten (f_v) samt brottenergin (G_c). Värderna för både gran och björk är hämtade ur Tabell 5.5. Det ska återigen poängteras att skjuvhållfastheten här är baserat på ett karakteristiskt värde. Brottenergin G_c är satt till 188 J/m^2 och 460 J/m^2 för gran respektive björk. Beräkning görs nedan i ekvation 6.1.

$$k_n = 1.5 \cdot \sqrt{\frac{G_{IC} \cdot G_{xy}}{0.6}} / f_v = \begin{cases} k_{n,gran} = 5.5 \text{ mm}^{1/2} \\ k_{n,bjork} = 7.9 \text{ mm}^{1/2} \end{cases} \quad (6.1)$$

En annan metod för att beräkna k_n är att använda uppsprickningslasterna som utgångspunkt. För att göra jämförelsen mot provningsresultaten relevant behöver först medelvärdena för provningsresultaten beräknas om till karakteristiska värden. De görs förenklat genom att beräkna ett förhållande mellan medelvärdet (X_m) och ett karakteristiskt värde (X_k) enligt

$$\frac{X_k}{X_m} = 1 - CV \cdot k_s \quad (6.2)$$

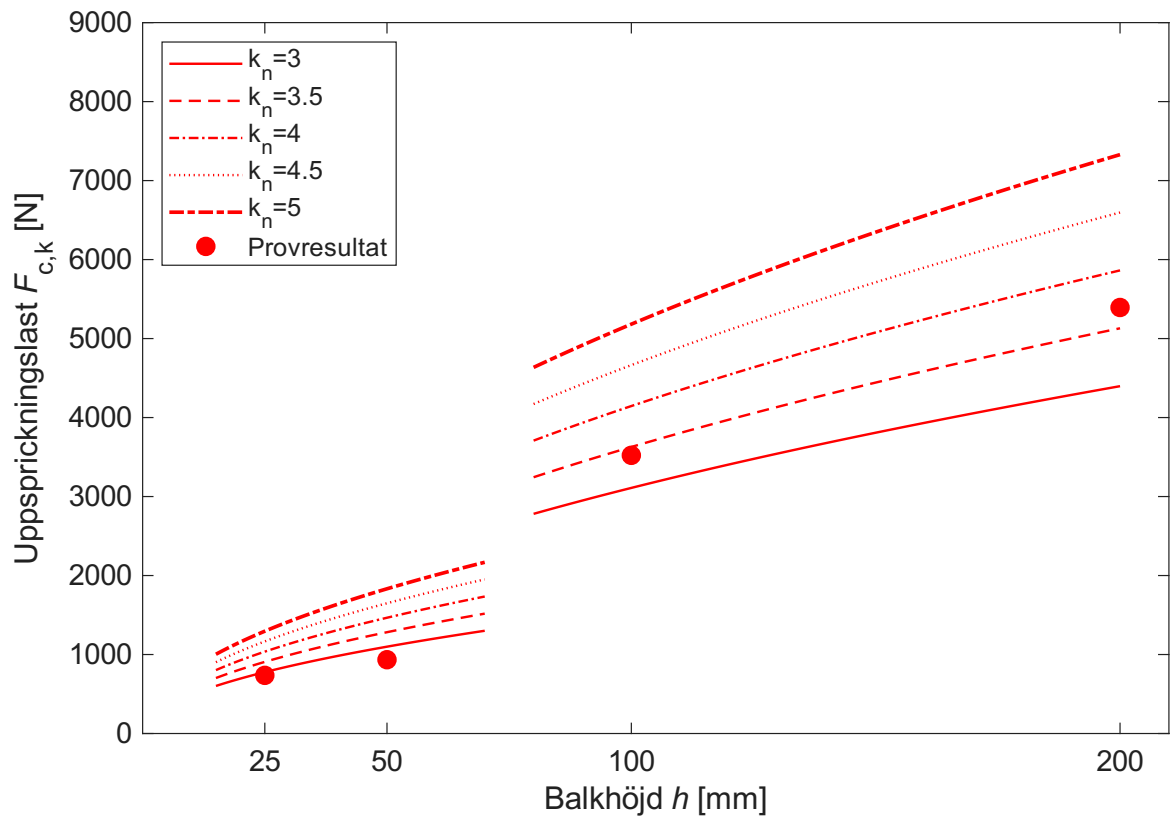
där CV är variationskoefficienten och k_s är en statistisk koefficient [20]. En förenkling och uppskattning görs där intervallspridningen för provningsresultaten i detta arbete antas vara representativ. Därmed antas, trots att varje provserie enbart innehåller sex provningar, samma resultat erhållas ifall oändligt antal provningar utförts. Det innebär att värde på koefficienten k_s antas vara 1.64 enligt [20]. Ytterligare en förenkling som görs är att en gemensam kvot enligt ekvation 6.2 beräknas för samtliga provkroppar. Detta görs genom att använda ett medelvärde för CV , som gäller för alla provserierna (värden hämtade ur Tabell 6.1 och 6.2). Med $CV = 18\%$ innebär att ett karakteristiskt värde är cirka 70 procent av medelvärdet ($X_k/X_m = 0.7$). Därefter kan karakteristiska uppsprickningslaster beräknas för samtliga provserier.

Genom beräkning enligt dimensioneringsreglerna för Eurokod 5, fast baklänges, erhålls representativa värden för k_n . Dessa beräkningar har utförts på samtliga testade provkroppsserier och utgår från de med ekvation 6.2 uppskattade karakteristiska uppsprickningslasterna samt karakteristisk skjuvhållfasthet enligt Tabell 5.5. I Tabell 6.10 nedan summeras resultaten tillsammans med respektive karakteristisk uppsprickningslast.

Tabell 6.10: Beräknade värden på k_n baserat på karakteristiska uppsprickningslaster från experimentella provningar.

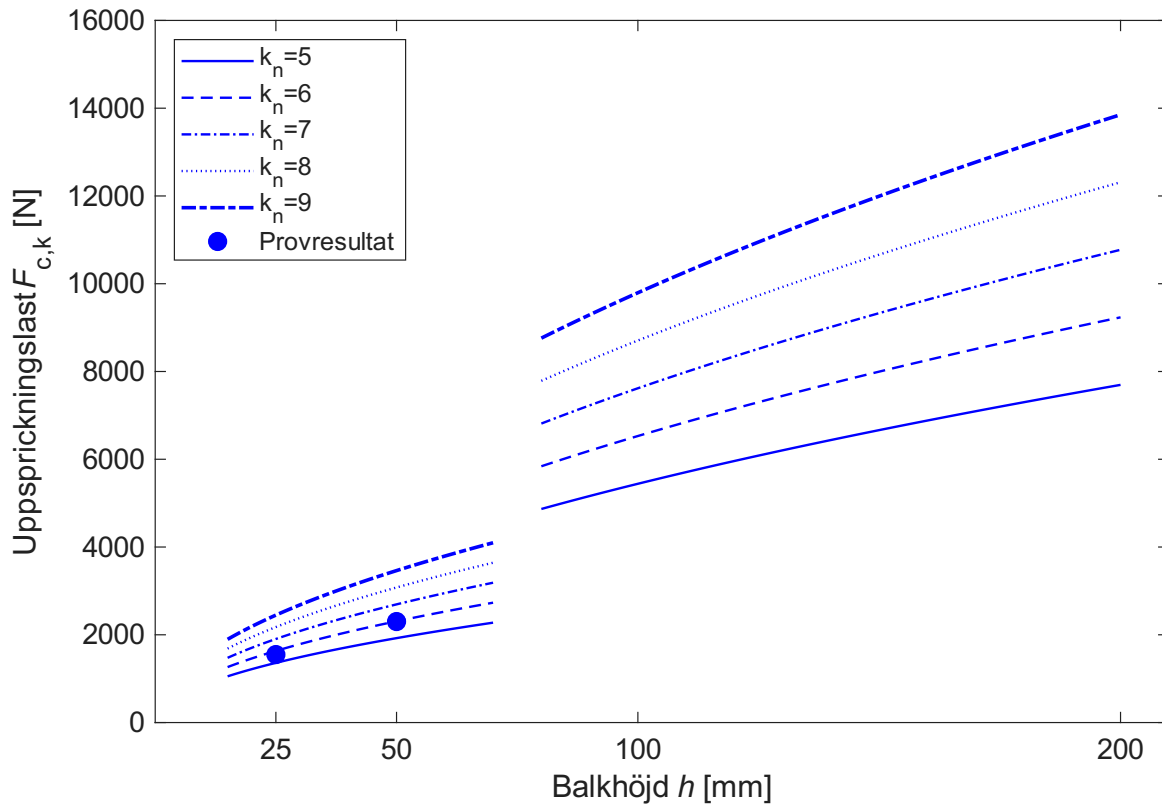
	Uppsprickningslast $F_{c,k}$ [N]	k_n [$\text{mm}^{1/2}$]
Gran 25 mm	736	2.8
Gran 50 mm	934	2.5
Gran 100 mm	3522	3.4
Gran 200 mm	5393	3.7
Björk 25 mm	1550	5.7
Björk 50 mm	2302	6.0

För att ytterligare öka förståelsen kring parametern k_n utförs beräkningar med flera olika värden på k_n för respektive höjd. Värdena är utvalda baserat på intervallet från beräkningar summerade i Tabell 6.10 ovan. I Figur 6.19 och 6.20 ritas resultaten upp i diagramform där varje linje representerar ett specifikt värde på k_n . Diskontinuiteten beror på att beräkningarna har gjorts för två olika bredder, 20 mm för små balkhöjder och 40 mm för större balkhöjder. Även karakteristiska värden för uppsprickningslaster från de praktiska provningarna ritas in i figurerna för jämförelse.



Figur 6.19: Jämförelse av olika värden på k_n för gran

Ekvation 6.1 ger indikation på att värde för k_n borde vara 5.5 för gran. Vid jämförelse med praktiska provningsresultat (se Figur 6.19) verkar däremot ett betydligt lägre värde behövas, runt 3.0.



Figur 6.20: Jämförelse av olika värden på k_n för björk

För björk ger ekvation 6.1 ett riktvärde för k_n på 7.9. Precis som för gran tyder de praktiska provningarna på att ett betydligt lägre värde är mer lämpligt, runt 6.0 (se Figur 6.20). Om man istället skulle utgå från att den aktuella anpassningen av $k_n = 5.0$ för gran är bra, och därför skulle göra en likartad anpassning för björk skulle ett värde på $k_n = 9.0$ vara aktuellt.

7 Diskussion

7.1 Experimentella resultat

I detta avsnitt diskuteras de experimentella resultaten. Först berörs de praktiska provningsresultaten från Avsnitt 6.1.2. Likheter och skillnader som kan ses i tabeller och figurer har tidigare presenteras, men i detta avsnitt diskuteras möjliga bakomliggande förklaringar till dessa.

De två mindre provkropparna ($h = 25, 50$ mm) har ett mer icke-linjärt beteende, både för gran och björk. Orsakerna till icke-linjäriteten kan vara flera, exempelvis plastisering (lokal intryckning). Det icke-linjära beteendet kan linjärelastisk brottmekanik inte fånga upp vilket resulterar i mindre noggranna och sämre resultat. Som beskrivit i avsnitt 3.5 har linjärelastisk brottmekanik begränsningar som gör att teorin beskriver beteende hos små provkroppar sämre. Brottprocesszonen (FPZ) antas vid härledning av teorin, vara liten i relation till den övriga geometrin. Om FPZ förenklat antas motsvara medelspänningslängden så är FPZ cirka 10 mm. Därmed är FPZ storlek 20-40 procent av totalhöjden, vilket gör att grundantagandet om en relativt liten FPZ inte längre anses stämma. I last-förskjutningsdiagrammen för höjderna $h = 100$ och 200 mm, syns däremot ett mer tydligt linjärt beteende. Detta innefattar dock bara gran eftersom björk inte testats för dessa storlekar.

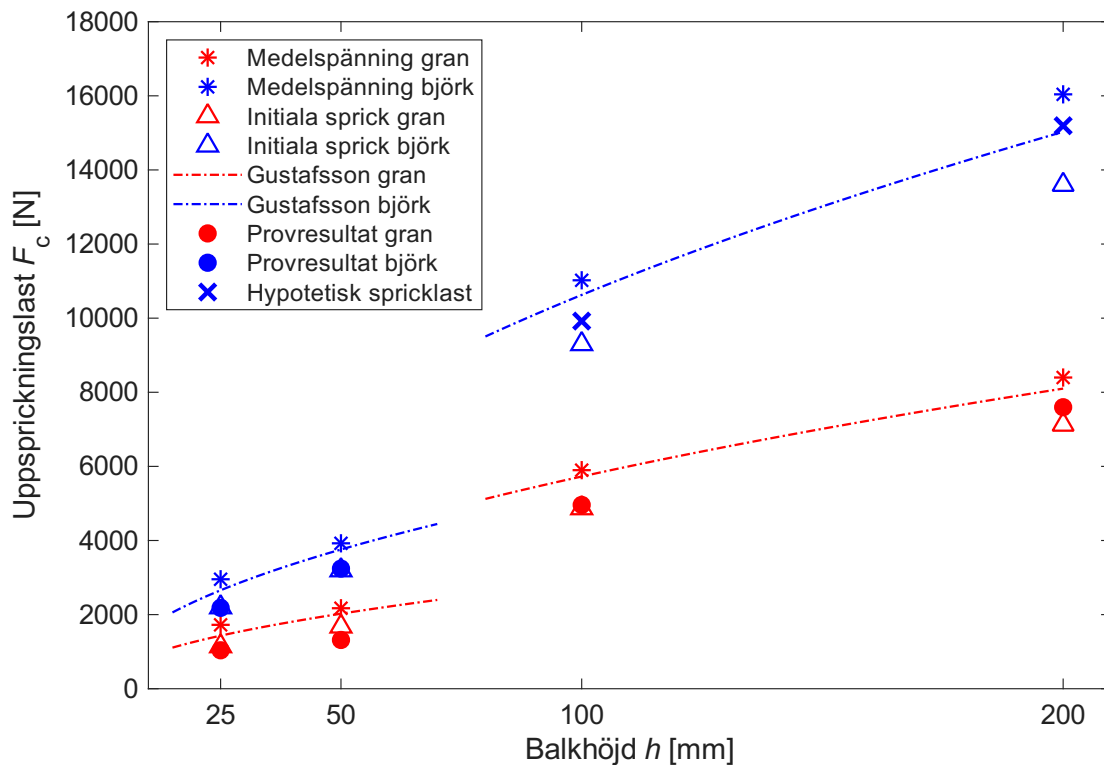
Flera av provningarna uppnår en högre last efter den bedömda uppsprickningslasten. Anledningarna kan vara många. Exempelvis, för provkroppar där endast LVDT:erna lyckas detektera sprickans förekomst kan sprickan anses vara så pass liten och ofullständig över tvärsnittet att den egentligen kanske inte är representativ för uppsprickningslasten. Det finns även möjligheter till eventuell felmätning från både LVDT:er och MTS-maskin. Små abrupta utslag på mätdatan kan ha orsakats av andra anledningar, t.ex. förflyttning av upplag eller liknande. Detta har försökts att ta hänsyn till genom att jämföra LVDT mätningar mot kraft-förskjutningsmätningar från MTS-maskinen. Då båda mätningarna gör relativt tydliga utslag samtidigt, är sannolikheten större för att eventuella fel kan uteslutas. Dessutom kan lokal intryckning vid upplag och kanske främst vid lastens angreppspunkt, bidragit till missvisande resultat då detta icke-linjära beteende inte kan hanteras av LEFM. Visuellt upplevdes inga märkbara intryckningar förutom för de minsta provkropparna. Där kunde en viss intryckning kring lastplattan ses, men denna ansågs vara relativt liten i förhållande till övrig deformation.

Förutom anledningarna som nämns ovan kan lokala defekter spela en stor roll för huruvida bedömd uppsprickningslast överensstämmer med total maxlast. Tidigare har provkropp s200-B-01A-2 identifierats som ett exempel där lasten ökade igen efter att första sprickan uppstått. Vid provningstillfället noterades att en stor kvist var placerad mitt i sprickplanet. Denna lokala defekt, kvist, kan ha fungerat som en form av förstärkning och därmed ökat kapaciteten. Det finns forskning från t.ex. [21] som påvisar att så kan vara fallet, att kvistar kan fungera som en typ av armering. Förutom att lokala defekter i vissa fall kan öka kapaciteten, kan de också bidra till väsentligt lägre kapacitet. Detta skulle kunna vara fallet för provkropp s200-B-06A-2. Dess låga kapacitet tyder på någon form av defekt, trots att det visuellt inte gick att se några. Lokala, små, gömda defekter kan generellt vara en möjlig anledning till att små uppsprickningar detekteras innan maxlasten uppnås.

En observation från provningarna var att provkropparna i björk hade ett mycket mer sprött brott än de i gran. Detta är ett förväntat resultat baserat på tidigare forskning. Även i graferna med LVDT syns det tydligt att alla brott för björk var väldigt spröda då uppsprickningen var stor vid första sprickan. Provkropparna i gran verkade dock ha en tendens att spricka mer stegvis. Som nämnt ovan så släppte plåtarna till LVDT-mätarna när björktesterna genomfördes men inte för någon annan provning. Det visar också på att uppsprickningen för björken var mycket mer plötslig och därmed mer spröd.

7.2 Utvärdering av resultat

I avsnitt 6.5 har träslagen gran och björk jämförts med varandra där resultat från numeriska modeller, handberäkningsmetoder samt från praktiska provningar alla tyder på att björk har en kapacitet som är drygt dubbelt så stor som gran. Tidigare har också tydliga likheter i utseendet för grafer som illustrerar metodernas uppskattade uppsprickningslaster och storlekseffekter, identifierats. Baserat på detta skulle det vara motiverat att anta att träslaget björk följer samma tendenser som gran. Därmed kan värden för de två större balkarna i björk teoretiskt tas fram trots att de inte provats. Om björk antas vara en dubbling av kapaciteten för gran placerar sig de två större provkropparna, precis som för gran, mitt i intervallet för metodernas uppskattningar, se Figur 7.1. Det skulle dock vara intressant att undersöka detta vidare genom att även göra provningar på dessa större björkbalkar.



Figur 7.1: Jämförelse av uppsprickningslast för gran och björk, tillsammans med hypotetiska uppsprickningslaster för björk med höjderna $h = 100$ och 200 mm

De uppskattade uppsprickningslasterna tycks stämma bättre överens med provningsresultaten för de två större balkhöjderna. Provningsresultaten placerar sig här inom intervallet för metodernas uppskattning samt relativt nära värdemässigt. Initiala sprick-metoden underskattar och Gustafsson och medelspänningsmetoden överskattar, precis som förutspått på förhand. Baserat på analys och resonemang ovan kan det vara möjligt att påstå att den linjärelastiska brottmekaniken har sin begränsning för storlek på balkar någonstans mellan en totalhöjd på $50 - 100$ mm. Detta gäller när $\alpha = \beta = 0.5$.

Fenomenet storlekseffekt är påtagligt både för de praktiska provningarna men även för samtliga beräkningsmodeller. Tydligt i exempelvis Figur 6.18 är att storlekseffekten förhåller sig till sambandet $1/\sqrt{h}$. Detta gäller både teoretiska och praktiska resultat. En intressant iakttagelse är dock att för den minsta provkroppstorleken avviker resultaten från medelspänningsmetoden uppåt. Liknande avvikelse sker både för gran och björk. Anledningen till varför är oklart, eventuellt skulle det kunna hänga ihop med antagandet om medelspänningar, ekvation 3.9 och 3.10. Någon djupare analys har dock inte gjorts på ämnet, och vidare undersökning lämnas åt framtida studier.

Den kritiska energifrigörelsehastigheten G_C är en materialparameter som har relativt stor inverkan på resultaten. Dessutom finns inget entydigt värde, utan forskningsresultat placerar G_C inom ett stort intervall. Vilket värde på G_C som ger mest korrekt resultat är svårt att avgöra. Baserat på resultat i detta arbete verkar brottenergierna i nedre delen av intervallen göra modelleringsmetoderna mer anpassade till den verkliga kapaciteten. Det råder dock stor osäkerhet kring detta och mer efterforskning hade behövts göras på ämnet.

Konvergens av elementnät kunde inte uppnås på grund av begränsning i licens för modelleringsprogrammet, och därför avviker de beräknade uppsprickningslasterna en del från de approximerade uppsprickningslasterna om man skulle låta elementnätets storlek gå mot noll. För medelspänningsmetoden verkar elementstorleken ha stor betydelse då en elementstorlek på 1.25 mm ger en uppsprickningslast som är cirka 8 procent för hög. För att uppsprickningslasten enligt medelspänningsmetoden skulle vara inom 1 procent av den approximerade hade en elementstorlek på $9.766 \cdot 10^{-3}$ mm krävts, medan det för initiala sprick-metoden skulle vara tillräckligt med en halvering till 0.625 mm. Dessutom ger initiala sprick-metoden uppsprickningslaster på den säkra sidan. Baserat på detta är ett rimligt antagande att initiala sprick-metoden är en mer tillförlitlig metod.

Samtliga metoder, både numeriska modelleringsmetoder och handberäkningsmetoder, ger resultat som anses stämma relativt bra överens med de praktiska provningsresultaten. Detta gäller främst för medelspännings-, initial sprick- och Gustafsson-metoden. Eurokod anses stämma relativt bra överens för träslaget gran, speciellt för de större provkropparna. Dock för björk är dimensioneringsmetoden enligt Eurokod dåligt anpassad och ger resultat långt under övriga uppskattningar. Trots att både praktiska provningar och samtliga beräkningsresultat från övriga metoder tyder på att björk har en kapacitet som är drygt dubbelt så stor som för gran, ger beräkningarna enligt Eurokod nästan samma uppsprickningslaster för både gran och björk. En uppdatering och anpassning av dimensioneringsmetoden för björk behöver därför ses över. Det ska dock återigen tilläggas att här jämförs medelvärden mot karakteristiska värden.

7.3 Anpassning av dimensioneringsregler

Ett möjligt sätt att anpassa dimensioneringsreglerna i Eurokod är att hitta mer lämpade värden på faktorn k_n . Beräkning från ekvation 6.1 tyder på att k_n för gran borde vara aningen högre än nuvarande värdet på 5.0. Däremot tyder Figur 6.19 på att 3.0 är ett rimligt värde. För björk beräknas k_n behöva vara 7.9 enligt ekvation 6.1. Resultat från provningarna är dock begränsat till de två mindre provkropparna och därför är det svårare att avgöra dess pålitlighet. Även för björk tyder provningsresultaten på att ett betydligt lägre k_n är mer lämpligt, cirka 6.0. Men om, som beskrivits ovan, det aktuella värdet för gran på 5.0 antas stämma och björk antas följa samma beteende som gran, borde k_n för björk snarare vara ännu högre, cirka 9.0.

Beräkning och analys av parametern k_n är dock väldigt osäker. Det nuvarande värdet är uppskattat baserat på testning av dåtidens träkvalité. Detta tillsammans med att värden för elasticitets- och skjuvmoduler samt hållfastheter har ändrats gör att faktorns tillförlitlighet är låg. Ytterligare är k_n starkt beroende av storleken på brottenergin. Då även denna materialparameter har en stor osäkerhet och varierar inom ett stort intervall blir inte definitionen av k_n mer pålitlig. Vid härledning av ekvation 6.1 antas dessutom ett förhållande mellan skjuvmodul och elasticitetsmodul på 15.625 som i sin tur genererar en faktor på 0.8. Med dagens värden på skjuv- och elasticitetsmodul (hämtade från Eurokod) skulle istället faktorn hamna på 0.79 för gran. Om motsvarande skulle göras för björk hamnar faktorn på 0.75. Därmed adderas ännu en osäkerhet till faktorn k_n .

Ytterligare en aspekt som ökar osäkerheten kring analysen av k_n ovan, är att beräkningarna är baserade på ett karakteristiskt värde för skjuvhållfastheten samt ett framräknat karakteristiskt värde på uppsprickningslasten. Det karakteristiska värdet på uppsprickningslasten är beräknat ur ett medelvärde för sex provningar. Det låga antalet provningar gör att denna beräkning är väldigt osäker och opålitlig. Men då det saknas information i Eurokod, kring medelvärden på skjuvhållfastheten, anses jämförelsen vara bästa möjliga.

En anledning till att björkens k_n -värde behöver ökas för att matcha dess kapacitet, är att materialparametrarna är aningen missvisande. Eftersom materialparametrarna i Eurokod endast är angivna för en samling av alla lövträslag blir björkens egenskaper underskattade. Exempelvis är skjuvhållfastheten för lövträslag i Eurokod angiven till 4.2 MPa medan björkens skjuvhållfasthet egentligen ligger närmare 7.0 MPa. Bara denna skillnad ger stor effekt på korrigeringen av k_n . Om bättre, mer individuella materialparametrar för björk skulle angivits i Eurokod, hade kanske ett annat, lägre värde på k_n varit mer aktuellt. Men utifrån de samlade egenskaperna för alla lövträslag, anses ett värde runt 9.0 vara mest optimalt. Detta baseras dock på att den aktuella anpassningen av gran anses vara tillförlitlig.

8 Slutsatser och framtida studier

I detta arbete har brottegenskaper hos träslagen björk och gran undersökts för balkar med urtag vid upplag. Experimentella provningar har utförts och därefter jämförts mot resultat från numerisk modellering samt handberäkningsmetoder. Samtliga resultat visar att kapaciteten för björk är betydligt större än för gran. Kapaciteten verkar vara ungefär dubbelt så stor. Detta gäller för fritt upplagda balkar med urtag vid upplag samt med α - och β -värden på 0.5.

Dimensioneringsreglerna i Eurokod anses ge en relativt stor underskattning av björkens verkliga kapacitet och behöver därför anpassas. Om ekvationerna ska baseras på nuvarande angivna materialegenskaper för lövträslag som en helhet, behöver värdet för faktorn k_n ökas för att bättre beskriva björkens bärförmåga. Faktor k_n är en osäker parameter, men baserat på resultat från detta arbete borde dess värde justeras till cirka 9.0 vid dimensionering av björk. Detta baseras på att det aktuella värdet för gran ($k_n = 5.0$) är en god anpassning. Björkens högre kapacitet tillsammans med bättre anpassning av dimensioneringsreglerna anses kunna vara en drivkraft för en framtida, ökad användning av träslaget.

Storlekseffekten är ett fenomen vars förekomst bekräftas av både praktiska och teoretiska resultat. Samtliga använda beräkningsmetoder följer mestadels en storlekseffekt som motsvarar $1/\sqrt{h}$. För små provkroppar finns tendenser, främst för medelspänningsmetoden, till avvikande resultat där anledningen är okänd.

Linjärelastisk brottmekanik anses fånga beteende hos träbalkar med urtag relativt bra för större balkar. För små provkroppar har teorin dock begränsningar och skulle behöva kompletteras med exempelvis icke-linjär teori. Baserat på erhållna resultat verkar det som att gränsen för vilken LEFM inte längre ger tillförlitliga resultat är någonstans mellan en balkhöjd på 50 och 100 mm (för $\alpha = \beta = 0.5$). Ytterligare verkar medelspänningsmetoden, baserat på beräkningar i detta arbete, påverkas relativt mycket av elementstorleken som används vid finita elementmodellering.

8.1 Förslag på framtida studier

I framtida studier hade det varit intressant att göra provningar på större provkroppar i björk för att på så sätt kunna göra mer fullständiga jämförelser med gran. Både vad gäller storlekseffekt, men även beräkningsmetodernas tillförlitlighet samt uppskattningar av uppsprickningslaster.

Det hade också varit intressant att prova andra upplagsvillkor för prov och modelleringssuppställningen. Exempelvis, undersöka urtag vid upplag för en kontinuerlig balk eller urtag i fält för en fritt upplagd balk. Provningar med olika värden på α och β och eventuellt med annan lutning på urtaget skulle också vara av intresse.

Dimensioneringsreglerna i Eurokod 5 för balkar med urtag skulle också behöva undersökas närmare. Faktorn k_n är en osäker faktor vars opålitlighet kräver att fler utredningar och försök görs. Detta gäller särskilt om mer anpassade värden ska kunna erhållas. Intresset för att anpassa värdet borde dock vara stort då det finns stora möjligheter till bättre materialutnyttjande. Ett bättre materialutnyttjande har många fördelar både ur ett ekonomiskt perspektiv men även ur hållbarhetssynpunkt.

Ytterligare ett intressant område att undersöka vidare är medelspänningsmetoden och dess relation till elementstorlek vid finita elementmodellering. Beräkningar antyder att storleken har stor påverkan och för konvergens krävs väldigt fina elementnät.

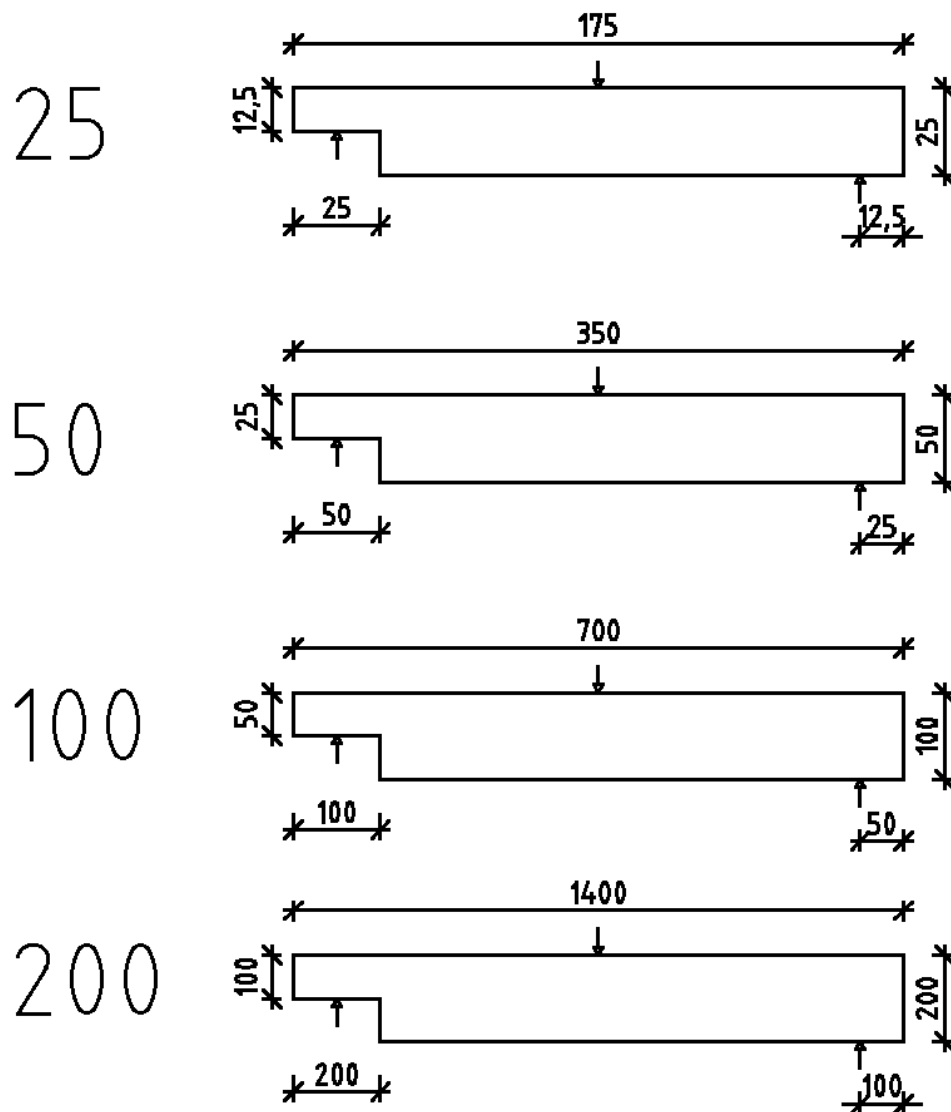
Litteratur

- [1] Johannes Jonasson, Henrik Danielsson och Erik Serrano. “Fracture energy of birch in tension perpendicular to grain: experimental evaluation and comparative numerical simulations”. I: *Wood Science and Technology* 58.5-6 (2024), s. 1925–1949. ISSN: 1432-5225. DOI: 10.1007/s00226-024-01595-6.
- [2] Marie Johansson. “Dimensionering av träkonstruktioner del 1”. I: Svenskt trä, 2019. Kap. 2.
- [3] Per Gunnar Burström. “Byggnadsmaterial:tillverkning, egenskaper och användning”. I: studentlitteratur, 2021. Kap. 14.
- [4] Skogskunskap. *Gran (Picea abies)*. 2025. URL: <https://www.skogskunskap.se/aga-skog/fakta-om-skogen/tradslag-i-vara-skogar/gran-picea-abies/>.
- [5] Skogskunskap. *Björk (Betula spp.)* 2025. URL: <https://www.skogskunskap.se/aga-skog/fakta-om-skogen/tradslag-i-vara-skogar/bjork-betula-spp/>.
- [6] Peer Haller och Per Johan Gustafsson. “An Overview of Fracture Mechanics Concepts”. I: *Fracture Mechanics Models for Strength Analysis of Timber Beams with a Hole or a Notch: A Report of RILEM TC-133*. TVSM-7000 TVSM-7134. Simon Aicher m. fl., jan. 2002.
- [7] Henrik Danielsson. “Perpendicular to grain fracture analysis of wooden structural elements - Models and applications”. I: (2013).
- [8] Erik Serrano. “Rational modelling and design in timber engineering applications using fracture mechanics”. I: *2016 World Conference on Timber Engineering*. 2016 World Conference on Timber Engineering, WCTE 2016, WCTE 2016 ; Conference date: 22-08-2016 Through 25-08-2016. 2016.
- [9] Per Johan Gustafsson. “Mean Stress and Initial Crack Approaches”. I: *Fracture Mechanics Models for Strength Analysis of Timber Beams with a Hole or a Notch: A Report of RILEM TC-133*. TVSM-7000 TVSM-7134. Simon Aicher m. fl., jan. 2002.
- [10] Markus Detter, Georg Hochreiner, Markus Lukacevic och Josef Füssl. “Fem-based engineering approach to assess the bearing strength of GLT members with holes and notches”. I: (2025). DOI: 10.52202/080513-0261.
- [11] SS-EN 1995-1-1:2004. “Eurokod 5: Dimensionering av träkonstruktioner – Del 1-1: Allmänt – Gemensamma regler och regler för byggnader”. 2009.
- [12] Erik Serrano, Robert Jockwer och Henrik Danielsson. “Beams with notches or slits: Extensions of the Gustafsson approach”. I: *International Network on Timber Engineering Research - INTER*. 9th Meeting of the International Network on Timber Engineering Research (INTER) ; Conference date: 21-08-2022 Through 25-08-2022. Nov. 2022.

- [13] Per Johan Gustafsson. “Energy Approach Used in a Draft Eurocode”. I: *Fracture Mechanics Models for Strength Analysis of Timber Beams with a Hole or a Notch: A Report of RILEM TC-133*. TVSM-7000 TVSM-7134. Simon Aicher m. fl., jan. 2002.
- [14] Zdeněk P. Bažant. “Size effect”. I: *International Journal of Solids and Structures* 37.1 (2000), s. 69–80. ISSN: 0020-7683. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00077-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00077-3).
- [15] Robert Jockwer, René Steiger och Andrea Frangi. “State of the art Review of Approaches for the design of Timber Beams with Notches”. I: (2013). DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000838.
- [16] Karin Forsman, Maria Fredriksson, Erik Serrano och Henrik Danielsson. “Moisture-dependency of the fracture energy of wood: A comparison of unmodified and acetylated Scots pine and birch”. I: *Holzforschung* 75.8 (2021), s. 731–741. ISSN: 0018-3830. DOI: 10.1515/hf-2020-0174.
- [17] Pekka Tukiainen. “Mode I fracture behaviour of Norway spruce and silver birch in the radialtangential- and tangentialradial crack orientations”. I: Aalto University publication series DOCTORAL DISSERTATIONS 147 (2016).
- [18] SS-EN 338:2016. “Träkonstruktioner-Konstruktionsvirke-Hållfasthetsklasser”. 2016.
- [19] Ulf Lemke, Marie Johansson, Rune Ziethén och Andreas Briggert. “New criteria for visual strength grading of sawn timber from birch grown in Sweden”. I: (2023). DOI: 10.52202/069179-0102.
- [20] SS-EN 1990. “Eurokod - Grundläggande dimensioneringsregler för bärverk”. 2002.
- [21] Robert Jockwer, Erik Serrano, Per Johan Gustafsson och René Steiger. “Impact of knots on the fracture propagating along grain in timber beams”. I: *International Wood Products Journal* 8.sup1 (2017), s. 39–44. DOI: 10.1080/20426445.2016.1275093.

Bilaga A

Ritningar



Figur A.1: Ritning på de fyra undersöka provkropparna, mått i mm.

Bilaga B

Provuppställning



Figur B.1: Provuppställning för $h = 25\text{mm}$



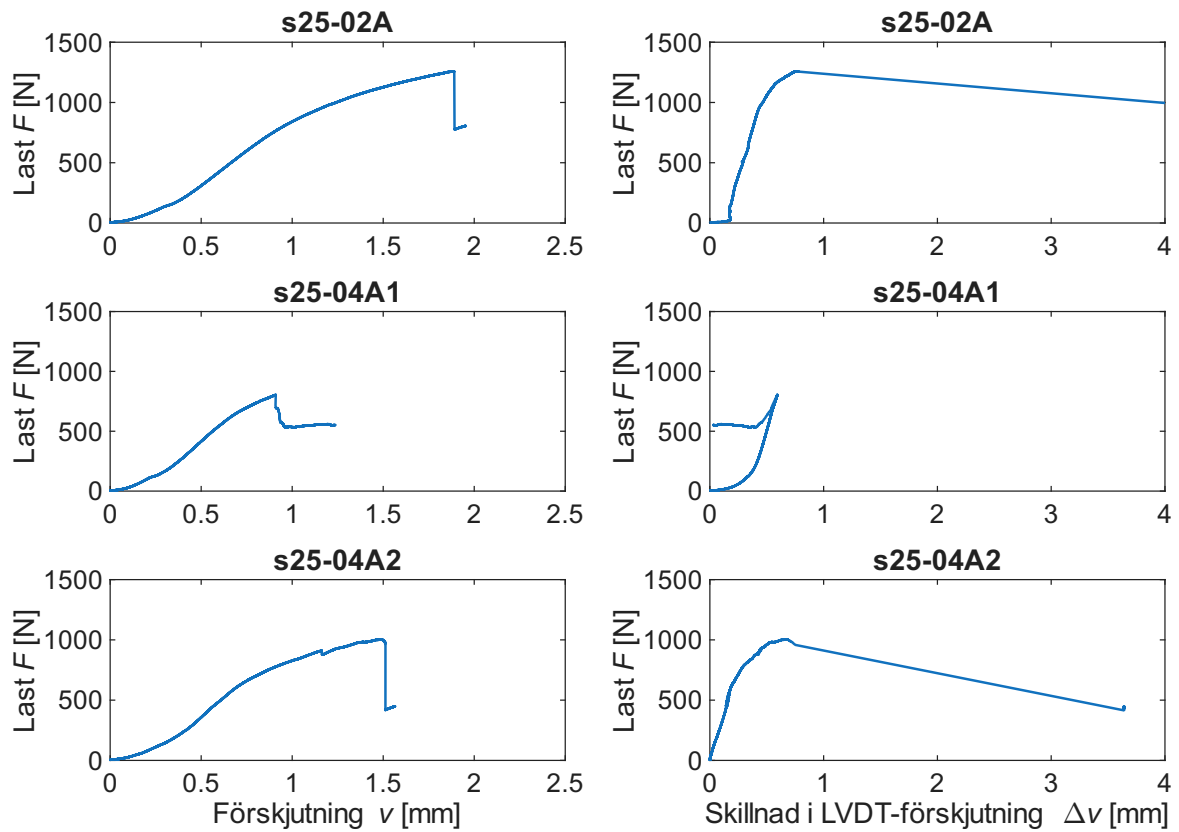
Figur B.2: Provuppställning för $h = 200\text{mm}$



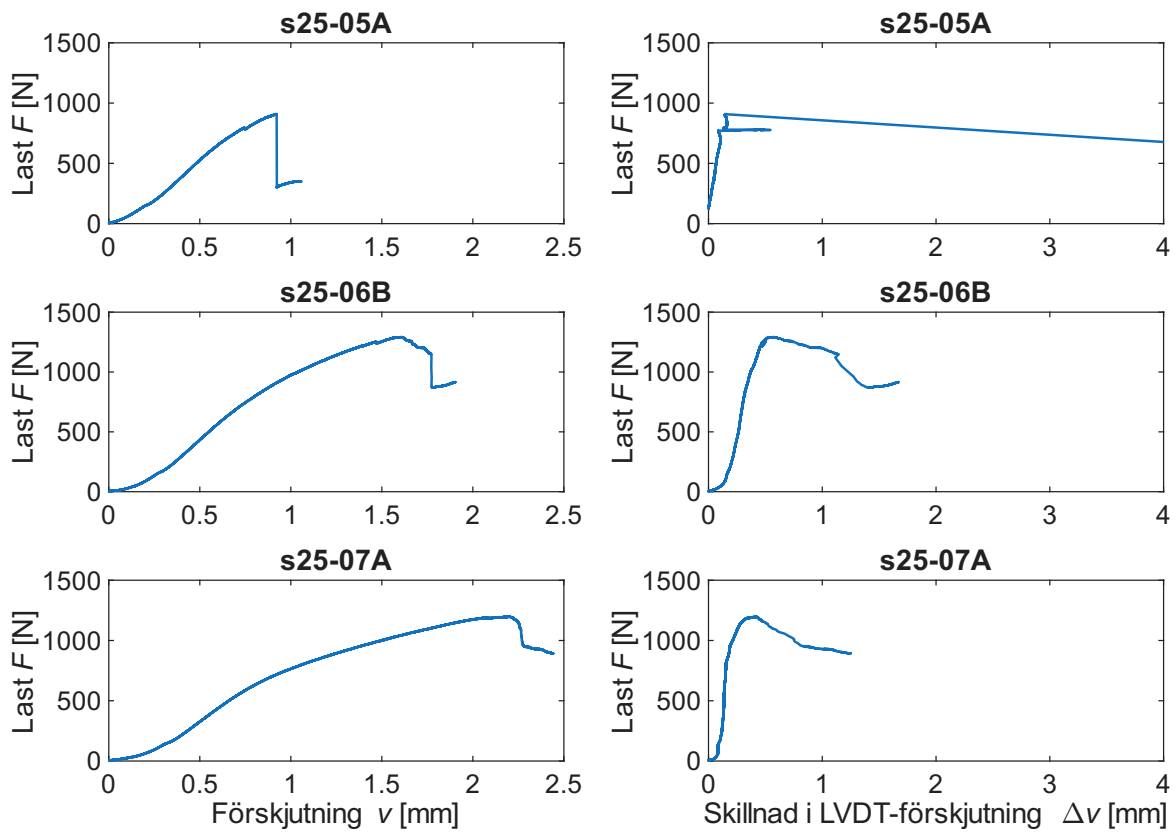
Figur B.3: Provuppställning med LVDT för $h = 200\text{mm}$

Bilaga C

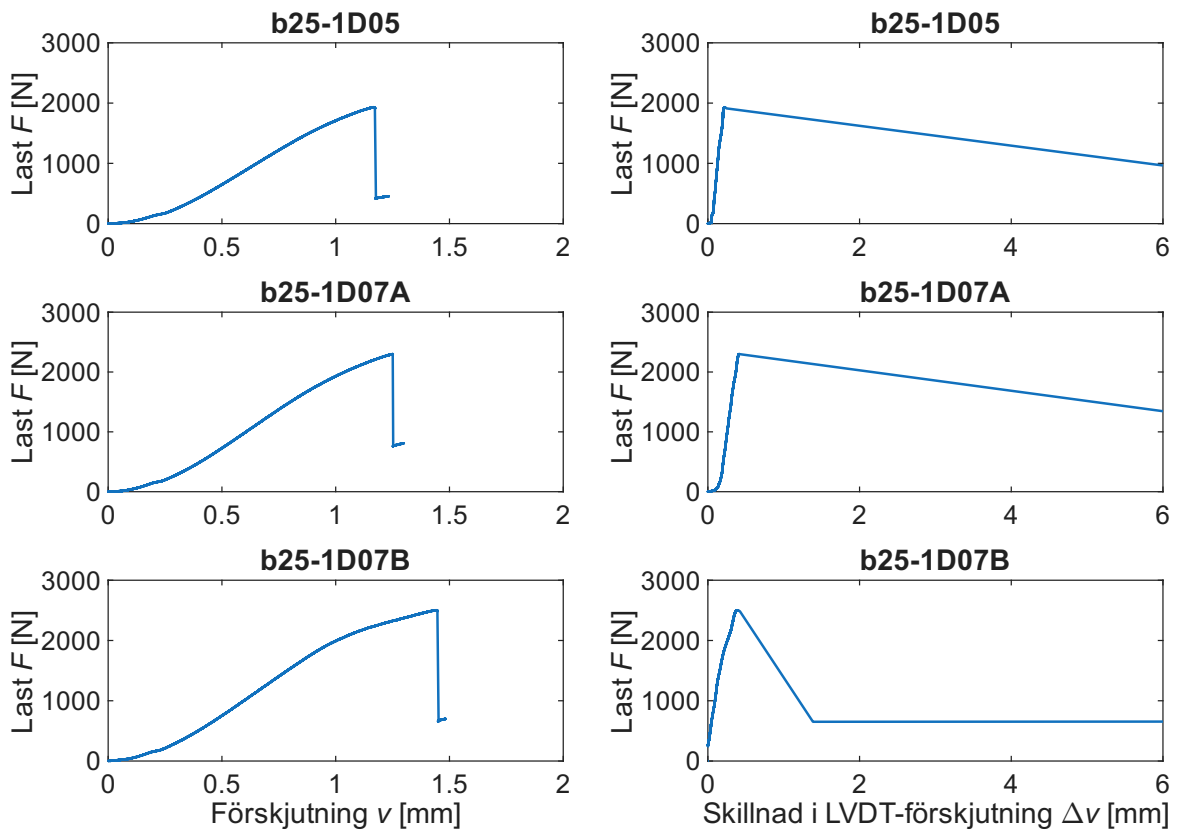
LVDT



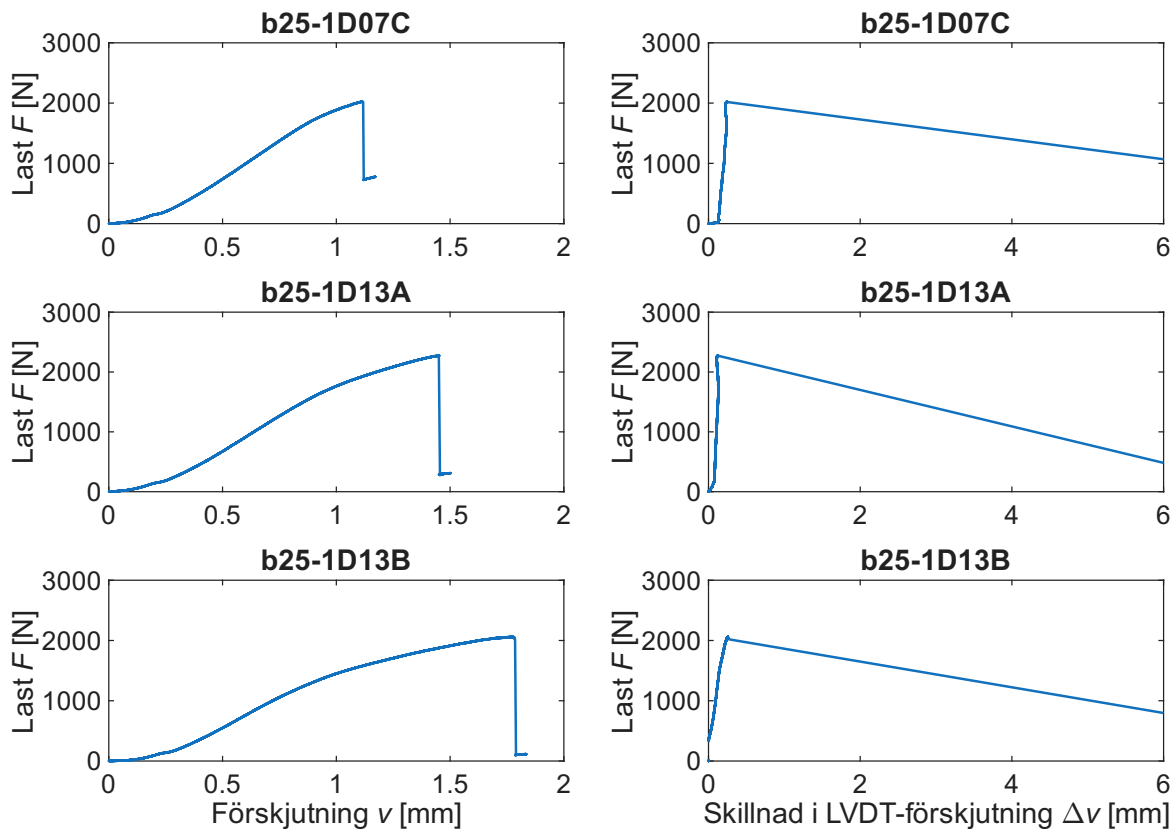
Figur C.1: Last-förskjutningsdiagram och Last-LVDTdiagram för de tre första provkropparna i S25 serien



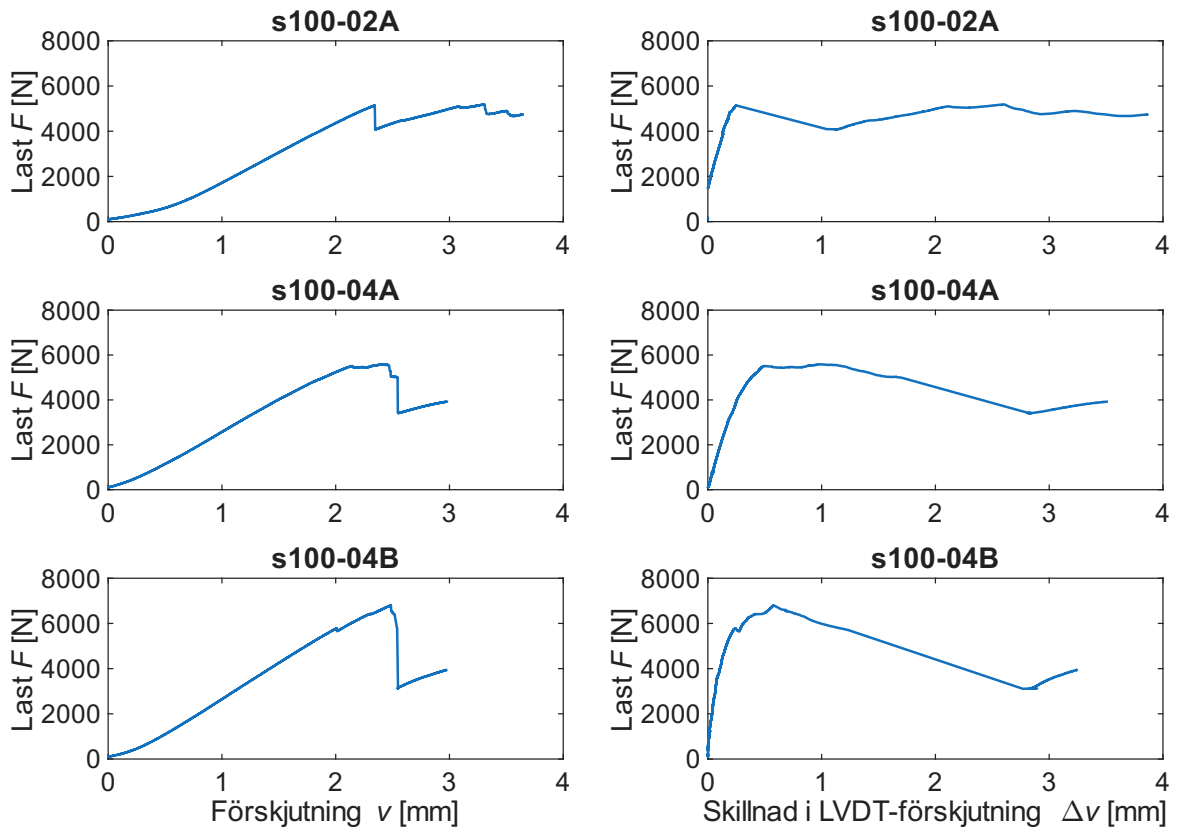
Figur C.2: Last-förskjutningsdiagram och Last-LVDTdiagram för de tre sista provkropparna i S25 serien



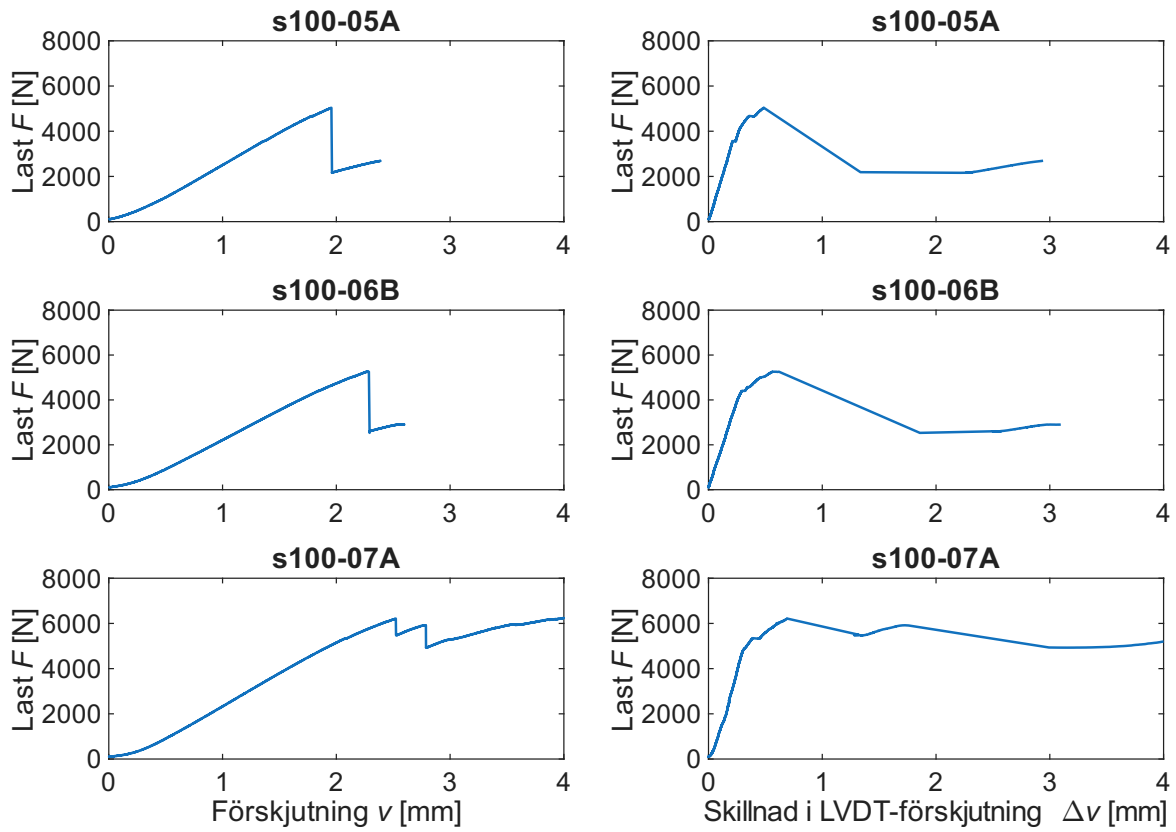
Figur C.3: Last-förskjutningsdiagram och Last-LVDTdiagram för de tre första provkropparna i B25 serien



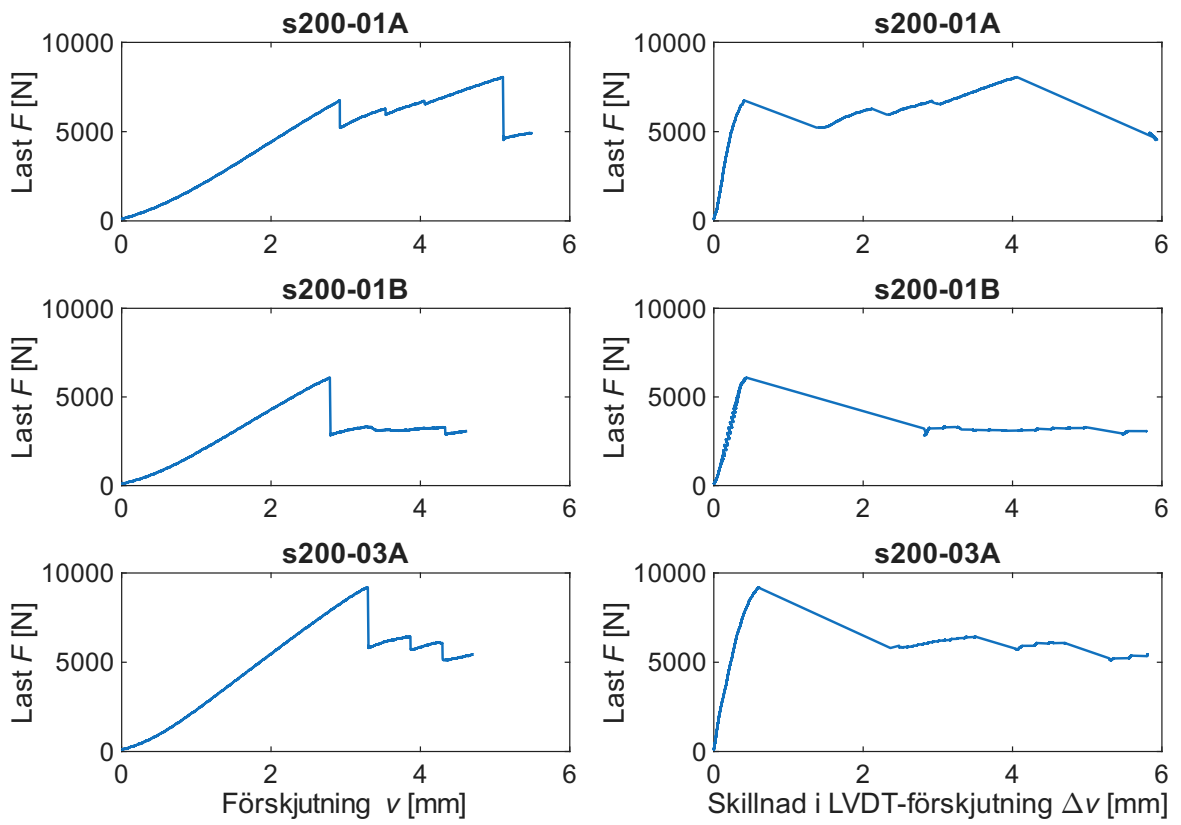
Figur C.4: Last-förskjutningsdiagram och Last-LVDTdiagram för de tre sista provkropparna i B25 serien



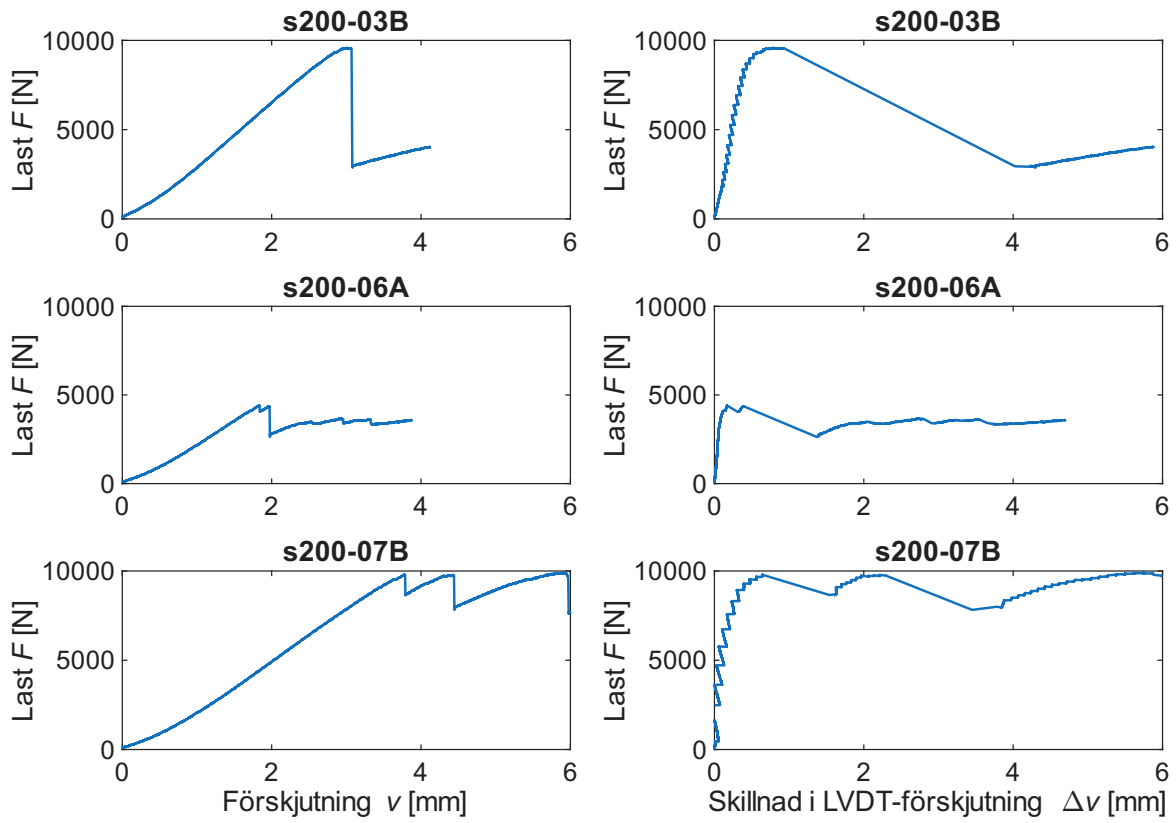
Figur C.5: Last-förskjutningsdiagram och Last-LVDTdiagram för de tre första provkropparna i S100 serien



Figur C.6: Last-förskjutningsdiagram och Last-LVDTdiagram för de tre sista provkropparna i S100 serien



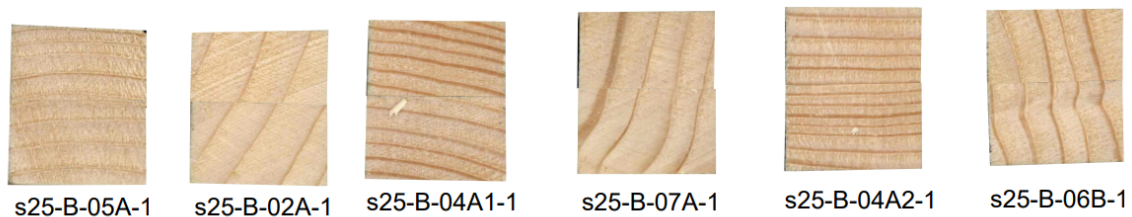
Figur C.7: Last-förskjutningsdiagram och Last-LVDTdiagram för de tre första provkropparna i S200 serien



Figur C.8: Last-förskjutningsdiagram och Last-LVDTdiagram för de tre sista provkropparna i S200 serien

Bilaga D

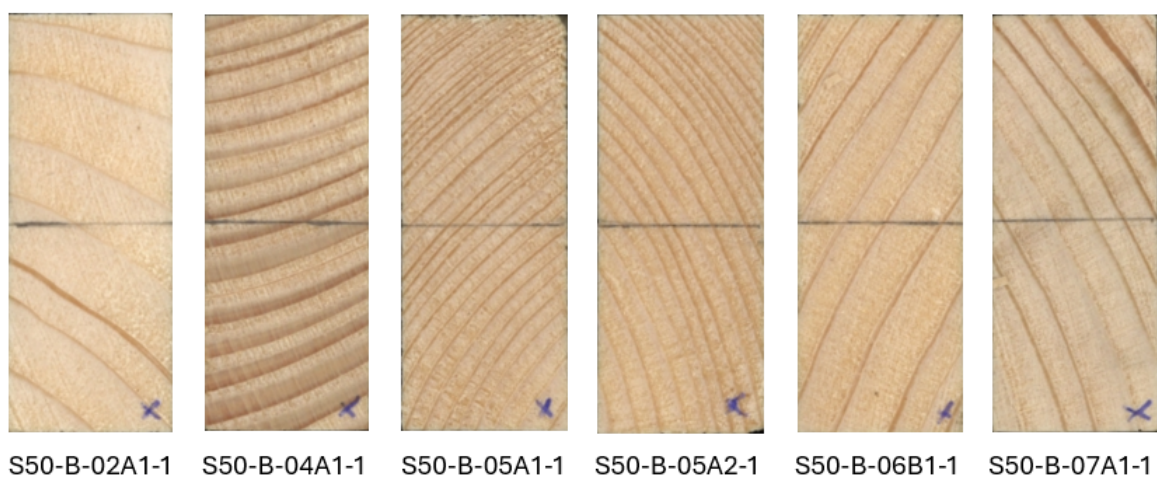
Scanning



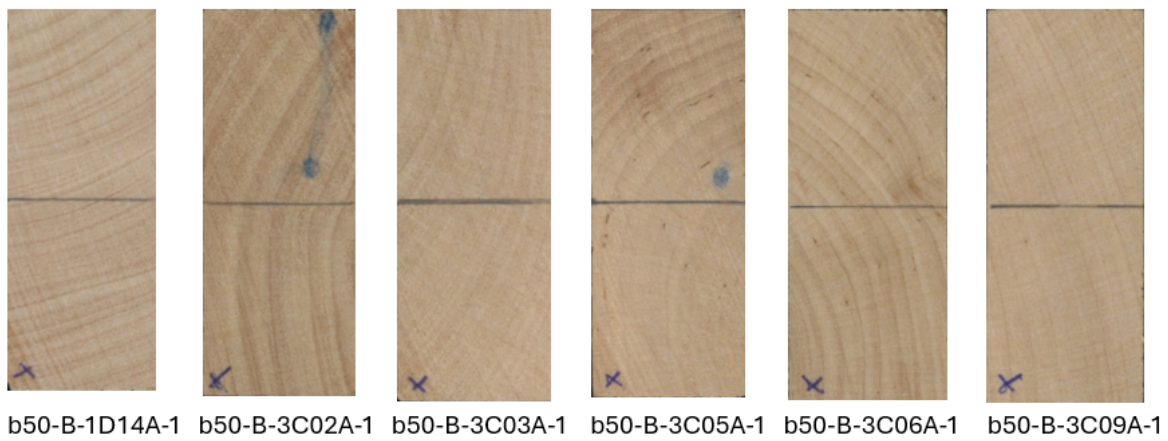
Figur D.1: Inscanning av ändträet för gran med $h = 25 \text{ mm}$.



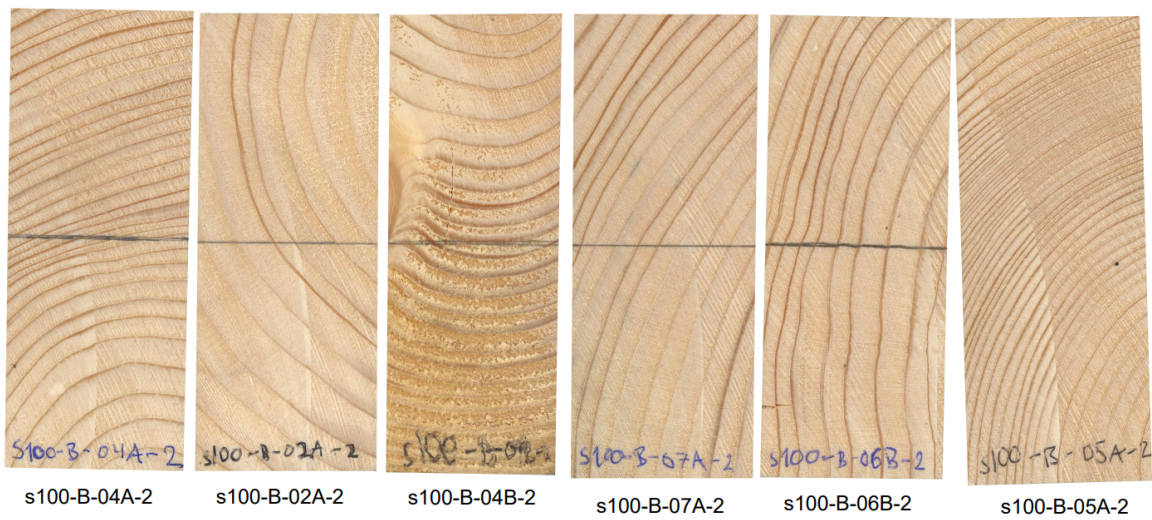
Figur D.2: Inscanning av ändträet för björk med $h = 25 \text{ mm}$.



Figur D.3: Inscanning av ändträet för gran med $h = 50 \text{ mm}$.



Figur D.4: Inscanning av ändträet för björk med $h = 50 \text{ mm}$.



Figur D.5: Inscanning av ändträet för gran med $h = 100 \text{ mm}$.



Figur D.6: Inscanning av ändträet för gran med $h = 200 \text{ mm}$.